§1 イントロダクション

$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ 滑らかな関数

(1.1) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$

とかけたら. $a_0, a_1, \cdots,$ はどうなるか?

1. (1.1) で $x=0$ を代入すると
$$f(0)=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0^2+\cdots=a_0$$
より $a_0=f(0)$.

2. (1.1)を微分すると
$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots$$
だから $x=0$ を代入して.
$$f'(0)=a_1$$

3. (1.1)を2回微分すると.
$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\cdots$$
だから $x=0$ を代入して
$$\frac{1}{2}f''(0)=a_2.$$

以下同様にして
$$a_0=f(0),\ a_1=\frac{f'(0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ a_3=\frac{f'''(0)}{3!}$$
$$a_4=\frac{f''''(0)}{4!},\ \cdots$$

従って

$\cancel{f(x) = a_0 + \cdots}$

$$(1.2)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

となる．(1.2)を f の原点における Taylor展開という

~~Taly~~

〈Taylor展開が主張すること〉

・関数 f を多項式で近似している．

〈問題点〉

どのような関数ならTaylor展開が正しいのか？

例（Taylor展開が成り立つ例）

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$

例（~~Taly~~ Taylor展開が成り立たない例）

$$f(x) := \begin{cases} 0 & -1 < x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

とおくと．$m \in \mathbb{N}$ に対し $f^{(m)}(0) = 0$.

$$\cancel{f(0)}\ f(x) = 0 + 0x + \frac{0}{2!}x^2 + \cdots = 0$$

となり $0 < x < 1$ で等号が成立しない．

〈講義の目標〉

(1.1), (1.2) の右辺である無限の和（級数という）

の性質を理解する

§2 極限の復習

§2.1 数列の収束

<u>定義2.1</u>（数列の収束）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ $^\forall \varepsilon > 0$ に対し，（ε に依ってきまる）ある $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$

が存在して，$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ．

このとき，

$$a_n \to a, \quad (n \to \infty)$$

とか

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

とかく．

<u>例.2.1</u>

$a_n = \frac{1}{n}$ としたとき，

$$a_n \to 0, \quad (n \to \infty).$$

考え方（証明ではふつう書かないこと）

$\forall \varepsilon > 0$ に対して．$n \geq N_\varepsilon$ なら $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ となる N_ε をみつける．$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ をみたすためには $\frac{1}{\varepsilon} < n$ であればよいので $N_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をとればよい．

証明

$\forall \varepsilon > 0$ に対し，$N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を選ぶ．すると $n > N_\varepsilon$ ならば $n > N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ となるので．

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

が成り立つ $\square$

4/10

定義2.2（Cauchy列）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が Cauchy列．

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して．$\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して．$\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対して．

$$n, m \geq N \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

が成り立つ．

定理2.1（$\mathbb{R}$の完備性）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が Cauchy列ならば収束する．すなわち．ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して．$\cancel{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$

$$a_n \longrightarrow a, \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．

§§2.2 関数の収束.

以下. $I=[a.b]\subset\mathbb{R}$ を閉区間とする.

定義2.3 (関数の収束.連続)

関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が $x_0\in I$ ~~としまたと~~ に対し.

$x\to x_0$ で $a\in\mathbb{R}$ に収束

$\underset{\text{定義}}{\overset{\cancel{\text{def}}}{\iff}}$ $^\forall\varepsilon>0$ に対し. εに依ってきまる $\delta=\delta_\varepsilon>0$ が存在して. $^\forall x\in I$ に対し.

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$$

が成り立つ. このとき.

$$f(x)\longrightarrow a,\qquad (x\to x_0)$$

とかく. とくに. $f(x_0)=a$ となるとき. fは. x_0で連続であるという.

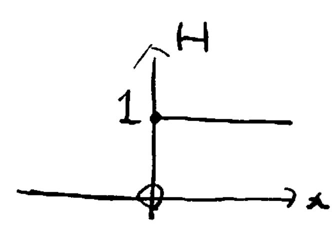
注意2.1

定義2.3で $|x-x_0|>0$ である. 特に. fは. x_0で定義されていなくてもよい.

例2.2 (Heaviside 関数)

$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$H(x):=\begin{cases}1 & 0\leq x<\infty\\ 0 & -\infty<x<0\end{cases}$$



で定めると Hは x_0で連続でない.

定理 2.2 ~~Iは閉区間とする~~

$f: I \to \mathbb{R}$. $x_0 \in I$ に対して. 以下は同値.

(1) f は x_0 で連続, すなわち

$$f(x) \to f(x_0), \quad (x \to x_0)$$

(2) ~~$\forall x_0$に~~ 任意の「x_0 に収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$」に対し

$$f(a_n) \to f(x_0), \quad (n \to \infty).$$

証明 (1) ⇒ (2) のみ示す. $x_0 \in I$ はIの内点として

〈考え方〉

(2)を示すから. まず x_0 に収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる. そして.

~~(1)を使~~ (1)の定義を使って $f(a_n) \to f(x_0)$ を示す.

証明

(1) ⇒ (2). 任意の x_0 に収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ~~に対し~~ をとる.

$f(x)$ は x_0 で連続なので $\forall \varepsilon > 0$ に対し. $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ が存在して $\forall x \in I$ に対し

$$(*) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ. そこで. この δ に対し. a_n は x_0 に収束するから

$N = N_\delta \in \mathbb{N}$ が存在して. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し.

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - x_0| < \delta$$

とできる. ~~(*)より.~~ 従って (*)より

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つので

$$f(a_n) \to f(x_0), \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ □

§3 数列の級数

この節では $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は数列とする.

§§3.1. 級数

<u>定義3.1</u> (級数)

$n \in \mathbb{N}$ に対し.

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の<u>第n部分和</u>という. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ で収束するとき. すなわち

$$S_n \to S, \quad (n \to \infty)$$

となる $S \in \mathbb{R}$ があるとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ と書き.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するという. $\{S_n\}$ が収束しないとき.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するという.

<u>例3.1</u> (等比級数)

$r > 0$ に対し. $a_n := r^{n-1}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & 0 < r < 1 \\ \text{発散} & r \geq 1 \end{cases}$$

となる. (演習)

具体的に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めることは難しい．そこで．

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するか否かを考える．

定理 3.1（Cauchy の判定条件）

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する．

$\Longleftrightarrow$ （同値） ${}^\forall\varepsilon>0$ に対し．ある $N=N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ が存在して．$n.m\in\mathbb{N}$ に対し．

$$n>m\geq N_\varepsilon \Longrightarrow |\cancel{a_m}\, a_{m+1}+\cdots+a_n|<\varepsilon.$$

が成り立つ．

証明

〈考え方〉

部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ が収束すること ~~を示す~~が $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することの定義．$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ~~に対して~~ が Cauchy 列となることをみる．

証明

1. ($\Rightarrow$) を示す．部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ が収束するから

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である．従って ${}^\forall\varepsilon>0$ に対し．

$N=N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ が ~~とれて~~ 存在して．$n.m\in\mathbb{N}$ に対し．

$$n\geq m\geq N \Longrightarrow |S_n-S_m|<\varepsilon$$

が成り立つ．

$$|S_n-S_m|=\left|\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{m} a_k\right|=|a_{m+1}+\cdots+a_n|$$

より

$$|a_{m+1}+\cdots+a_n|<\varepsilon$$

が成り立つ．

2. ($\Leftarrow$) を示す.

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n|$$

だから. 仮定は $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることを主張している. 従って $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 収束するので $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は 収束する. $\square$

4/17

演習

例 3.1 を示せ.

命題3.1.（比較判定法）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し $0\leq a_n\leq b_n$ をみたす.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{が収束} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が収束}.$$

〈考え方〉

部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_n$ は単調増加だから $\lim_{n\to\infty} S_n=\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ となる.

だから $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示せばよい.

証明

$S_n:=\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\tilde{S}_n:=\sum_{k=1}^{n} b_k$ とおくと. $\forall k\in\mathbb{N}$ に対して

$0\leq a_k\leq b_k$ だから $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\tilde{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加で

$$S_n\leq\tilde{S}_n\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\tilde{S}_n=\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_n$$

が成り立つ. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するから $\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_n<\infty$ となり.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な単調増加列ゆえ収束する. 従って.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する □

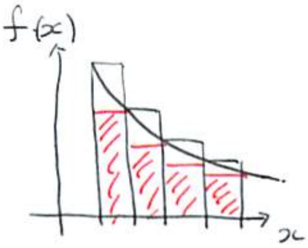
定理3.2.（積分判定法）

$\forall x\in[1,\infty)$ に対し $f(x)\geq 0$

$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ は $f\geq 0$ かつ単調減少とする. このとき.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{が収束} \underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \int_1^{\infty} f(x)\,dx<\infty$$

証明の概略



$^\forall k\in\mathbb{N}$ と $k\le x\le k+1$ に対し

$$f(k)\ge f(x)\ge f(k+1)$$

だから、$x\in[k,k+1]$ で積分すると

$$f(k)\ge\int_k^{k+1}f(x)\,dx\ge f(k+1)$$

となる。k について部分和をとると

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\ge\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)\,dx=\int_1^{n+1}f(x)\,dx\ge\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-f(1).$$

となるから命題3.1と同様の方法で示せる。 □

例3.2(ゼータ関数)

$s>1$ に対し、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は収束する。なぜならば、

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}\,dx=\left[\frac{1}{-s+1}x^{-s+1}\right]_{x=1}^{x=\infty}=\frac{1}{s-1}<\infty$$

だからである。そこで

$$\zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

と定める。ζ をゼータ関数という。

§§3.2 交代級数・正項級数

定義3.2(交代級数,正項級数)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a_n>0$ をみたすとする。このとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots$$

を正項級数といい、

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

を交代級数という。

定理3.3（Leibnizの判定法）

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少，${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n > 0$，$a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

$\Rightarrow$ 交代級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

は収束する.

証明

1. $m \in \mathbb{N}$ に対し $S_m = \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} a_n$ とおくと.

$$S_{2m+2} = S_{2m} + \underbrace{(a_{2m+1} - a_{2m+2})}_{\geq 0} \geq S_{2m}$$

より $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ は単調増加であり,

$$S_{2m} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(a_{2m-2} - a_{2m-1})}_{\geq 0} - a_{2m}$$

$$\leq a_1$$

より有界になる. 従って $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ は収束するので $S = \lim_{m \to \infty} S_{2m}$ とおく.

2. $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$ だから

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} \to S \qquad (m \to \infty)$$

より. $\lim_{m \to \infty} S_{2m+1} = S$ も成り立つ.

$S = \lim_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to \infty} S_{2m}$ より

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ が成り立つ $\square$

例3.3

$p>0$ に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$$

は収束する. しかし $0<p\leq 1$ に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$$

は発散する.

定理3.4 (d'Alembertの判定法)

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ に対し, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ が存在するとき,

(1) $0\leq r<1 \implies \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束

(2) $r>1 \implies \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散.

〈考え方〉

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to r\ (n\to\infty)$ より (だいたい) $a_{n+1}\leq r a_n$ となる.

つまり $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は等比級数とみなせる

24. Apr. 2012

証明

(1) $r<\rho<1$ なる ρ を1つとると, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to r\ (n\to\infty)$ より

$N\in\mathbb{N}$ が存在して, $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し $n\geq N$ ならば

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-r\right|<(\rho-r).$$

とくに $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho$ とできる. 従って $n\geq N$ ならば

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot a_N\leq a_N\rho^{n-N}$$

であり, $a_N\sum_{n=N}^{\infty}\rho^{n-N}$ は収束する. 有限個の和は,

収束に関係しないので比較判定法により $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する.

(2) (1) と同様に $\exists N \in \mathbb{N}$ が存在して、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、

$n \geq N$ ならば

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < (r-1),$$

とくに $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ とできる。従って $n \geq N$ ならば

$$a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < \cdots$$

となり $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しない。従って、Cauchy の判定条件から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

定理 3.5 (Cauchy の判定法)

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対し $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が存在するとき、

(1) $0 \leq r < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束

(2) $r > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散。

~~§§3.3~~

§§3.3 条件収束と絶対収束

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots =: A \tag{3.1}$$

~~3.1)~~

(Leibnizの判定法)

両辺 $\frac{1}{2}$ 倍

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \cdots = \frac{A}{2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \cdots \tag{3.2}$$

(3.1) + (3.2)

$$\Rightarrow \quad 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{3}{2}A$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2}A$$

並べ換えで値がかわる

定義 3.3 (絶対収束・条件収束)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が <u>絶対収束</u> $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が <u>条件収束</u> $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は発散する.

例3.4

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ は絶対収束.　(例3.2に注意)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は条件収束.

定理3.6

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束 $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束.

証明

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するから Cauchyの判定条件(定理3.1)より

$\forall \varepsilon > 0$ に対し ~~ある~~ $\exists N \in \mathbb{N}$ が存在して. $\forall m, \forall n \in \mathbb{N}$ に対し.

$m > n \geq N \Longrightarrow |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = ||a_{n+1}| + \cdots + |a_m|| < \varepsilon$.

このとき.

$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon$

となり. Cauchyの判定条件より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

□

記号

$a_n^+ := \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- := \max\{-a_n, 0\}$

このとき

$a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

定理 3.7（絶対収束・条件収束の特徴付け）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束 $\underset{\text{同値}}{\iff}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ が収束

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束 $\underset{\text{同値}}{\iff}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ がともに発散

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束，

証明の方針

(1) $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ だから

$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$,　$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$

であることを使う．

(2) 背理法でまず $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ か $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ が発散すること

を示す．次に $a_n = a_n^+ - a_n^-$ を使って両方とも

発散することを示す．

7. May. 2012

定理 3.8（並べ替えの一意性）

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束 $\Longrightarrow$ 項の順序を変えても同じ値に収束．

i.e. $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を全単射とするとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

証明

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数のときに示す.

$N \in \mathbb{N}$ に対し $m_N = \max\{\phi(k) : 1 \leq k \leq N\}$

とおけば

$$\sum_{k=1}^{N} a_{\phi(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_N} a_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

より $N \to \infty$ として

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad \text{—}(*)$$

次に $b_k = a_{\phi(k)}$ とおき. $N \in \mathbb{N}$ に対し
$M_N = \max\{\phi^{-1}(n) : 1 \leq n \leq N\}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{N} b_{\phi^{-1}(n)} \leq \sum_{k=1}^{M_N} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$$

$b_{\phi^{-1}(n)} = a_{\phi^{-1}(\phi(n))} = a_n$ より $N \to \infty$

とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} \qquad \text{—}(**)$$

$(*)$ と $(**)$ より $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が一般の絶対収束級数のときは.

定理3.7より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ がともに収束.

1. の結果より

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a^+_{\phi(k)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{k=1}^{\infty} a^-_{\phi(k)}.$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a^+_{\phi(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a^-_{\phi(k)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad \square$$

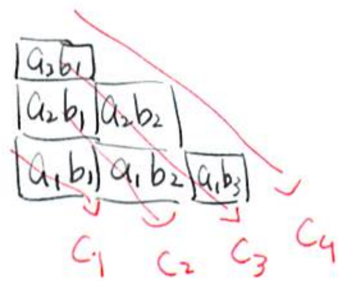
§§3.4 Cauchy積

2つの級数の(自然な)積を定義する.

定義3.4 (Cauchy積, 合成積)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ に対し

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$



とおく ($\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の合成積という). このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の Cauchy積 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ を

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} a_k b_l \right)$$

で定める.

定理3.9

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が絶対収束

$\Rightarrow$ Cauchy積 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ も絶対収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

証明

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が正項級数のときに示す. $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} c_n &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right).\end{aligned} \quad \text{—}(*)$$

より $N \to \infty$ とすると 左辺は単調増加より収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

さらに $(*)$ より

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \leq \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right) \leq \sum_{k+l \leq 2N} a_k b_l = \sum_{n=1}^{2N} c_n$$

より $N \to \infty$ として

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

$\square$

§4 関数列の収束

以下しばらく $I \subset \mathbb{R}$ は区間とする.
(開区間でも閉区間でもよい)

定義 4.1 (関数列)

$n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ とするとき.
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を I 上の関数列という.

例 4.1

(1) $I = (0, \infty)$ とする. $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := x^n, \quad x \in (0, \infty) = I$$

で定めると. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上の関数列.

このとき. $n \to \infty$ とすると

$$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \infty & x > 1 \end{cases} \quad (n \to \infty)$$

(2). $f_0(x) = a_0$, $f_1(x) = a_0 + a_1 x$, $f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$f_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, $f_4(x) = \cdots$

として. 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定められる 14. May 2012

§§4.1 各点収束と一様収束

数列と異なり、関数列については収束のしかたがいろいろある。その中でも最もわかりやすい各点収束と、(少し難しいが)重要な一様収束を説明する。

定義 4.2 (各点収束)

I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f: I \to \mathbb{R}$ に各点収束

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}x \in I$ に対して

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad (n \to \infty)$$

~~がよ~~

f を $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数といい、

$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ などとかく。また、各点収束を強調して

$$f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty, \quad x \in I \text{ (各点)}$$

とかいたりする。

注意 4.1

各点収束は、ε-N 論法で　xに依存して決まる!!

$${}^{\forall}x \in I,\ {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N = N_{\varepsilon,x} > 0 \text{ s.t. } {}^{\forall}n \in \mathbb{N}$$

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

例 4.2

(1)　(1.1) を考えて

$$f_0(x)=a_0,\quad f_1(x)=a_0+a_1x,\quad f_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2,\quad \cdots$$

と定めて関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を作る. この関数列の極限関数が Taylor 展開の正体 (あとで)

(2) (例 4.1 のつづき).

$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ を

$$f_n(x)=x^n,\qquad x\in[0,1]$$

で定める. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

で定めると

$$f_n(x)\longrightarrow f(x),\quad (n\to\infty)\quad x\in[0,1]\ (\text{各点}).$$

となる.

(3) $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f_n(x):=\begin{cases}0 & -\infty<x<0\\ nx & 0\le x\le\frac{1}{n}\\ 1 & \frac{1}{n}<x<\infty\end{cases}$$

で定める. 各 f_n は連続で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Heaviside 関数に各点収束する.

例4.3.

例4.1を参考にして. $I=[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$に対し

$$f_n(x) := x^n \qquad x\in[0,1]$$

で$[0,1]$上の関数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$を定める. このとき.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

がわかる. ε-N論法で $^\forall x\in(0,1)$ と $^\forall\varepsilon>0$

に依存する$N=N_{\varepsilon,x}>0$を求めてみる. $[0,1]$ではない!

$|f_N(x)|<\varepsilon$ となる N を求めてみると

$$x^N<\varepsilon \iff N\log x < \log\varepsilon$$

($\Rightarrow$) $\log\varepsilon$とる

($\Leftarrow$) exp とる.

$$\iff N > \frac{\log\varepsilon}{\log x}$$

$x<1$だから$\log x<0$

となる. (nに関して単調減少するから) $N>\dfrac{\log\varepsilon}{\log x}$ なる$N\in\mathbb{N}$

をとれば.

$$n\geq N \implies |f_n(x)|\leq x^N<\varepsilon$$

がわかる. ここでNはxに依存して決まること.

xを1に近づけるとNも大きくなることに注意.

例4.4

$[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$f_n(x) := x^n(1-x)^n, \qquad x\in[0,1]$$

で定める。このとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \qquad x\in[0,1].$$

となる。例4.3と同じく、$\forall x\in(0,1)$ と $\forall \varepsilon>0$ に対する $N>0$ を求める。$|f_N(x)|<\varepsilon$ となる N を求めると

$$x^N(1-x)^N<\varepsilon \iff N\log(x(1-x)) < \log\varepsilon$$
$$\iff N > \frac{\log\varepsilon}{\log(x(1-x))}$$

から、$n\geq N$ ならば

$$|f_n(x)| \leq x^N(1-x)^N < \varepsilon$$

となる。ところで $x\in[0,1]$ に対し $0\leq x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ となるから（各自）、$N_0\geq\dfrac{\log\varepsilon}{\log\frac{1}{4}}$ ととれば、

$$N_0 \geq \frac{\log\varepsilon}{\log\frac{1}{4}} > \frac{\log\varepsilon}{\log(x(1-x))}$$

となる。従って N_0 は x に依らずに決まり、

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_{N_0}(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{N_0} < \varepsilon$$

もわかる。

定義 4.3 (一様収束)

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ をI上の関数列が $f: I \to \mathbb{R}$ に一様収束

$$\underset{\text{定義}}{\iff} \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad (n \to \infty)$$

このとき、

$$f_n \to f \quad (n \to \infty), \quad I\text{上一様収束}$$

とかいたりする。

注意 4.2

定義4.3を ε-N論法で述べると

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$n \geq N \implies \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

だが $\forall x \in I$ に対し $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in I} |f_n(y) - f(y)|$ より

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ともかける。とにかく、Nがxに依らないことが重要である。

22. May 2012

命題4.1

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$: I 上の関数列, $f: I \to \mathbb{R}$.

$$f_n \longrightarrow f \quad (n\to\infty) \quad I\text{上一様}$$

$$\Longrightarrow f_n(x) \to f(x). \quad (n\to\infty) \quad x\in I \text{(各点)}$$

証明

$^\forall x \in I$ に対し. f_n は f に一様収束するので

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y\in I} |f_n(y) - f(y)| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

はさみうちの原理より $f_n(x) \to f(x) \quad (n\to\infty)$ □.

㊟ 一様収束を示すには. 極限関数 f を求めておいて
$|f_n(x) - f(x)|$ を評価するのがやりやすい.

例4.5

$n \in \mathbb{N}$ に対し

$$f_n(x) := x^n \qquad x \in [0,1].$$

とおく. 例4.3 より

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0\leq x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に (0.1)上 一様収束しない.

∵ $^{\forall} n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\sup_{x\in(0.1)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(0.1)} |x^n - 0|$$

$$= \sup_{x\in(0.1)} x^n = 1.$$

となるから $n\to\infty$ とすると

$$\sup_{x\in(0.1)} |f_n(x)-f(x)| \not\to 0. \qquad (n\to\infty)$$

従って $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に (0.1)上 収束しない.

例 4.6

$n \in \mathbb{N}$ に対し

$$f_n(x) := x^n(1-x)^n \qquad x\in[0.1]$$

とおく. 例 4.4 より

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad x\in(0.1).$$

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に (0.1) 上一様収束する.

∵ $^\forall x \in (0,1)$ に対し

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n (1-x)^n$$
$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$ ← xに依存しない!

$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

$x \in (0,1)$について上限をとれば

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$\left(\frac{1}{4}\right)^n \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$ より (はさみうちの原理から)

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty)$$

⑪ 一様収束を示すには $|f_n(x) - f(x)|$ を評価して、xに依存せずに 0に収束する数列をみつければよい。

<u>定理 4.1</u> (Cauchy の判定条件)

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を I 上の関数列とすると次は同値

(1) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が ある $f: I \to \mathbb{R}$ に I 上一様収束、

(2) $^\forall \varepsilon > 0$ に対し $^\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して、$^\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対し

$$n, m \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

〈考え方〉

(⇒) 収束数列が Cauchy 列になることの証明と同様

($\sup_{x\in I}|f(x)-g(x)| \leq \sup_{x\in I}|f(x)-h(x)|+\sup_{x\in I}|h(x)-g(x)|$

に注意).

(⇐) $\mathbb{R}$ の完備性をうまく使う.

証明

(⇒) 各自確かめよ.

(⇐) ${}^\forall x\in I$ に対し. 仮定から.

${}^\forall\varepsilon>0$ に対して. ${}^\exists N\in\mathbb{N}$ が存在して. ${}^\forall n, m\in\mathbb{N}$ に対し

$$n, m\geq N \Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)| \leq \sup_{y\in I}|f_n(y)-f_m(y)| < \varepsilon \quad -(*)$$

となるので. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列 より収束する

(定理2.1) そこで $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおく.

(*) より $m\to\infty$ とすれば

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon$$

が得られるから 両辺 $x\in(0,1)$ について sup をとると

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon$$

となるから. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上 f に一様収束する

□

§4.2 極限に関する交換

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$: I 上の連続な関数列

$f \quad : I \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad (n\to\infty) \quad x\in I \text{ 各点.}$$

としても. f は連続とは限らない. (例 4.2)

◎ どのようなときに連続か?

<u>定理4.2</u>

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$: I 上の連続関数列. $f: I\to\mathbb{R}$.

$$f_n \to f, \quad (n\to\infty) \quad I \text{上一様.}$$

$\Longrightarrow$ f は I 上連続.

〈考え方〉

十分大きな $N\in\mathbb{N}$ と $x, x_0\in I$ に対し

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(x_0)| + |f_N(x_0)+f(x_0)|$$

として. 右辺を評価する

<u>証明</u> $\forall x_0\in I$ を固定する.

$\forall\varepsilon>0$ に対し. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束するから

$\exists N\in\mathbb{N}$ が存在して

$$\sup_{y\in I}|f_N(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる.

f_Nは連続なので $\exists \delta>0$ が存在して、$\forall x \in I$に対し

$$|x-x_0|<\delta \implies |f_N(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

とできる。従って $|x-x_0|<\delta$ ならば

$$\cancel{|x-x_0|}$$

$$|f(x)-f(x_0)| \le \underbrace{|f(x)-f_N(x)|}_{\le \sup_{y\in I}|f(y)-f_N(y)|}+|f_N(x)-f_N(x_0)|+\underbrace{|f_N(x_0)-f(x_0)|}_{\le \sup_{y\in I}|f_N(y)-f(y)|}$$

$$\le 2\sup_{y\in I}|f_N(y)-f(y)|+|f_N(x)-f(x_0)|$$

$$\le \varepsilon.$$

となるので fはx_0で連続となる。$x_0\in I$は任意だったから fはI上連続となる □

<u>定理4.3</u> (積分と極限の交換)

$I=[a.b]$ は有界, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はI上の連続関数列

$f: I \to \mathbb{R}$.

$$f_n \longrightarrow f, \quad (n\to\infty). \quad I\text{上一様}.$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx.$$

〈考え方〉

示すことは

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

だから、この絶対値を評価する。

証明

$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

積分の三角不等式

$$\leq \int_a^b \sup_{y\in I} |f_n(y) - f(y)|\,dx$$

$$= \sup_{y\in I} |f_n(y) - f(y)|\,(b-a)$$

$$\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が f に一様収束

従って、

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad (n\to\infty)$$

$\square$

積分や連続性と違い，微分と極限の交換は気をつけないといけない．

例 4.7

$n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{nx^2}{2} & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ x - \frac{1}{2n} & \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

とおく．~~f_n~~ $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し f_n は C^1 級で $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \end{cases}$$

とおいたときに $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束する．（各自）

しかし，f は微分可能でない．つまり，微分可能な関数列が一様収束しても，極限関数が微分可能になるとは限らない

定理 4.4（極限と微分の交換）

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$: I 上の C^1 級関数列，$f, g : I \to \mathbb{R}$．

$$f_n \to f \quad (n \to \infty) \quad I \text{ 上一様}$$

$$\frac{df_n}{dx} \to g \quad (n \to \infty) \quad I \text{ 上一様．}$$ （微分が一様収束）

$\Longrightarrow$ f は C^1 級で微分と極限が交換できる．i.e.

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx} = g．$$

証明

$x_0 \in I$ を固定する. ${}^\forall x \in I$ に対し ${}^\forall n \in \mathbb{N}$ 微積分の基本~~的~~定理より

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{df_n}{dx}(y)\,dy$$

が成り立つ. $\left\{\frac{df_n}{dx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が g に I 上一様収束するので

$n \to \infty$ とすると $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I 上一様収束 (とくに各点収束)

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(y)\,dy \quad \text{---}(*)$$

となる (定理4.3). f_n は C^1 級で $\left\{\frac{df_n}{dx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が g に I 上

一様収束するから g は I 上連続 (定理4.2)

従って $(*)$ の右辺は $x \in I$ について可微分だから

左辺の $f(x)$ も x について可微分であり

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} g(y)\,dy = g(x)$$

が成り立つ $\square$

注意 4.3

定理4.4 で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一様収束性は各点収束性に弱めてもよい. さらに. $\exists x_0 \in I$ と $\exists a \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f_n(x_0) \to a \quad (n \to \infty)$$

におきかえてもよい(このとき. 自動的に. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある C^1 関数 $f: I \to \mathbb{R}$ に各点収束することも示せる) もちろん.

$\left\{\frac{df_n}{dx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ の一様収束性ははずすことができない.

19. Jun. 2012

§5 関数項級数と巾級数

§§5.1 関数項級数

$I \subset \mathbb{R}$ は区間, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上の関数列とする.

定義 5.1 (関数項級数)

$N \in \mathbb{N}$, $x \in I$ に対し. $S_N : I \to \mathbb{R}$ を

$$S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

で定める. I 上の関数列 $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ が I 上各点収束するとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{N \to \infty} S_N(x)$$

とおき. 関数項級数という. さらに. $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ が I 上一様収束するとき. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上一様収束するという.

巾級数は最も簡単な例である. 後で性質を

詳しく述べる.

例 5.1 (Fourier 級数)

$[-1,1)$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と

$x \in [-1,1)$ に対し

$$f_n(x) := a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

と定める. この $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ から決まる関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\}$$

を Fourier 級数という. Fourier は,

$f : [-1,1) \to \mathbb{R}$ に対し, $\exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$

が存在して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\}$$

とかけると予想した (正しくはないことが後に示された).

この予想を契機として, 無限の厳密な取り扱い,

無限次元の計量線形空間, 偏微分方程式論

などの研究が大発展した.

定理4.2〜4.4を級数の言葉で述べよう.

定理5.1 (関数項級数の連続性)

$^\forall n\in\mathbb{N}$ に対し f_n は $\overset{\text{I上}}{\wedge}$ 連続. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I上一様収束.

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I上連続.

定理5.2 (級数と積分の交換)

$I=[a,b]$ は有界, $^\forall n\in\mathbb{N}$ に対し f_n は I上連続.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I上一様収束

$$\Longrightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

定理5.3 (級数と微分の交換)

$^\forall n\in\mathbb{N}$ に対し. f_n は I上 C^1 級

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$ I上一様収束

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I上 C^1 級で

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x).$$

~~Wie~~ ~~Weier~~ Weierstrass

定理5.4 (~~Wierstrass~~の優級数判定法)

$\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が存在して

① $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$ に対し $|f_n(x)| \leq M_n$.

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

$\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上一様収束

〈考え方〉

定理4.1を使ってCauchyの判定条件を示す.

証明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ より

$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対し

$$m \geq n \geq N \Longrightarrow \sum_{k=n}^{m} M_k < \varepsilon.$$

とできる. 従って $\forall x \in I$ に対し

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} M_k < \varepsilon$$

から

$$\sup_{x \in I} \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| \cancel{\leq} < \varepsilon$$

が得られる. 従ってCauchyの判定条件により

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ はI上一様収束する □

§§5.2 巾級数

定義5.2（巾級数, 整級数）

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形の関数項級数を $x=a$ 中心の

巾級数 または 整級数 という.

以下 $a=0$ のときのみ考える.

補題5.1（Abel）

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x=x_0$ で収束する

$\Longrightarrow$ $|x|<|x_0|$ をみたす $x\in\mathbb{R}$ について

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束.

証明

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束 $\Longrightarrow$ $a_n x_0^n \to 0$ $(n\to\infty)$

とくに $\exists M>0$ s.t. $|a_n x_0^n| \leq M$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

従って $|x|<|x_0|$ ならば

$$|a_n x^n| \leqq \left|a_n \frac{x^n}{x_0^n}\right| |x_0^n|$$

$$\leqq |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

となり $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ が収束するので $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ も収束する □

(5.1) $\displaystyle R := \sup\left\{ \rho \geq 0 : |x| < \rho \text{ に対し } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は収束} \right\}$

とおくと、

$|x| < R \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束

$|x| > R \Rightarrow$ 〃 発散

がわかる.

定義 5.3 (収束半径)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対し、(5.1) で定まる $R \geq 0$ を

収束半径という.

↑ 26. Jun. 2012

定理 5.5 (d'Alembert の判定法)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ が存在すれば

収束半径は $R = \dfrac{1}{L}$ となる.

証明

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| \longrightarrow L|x| \quad (n\to\infty)$$

より d'Alembert の判定法~~より~~ (定理3.4) より

$|x| < \dfrac{1}{L}$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束

$|x| > \dfrac{1}{L}$ 〃 〃 絶対収束しない.

ここから収束半径は R とわかる. $\Box$

例 5.2

① $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1.

$\because$ $|x|<1$ なら $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ は収束.

$|x|>1$ なら $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ は発散. (定理5.5を使ってもよい)

② $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は ∞.

$\because$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

から定理 5.5を使う.

定理 5.6

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $R>0$ とする.

$\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は 任意の 有界閉区間 $[a,b] \subset (-R,R)$

上で一様収束. 特に $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-R,R)$ 上連続.

証明

$r := \max\{|a|,|b|\}$ とする. $^\forall n \in \mathbb{N}$ と $^\forall x \in [a,b]$ に対し

$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ であり, $r<R$ から

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$.

∴ Weierstrass の優級数判定法より

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $[a,b]$ 上一様収束する．また．

定理5.1 より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-R,R)$ 上連続となる．

□

定理5.7（項別積分）

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $R>0$ とする $\Longrightarrow$ 任意の有界閉区間

$[a,b] \subset (-R,R)$ に対し

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b (a_n x^n)\, dx.$$

とくに $|x|<R$ に対し

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} y^{n+1}.$$

定理5.8（項別微分）

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $R>0$ とする．

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-R,R)$ 上微分可能で

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

さらに $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径も R となる．

証明

定理5.6から項別微分ができる。以下

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径 R' が R に等しいことを示す。

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径も R' であり

$|a_n x^n| \leq |n a_n x^n|$ から $R' \leq R$。

$R \leq R'$ を示すために $|x| < R$ なる $x \in \mathbb{R}$ を固定し、

$|x| < \xi < R$ なる ξ をとると

$$|n a_n x^n| = n \left|\frac{x}{\xi}\right|^n |a_n \xi^n|$$

$\left|\frac{x}{\xi}\right| < 1$ より $n \left|\frac{x}{\xi}\right|^n \to 0 \quad (n \to \infty)$

とくに $\exists M > 0$ s.t. $n \left|\frac{x}{\xi}\right|^n \leq M \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \xi^n|$ が収束するから $\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x^n|$ も収束する。

よって $|x| \leq R'$.

$|x| < R$ なる ${}^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $|x| \leq R'$ だから

$R \leq R'$ が成り立つ。従って $R = R'$

□

系 5.1

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $R>0$ とする

$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-R, R)$ 上無限回微分可能.

~~20~~ 3. Jul. 2012

収束半径の端点 $x=R$ ではどうなっているか?

定理 5.9 (Abel の定理)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $R>0$ とする.

$x=R$ で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ が収束.

$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $[0, R]$ 上で一様収束し $[0, R]$ 上連続.

i.e.

$$\lim_{x \nearrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n .$$

証明

$R=1$, $x=1$ で収束する場合で $[0, 1]$ 上一様収束することを示す.

$^\forall \varepsilon > 0$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1^n$ が収束.

$\Longrightarrow$ $^\exists N \in \mathbb{N}$ が存在して. $m \geq n \geq N$ ならば

$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$.

$^\forall n \geq N$ と $k \geq n$ に対し

$$\sigma_k := a_n + a_{n+1} + \cdots + a_k$$

とおくと $^\forall m \geq n$ と $^\forall x \in [0.1]$ に対し

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| = \left|\sigma_n x^n + (\underbrace{\sigma_{n+1} - \sigma_n}_{a_{n+1}}) x^{n+1} + \cdots + (\underbrace{\sigma_m - \sigma_{m-1}}_{a_m}) x^m\right|$$

$$= \left|\sigma_n (x^n - x^{n+1}) + \sigma_{n+1}(x^{n+1} - x^{n+2}) + \cdots + \sigma_{m-1}(x^{m-1} - x^m) + \sigma_m x^m\right|$$

$$\leq |\sigma_n||x^n - x^{n+1}| + |\sigma_{n+1}||x^{n+1} - x^{n+2}| + \cdots + |\sigma_{m-1}||x^{m-1} - x^m| + |\sigma_m||x^m|$$

$$\leq \varepsilon\left((x^n - x^{n+1}) + (x^{n+1} - x^{n+2}) + \cdots + (x^{m-1} - x^m) + x^m\right)$$

$|\sigma_k| \leq \varepsilon,\ 0 \leq x \leq 1$

$$= \varepsilon x^n \leq \varepsilon.$$

だから $x \in [0.1]$ について sup をとると

$$\sup_{x\in[0.1]} \left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| \leq \varepsilon \qquad ^\forall m \geq {}^\forall n \geq N.$$

従って Cauchyの判定条件より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $[0.1]$ 上一様収束する．とくに $[0.1]$ 上連続である

$\square$

§§5.3 Taylor展開

定理5.10 (Taylor展開)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級で $-R < x < R$ に対して

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

とTaylor展開できるならば

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

となる。

① 証明は両辺 n 回微分して、$x=0$ を代入すればよい

② この計算を実際にするのは面倒なことが多い。

~~§§5.3 Taylor展開~~

例5.2 (指数関数、三角関数のTaylor展開)

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

いずれも収束半径は∞. i.e. $\mathbb{R}$上で定義される.

例5.3 (積とTaylor展開)

$$e^x\sin x = \left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\right)$$

$$= x+x^2+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3-\frac{1}{3!}x^4+\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{3!2!}\right)x^5+\cdots$$

と、通常の積の展開と同じ計算が収束半径内でできる.

例5.4 (arctan x のTaylor展開)

arctan x のTaylor展開を求める.

(微分をするのはたいへん)

$y = \arctan x$ とおくと $\tan y = x$ だから

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

ここで $-1 < x < 1$ ならば．

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

とかけるから．両辺 $[0, x]$ で積分すると

$$(左辺) = \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan x - \arctan 0$$
$$= \arctan x$$

$$(右辺) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n}\,dy$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n y^{2n}\,dy \qquad (\because -1 < x < 1)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

従って

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (-1 < x < 1) \quad \text{—}(*)$$

この右辺の級数は $x=1$ で収束する（Leibnizの判定条件）．従ってAbelの定理より

$$\lim_{x \uparrow 1} \arctan x = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Abel} \\ \text{の定理}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

すなわち

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots .$$

注意

(*)の右辺の級数の収束半径は 1 であり.

(*)の等式は $-1 < x < 1$ でしか成立しない.

しかし. (*)の左辺は. $\mathbb{R}$ 全体で定義できる.

このとき. $\arctan x$ は級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ の

拡張という. さらに $|x| > 1$ のとき. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

は発散するが (*)の等式を利用して.

$|x| > 1$ のときも $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x$

とイミを付けることがある.

例5.5 (形式的な $\tan x$ のTaylor展開)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

と展開できたとして. $a_0, a_1, a_2, \cdots$ を求める.

両辺 $\cos x$ をかけると

$$\sin x = \cos x\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots)$$

より.

$$\begin{aligned}
x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots
&= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots) \\
&= a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2!}\right)x^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2!}\right)x^3 \\
&\quad + \left(a_4 - \frac{a_2}{2!} + \frac{a_0}{4!}\right)x^4 + \left(a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!}\right)x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

となる. 係数を比較して

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 - \frac{a_0}{2!} = 0$$

$$a_3 - \frac{a_1}{2!} = -\frac{1}{3!}, \quad a_4 - \frac{a_2}{2!} + \frac{a_0}{4!} = 0, \quad a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!} = \frac{1}{5!}$$

などが次々に得られる. これらをとくと

$a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{2}{3!}$,

$a_4=0$, $a_5=\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!}+\frac{2}{3!2!}=\frac{16}{5!}$

が得られる

一方 $f(x)=\tan x$ とおくと

$$\frac{df}{dx}(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \frac{d^2f}{dx}(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \quad \frac{d^3f}{dx}(x)=\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$\frac{d^4f}{dx^4}=\frac{16\sin x}{\cos^3 x}+\frac{24\sin^3 x}{\cos^5 x}$$

$$\frac{d^5f}{dx^5}=\frac{16}{\cos^2 x}+\frac{120\sin^2 x}{\cos^4 x}+\frac{120\sin^4 x}{\cos^6 x}$$

となる(たしかめるのは大変) $x=0$ を代入すると($\sin x=0$ より)

$$f(0)=0, \quad \frac{df}{dx}(0)=1, \quad \frac{d^2f}{dx^2}(0)=0 \quad \frac{d^3f}{dx^3}(0)=2$$

$$\frac{d^4f}{dx^4}(0)=0 \qquad \frac{d^5f}{dx^5}(0)=16$$

となり定理5.10に矛盾していないことがわかる.

注意

この計算方法は.複素解析学におけるLaurent展開する方法として重要.とりわけ.複素線積分を計算するときに便利.