

# 解析学 A —級数—

## 1. イントロダクション

$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  を滑らかな関数が

$$(1.1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

と書けたときに,  $a_0, a_1$  などの係数がどうなるかを考えてみる. もし, 書けたとすると (1.1) の両辺に  $x = 0$  を代入することで

$$f(0) = a_0$$

と書ける. 次に (1.1) を両辺  $x$  で微分すると

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

となるから,  $x = 0$  を代入することで

$$f'(0) = a_1$$

が得られる. さらに (1.1) を  $x$  について 2 回微分すれば

$$f''(x) = 2a_2 + (3 \times 2)a_3x + (4 \times 3)a_4x^2 + \dots$$

となるから,

$$f''(0) = 2a_2$$

がわかる. 以下, 繰り返すことで,

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}, \dots$$

が得られる. したがって,

$$(1.2) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

が得られる. (1.2) を  $f$  の原点における Taylor 展開という.

(1.2) は  $f$  を多項式で近似しており, 多項式はわかりやすい関数だからとても有用ではあるのだが, どの程度近似しているかが問題になる. よく使う関数である  $\sin x$  や  $\cos x$ ,  $e^x$  については, 等号が  $(-1, 1)$  の範囲で (実はもっとひろく  $\mathbb{R}$  全体で) 成立することが知られている. それに対して,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

の Taylor 展開は 0 になる. すなわち

$$f(x) = 0$$

となってしまう,  $0 < x < 1$  の区間では成立していないことがわかる.

この講義では, (1.1) の左辺である無限の和 (級数という) の定義や性質と Taylor 展開について議論していく.

## 2. 極限の復習

### 2.1. 数列の収束.

**定義 2.1** (数列の収束).

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  が  $a \in \mathbb{R}$  に収束するとは、 $\forall \varepsilon > 0$  に対して、 $\varepsilon$  によって決まる  $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  が存在して

$$n \geq N_\varepsilon \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つことである。このとき、

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

と書く。また、 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と書くこともある。

感覚的にいうと、数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $a$  に収束するというのは、十分大きなすべての  $n$  に対して、 $a_n$  は  $a$  の近くにいるということを主張している。 $\varepsilon > 0$  は  $a$  からの近さを表しており、自由に近さを決めるときに、それに対応する番号  $N_\varepsilon$  を決めると、 $N_\varepsilon$  より大きい  $n$  なら  $a_n$  と  $a$  の差が  $\varepsilon > 0$  より小さくできるというのが数列の極限の定義である。

**例 2.1.**

$a_n = \frac{1}{n}$  としたとき、

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。

考え方  $\forall \varepsilon > 0$  に対して、 $n \geq N_\varepsilon$  ならば  $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$  となる  $N_\varepsilon > 0$  をみつけばよい。  
 $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$  をみたすためには  $\frac{1}{\varepsilon} < n$  であればよいので、 $N_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$  をみたす  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  をひとつ選べばよい。

証明を書くときには、上の囲まれた部分はたいていは書かない。実際の教科書などでも書かれている本は少数である。しかし、証明を示す上で最も重要なことであり、常に念頭に入れておくとよい。

**証明.**

$\forall \varepsilon > 0$  に対して、 $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$  をみたす  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  を選ぶ。すると、 $n > N_\varepsilon$  ならば  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  となるから  $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$  がわかる。

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。 □

**注意.**

この  $N_\varepsilon$  が存在することはアルキメデスの原理を用いる。

**定義 2.2** (Cauchy 列).

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  が Cauchy 列であるとは、 $\forall \varepsilon > 0$  に対して、 $\varepsilon$  によって決まる  $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  が存在して

$$n, m \geq N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことである。

これも感覚的にいうと、数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が Cauchy 列というのは、十分大きなすべての  $n, m$  に対して、 $a_n$  と  $a_m$  はそんなに離れていないということである。だから、 $a_n$  は十分大きな  $n$  については、それほど変化しないから、収束しそうだという予測がつく。  $\mathbb{R}$  では実際に正しい。すなわち、次が成り立つ。

**定理 2.1** ( $\mathbb{R}$  の完備性).

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  が Cauchy 列ならば、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束する。

**注意.**

$\mathbb{R}$  が完備であることは自明ではないし、証明もまたそんなに易しくはない。特に  $\mathbb{Q}$  は完備でないことを確かめることができる。  $\mathbb{Q}$  と  $\mathbb{R}$  の違いは Cauchy 列が収束するか否かであり、解析学において非常に重要な概念である。

2.2. 関数の収束. 以下、 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  を閉区間とする。

**定義 2.3.**

関数  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $a \in \mathbb{R}$  としたときに、 $f(x)$  が  $x \rightarrow x_0$  で  $a$  に収束するとは、 $\forall \varepsilon > 0$  に対して、 $\varepsilon$  によって決まる  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  が存在して

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

が成り立つことである。このとき

$$f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow x_0)$$

と書く。特に  $a = f(x_0)$  となるとき、 $f$  は  $x_0$  で連続であるという。

**注意 2.1.**

定義 2.3 の中で  $|x - x_0| > 0$  であることに注意せよ。実際、 $f$  は  $x_0$  で定義されていないてもよい。

**例 2.2** (Heaviside 関数).

$$H(x) := \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \infty \\ 0 & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

で定めると  $H$  は  $x = 0$  で連続ではない。  $H$  は Heaviside 関数という。

**定理 2.2.**

このとき、関数  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  について、以下は同値

(1)  $f$  は  $x_0$  で連続。すなわち

$$f(x) \rightarrow f(x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$

(2) 任意の  $x_0$  に収束する数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して

$$f(a_n) \rightarrow f(x_0), \quad n \rightarrow \infty.$$

この定理は、連続的な極限を可算的な極限におきかえてよいことを主張している。実際に、位相空間での (点列) 連続の概念は、定理 2.2 の (2) を用いて定義される。

### 3. 数列の級数

この節では  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  は常に数列とする.

#### 3.1. 級数.

**定義 3.1** (級数).

$n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の第  $n$  部分和という.  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $n \rightarrow \infty$  で収束するとき, すなわち

$$S_n \rightarrow S \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる  $S$  があるとき,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$  と書き,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束するという.  $S_n$  が収束しないとき,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は発散するという.

**例 3.1** (等比数列).

$a \neq 0, r > 0$  に対して,  $a_n := ar^{n-1}$  によって数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を定めると,

$$S_n = a \sum_{k=1}^n r^{k-1} \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \\ na & r = 1 \end{cases}$$

であった. 従って

$$0 < r < 1 \text{ のとき } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r},$$

$$1 \leq r < \infty \text{ のとき } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散}$$

がわかる.

具体的な数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  について,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  の値を求めることは難しい (部分和を求めることさえ難しい). そこで, 値を求めるのではなく, 収束するか否かを考えることにする.

**定理 3.1** (Cauchy の判定条件).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が収束する必要十分条件は  $\forall \varepsilon > 0$  に対して, ある  $N = N_{\varepsilon} > 0$  が存在して,

$$n > m \geq N_{\varepsilon} \implies |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

が成り立つことである.

考え方 部分和  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  が収束することが  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が収束することの定義であった。  
 そこで、 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  が Cauchy 列になることをみる。

**命題 3.1** (比較判定法).

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $\forall n \in \mathbb{N}$  に対して  $0 \leq a_n \leq b_n$  をみたすとする. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \text{収束} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \text{収束}$$

が成り立つ.

**注意.**

$0 \leq a_n$  は必要な条件である.  $a_n = -2^n, b_n = 0$  とおけば,  $a_n \leq b_n$  であり,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  が収束するが,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は発散する.

**定理 3.2** (積分判定法).

関数  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は  $f \geq 0$  かつ単調減少とする. このとき, 次は同値:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  が収束する.
- (2) 広義積分

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx$$

が収束する.

**例 3.2** (ゼータ関数).

$s > 1$  に対して  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  は収束する. なぜならば,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \left[ \frac{1}{-s+1} x^{-s+1} \right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{s-1} < \infty$$

だからである. そこで

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と定める.  $\zeta$  をゼータ関数という.

**注意.**

ゼータ関数は素数の分布に関係しており, 整数論において非常に重要な関数である. クレイ研究所の 100 万ドル問題の一つである Riemann 予想はこのゼータ関数に関することである. ゼータ関数は自然な方法で複素平面  $\mathbb{C}$  に拡張できるが, この拡張したゼータ関数の零点がどこにあるかという問題である. Riemann がこの予想を発表したのが 1859 年

であるが、およそ 150 年たった今でも解決されていない。数学科に入学したコネタとして、知っておくとよいだろう。

3.2. 交代級数・正項級数. この節ではより特別な級数に関する収束性を調べる.

**定義 3.2** (交代級数・正項級数).

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $a_n > 0$  をみたすとする. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

を正項級数という. また,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

を交代級数という.

交代級数は収束に関する簡単な十分条件がある. それが, 次の Leibniz の判定法である.

**定理 3.3** (Leibniz の判定法).

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は単調減少で,  $a_n > 0$  かつ  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) をみたすとする. このとき交代級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

は収束する.

**例 3.3.**

$p > 0$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

は収束する.

次に, 正項級数が収束, 発散するための十分条件を与える.

**定理 3.4** (d'Alembert の判定法).

正項級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

が存在するとする.

(1)  $0 \leq r < 1$  のとき, 正項級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束する.

(2)  $1 < r < \infty$  のとき, 正項級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は発散する.

**定理 3.5** (Cauchy の判定法).

正項級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} = r$$

が存在するとする.

(1)  $0 \leq r < 1$  のとき, 正項級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束する.

(2)  $1 < r < \infty$  のとき, 正項級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は発散する.

3.3. 絶対収束・条件収束.  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  とおくと, 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は Leibniz の判定法 (定理 3.3) により収束するので,

$$(3.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots =: A$$

とおく. この両辺に  $\frac{1}{2}$  をかけると

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \dots = \frac{A}{2}$$

となるが, 0 を加えても収束や和はかわらないから

$$(3.2) \quad 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{14} + 0 - \dots = \frac{A}{2}$$

となる. そこで, (3.1) に (3.2) を加えると

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2}A$$

となる. 従って

$$a_1 + a_3 + a_2 + a_5 + a_7 + a_4 + a_9 + a_{11} + a_6 + \dots = \frac{3}{2}A$$

となり, 並べ替えをすると, 級数の値が変わることがわかる. そこで, どのような条件のもとで, 並べ替えに対して級数の値が変わらないかを考える.

**定義 3.3.**

級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が絶対収束するとは  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  が収束することをいう. 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が条件収束するとは  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束するが,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  が発散することをいう.

**例 3.4.**

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$  は絶対収束する. しかし,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  は条件収束するが絶対収束しない. また, 収束する正項級数は絶対収束する.

**定理 3.6.**

級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が絶対収束するとき,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束する.

**問題 3.1.**

次を示せ.

- (1) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $|a_n| < b_n$  をみたし,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  が収束するとき,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は絶対収束する.
- (2) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

をみたせば,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は絶対収束する.

**例 3.5.**

- $p > 0$  に対して, 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$  は,  $p > 1$  のとき絶対収束し,  $0 < p \leq 1$  のとき条件収束する.
- 任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  は絶対収束する.

**定理 3.7** (絶対収束, 条件収束の特徴付け).

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$$

とおく. このとき

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

であり, 次が成り立つ:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が絶対収束するための必要十分条件は  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  がともに収束することである. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

が成り立つ.

- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が条件収束するための必要十分条件は  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束して,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  がともに発散することである.



**定理 3.8** (並べ替えの一意性).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が絶対収束するとき、項の順序をどのように変えても、同じ値に収束する。すなわち、 $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を全単射とするとときに

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が成り立つ。

**注意.**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が絶対収束するとき、任意の  $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  に対して、全単射写像  $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が存在して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} = A$$

とできる。すなわち、項の順序をうまく並べ変えて、任意の値に収束させることができる。とくに、項の順序を変えると、収束しないことや、もとの級数とは違う値に収束することがある。

**3.4. Cauchy 積 (合成積).** 二つの級数の自然な積を定義する。ただ、一見すると自然とは思えないかもしれない。しかし、もう少しいろいろな分野を勉強すると、この定義が自然であることがみてとれると思う。

**定義 3.4** (Cauchy 積, 合成積).

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して、 $c_n$  を

$$c_n := \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

で定める (数列  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  を数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  の合成積という)。このとき、級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  の Cauchy 積  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  を

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k+l=n} a_k b_l \right)$$

で定義する。

**定理 3.9.**

級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  が絶対収束するとき、Cauchy 積  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  も絶対収束して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

が成り立つ.

注意 (級数に対する Hausdorff-Young の不等式).

一般に  $p, q, r \geq 1$  が  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$  をみたすときに

$$(3.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^r \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ. (3.3) を (級数に対する) Hausdorff-Young の不等式という. 定理 3.9 は  $p = q = r = 1$  のときを述べており, さらに, 等号が成立することも述べている.

例 3.6.

$x, y \in \mathbb{R}$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right)$$

が成り立つ. これは,  $e^{x+y} = e^x e^y$  であることを示している (あとで示す).

#### 4. 関数列の収束

この節では  $I \subset \mathbb{R}$  は常に区間とする (开区間, 閉区間でも半开区間などでもよい).

定義 4.1 (関数列).

$n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  とするとき,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $I$  上の関数列という.

例 4.1.

$I = (0, \infty)$  とする.  $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in (0, \infty) = I$$

で定めると,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $(0, \infty)$  上の関数列になる. このとき  $n \rightarrow \infty$  としたとき

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \infty & x > 1 \end{cases}$$

がわかる.

4.1. 各点収束と一様収束. 関数列に対して, 収束の概念が定義できる. しかし, 関数列の場合は, 数列とは異なり, 収束の概念がいろいろ定められる. 本稿では, そのなかでも素朴に考えることのできる各点収束と, 連続関数の枠組みにおいて重要となる一様収束の概念を説明する. ただし, この一様収束の概念は初学者にはとても厄介で, 理解しがたいもののように思われる. そこで, 先に, この節の内容について, 重要な注意を与えておく.

- 一様収束を示すことは一般にとっても大変!!だからこそ, 積分論の拡張である Lebesgue 積分が重要になる. 実際に, Lebesgue 積分を使えば, 一様収束を示さなくても事が足りることがたくさんある.

- 一様収束の概念は 19 世紀末から 20 世紀初頭の大天才達が、連続と極限に関して深く考えた末に導出したものだから、簡単に理解できるものではないのだというくらい感覚があってよい。ただし、後に説明する積分と極限の交換定理の証明をよく考えると、一様収束の概念がある意味、自然に思えてくるだろうと思う。

**定義 4.2** (各点収束).

$I$  上の関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  に各点収束するとは任意の  $x \in I$  に対して

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことをいう。このとき、 $f$  を  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  の極限関数といい、 $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  と書くことがある。また、各点収束であることを強調して

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in I \text{ (各点)}$$

と書いたりする。

**注意 4.1.**

定義 4.2 を  $\varepsilon$ - $N$  論法で述べると

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となる。  $N$  が  $\varepsilon$  のみでなく、  $x$  に依存して決まることに注意すること。

**例 4.2.**

(1) (1.1) を参考にして

$$f_0(x) = a_0, \quad f_1(x) = a_0 + a_1x, \quad f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad f_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \dots$$

と定めることで関数列が定められる。この関数列の極限関数が (あとで説明するが) Taylor 展開の正体である。

(2)  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} < x < \infty \end{cases}$$

で定める。各  $f_n$  は連続である。  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は Heaviside 関数に各点収束する。

**問題 4.1.**

例 4.2 の (2) で定めた  $f_n$  が Heaviside 関数に各点収束することを示せ。  $f_n$  は  $x_0 = 0$  で連続だが極限関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $x_0 = 0$  で連続でない。

**例 4.3.**

例 4.1 を参考に  $I = [0, 1]$  として、  $x \in [0, 1]$  に対して

$$f_n(x) := x^n$$

で  $[0, 1]$  上の関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  を定める。このとき、

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

がわかる.  $\varepsilon$ - $N$  論法で, 任意の  $x \in (0, 1)$  と  $\varepsilon > 0$  に依存する  $N = N_{\varepsilon, x} > 0$  を求めてみよう ( $[0, 1]$  でなくて  $(0, 1)$  であること, とくに  $x \neq 1$  であることに注意).  $|f_N(x)| < \varepsilon$  となる  $N$  を求めてみると

$$x^N < \varepsilon \iff N \log x < \log \varepsilon \iff N > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

がわかるから,  $N > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$  となる  $N \in \mathbb{N}$  をとれば,  $n \geq N$  ならば

$$|f_n(x)| \leq x^N < \varepsilon$$

がわかる. ここで,  $N$  は  $x$  に依存して決まることと,  $x$  を 1 に近づけると, それに応じて  $N$  も大きくとらなければいけないことに注意しよう.

**例 4.4.**

$I = [0, 1]$  として,  $x \in [0, 1]$  に対して

$$f_n(x) := x^n(1-x)^n$$

で  $[0, 1]$  上の関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  を定める. このとき,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

がわかる. 例 4.3 と同じように,  $\varepsilon$ - $N$  論法で, 任意の  $x \in (0, 1)$  と  $\varepsilon > 0$  に依存する  $N = N_{\varepsilon, x} > 0$  を求めてみよう.  $|f_N(x)| < \varepsilon$  となる  $N$  を求めてみると

$$x^N(1-x)^N < \varepsilon \iff N \log x(1-x) < \log \varepsilon \iff N > \frac{\log \varepsilon}{\log x(1-x)}$$

がわかるから,  $N > \frac{\log \varepsilon}{\log x(1-x)}$  となる  $N \in \mathbb{N}$  をとれば,  $n \geq N$  ならば

$$|f_n(x)| \leq x^N(1-x)^N < \varepsilon$$

がわかる. ところで,  $x \in [0, 1]$  のとき,  $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$  がわかるから  $N_0 \geq \frac{\log \varepsilon}{\log \frac{1}{4}}$  ととると

$$N_0 \geq \frac{\log \varepsilon}{\log \frac{1}{4}} > \frac{\log \varepsilon}{\log x(1-x)}$$

となることに注意しよう. 従って  $N_0$  は  $x$  に依らずに決まり, さらに

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_{N_0}(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{N_0} < \varepsilon$$

もわかる.

このことから, 次の定義が得られる.

**定義 4.3** (一様収束).

$I$  上の関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  に一様収束するとは

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことをいう. このとき, 一様収束であることを強調して

$$f_n \rightarrow f, \quad (n \rightarrow \infty) \quad I \text{ 上一様}$$

と書いたりする.

**注意 4.2.**

定義 4.3 を  $\varepsilon$ - $N$  論法で述べると

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となるが,  $x \in I$  に対して  $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$  だから

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in I, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

と書くこともできる. とにかく,  $N$  が  $x$  に依存せずにとれることが重要である.

**命題 4.1.**

$I$  上の関数列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  に一様収束するとき,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $f$  に各点収束する.

つまり, 一様収束性は各点収束性より強い収束の概念である. だから, 具体的な関数列が一様収束するか否かを調べるためには, まず関数列が各点収束することを示して極限関数を調べておいて, その極限関数に一様収束するかを調べるのが, わかりやすい方法である.

**例 4.5.**

例 4.3 の関数列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が  $(0, 1)$  上で一様収束しないことを確かめよう.  $(0, 1)$  上では

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

であった. このとき, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,1)} x^n = 1$$

となるから,  $n \rightarrow \infty$  としたときに,  $\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)|$  は 0 に収束しない. したがって,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $f$  に一様収束しない.

**例 4.6.**

例 4.4 の関数列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が  $(0, 1)$  上で一様収束することを確かめよう.  $(0, 1)$  上では

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(1-x)^n = 0$$

であった. このとき, 任意の  $x \in (0, 1)$  に対して

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n(1-x)^n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

となるから,  $x \in (0, 1)$  に関して上限をとれば

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

がわかる.  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$  は  $n \rightarrow \infty$  としたときに 0 に収束するから,  $\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)|$  も  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束する (はさみうちの原理). このように,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が一様収束することを示すときには,  $|f_n(x) - f(x)|$  を不等式で上から評価して,  $x$  に依存せずに 0 に収束する数列をみつければよい.

さて, 実数列が収束する必要十分条件は, 数列が Cauchy 列であることであった. 同様の事実が, 一様収束についても成り立つ.

**定理 4.1** (Cauchy の判定条件).

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$  を  $I$  上の関数列とする. このとき, 次は同値である:

- (1)  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  がある  $I$  上の関数  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  に一様収束する.
- (2)  $\forall \varepsilon > 0$  に対して,  $\varepsilon$  に依存するある  $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  が存在して,  $\forall n, m \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n, m \geq N \implies \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

考え方 ( $\implies$ ) は収束数列が Cauchy 列になることの証明と同様に考える. ( $\impliedby$ ) は極限関数が存在することを,  $\mathbb{R}$  の完備性 (Cauchy 数列は収束する) を使う.

4.2. 極限に関する交換.  $I$  上の連続な関数列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  に各点収束したとしても, 極限関数は連続とは限らない (例 4.2 を参照). つまり, 極限関数が連続になるためには, 各点収束では不十分だということである. そこで, 極限関数が連続となるための条件を与えよう.

**定理 4.2** (極限と連続の交換).

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$  を  $I$  上の連続な関数列とする (これを  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C(I)$  と書く). このとき,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  に一様収束するならば,  $f$  は  $I$  上連続である.

考え方 十分大きな  $N \in \mathbb{N}$  と  $x, x_0 \in I$  に対して

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$$

を用いて, 右辺を評価すればよい.

**注意.**

$I \subset \mathbb{R}$  を区間としたときに

$$C(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{連続}\}$$

に距離

$$d(f, g) := \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C(I)$$

を定めることができる. 定理 4.1 と定理 4.2 は, この距離に関して  $C(I)$  は完備になることを主張している. この事実は関数解析学における重要な具体例であり, 微分積分学, 線形代数学, 位相空間論のつながりを再認識することになるだろう.

次に積分と極限の交換についてみてみよう. 結論をあらわすべくいうと, 各点収束では極限と積分は交換できないことがあるが, 一様収束であれば, 極限と積分は交換できる.

**定理 4.3** (極限と積分の交換).

$I = [a, b]$  は有界,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $I$  上の連続な関数列,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  とする. このとき,  $f_n$  が  $f$  に  $I$  上一様収束すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

が成り立つ.

考え方 示すべきことは

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

だから, この絶対値を評価すればよい.

#### 問題 4.2.

$n \in \mathbb{N}$  に対して,  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f_n(x) := \begin{cases} n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

で定めたとき,

- (1)  $0 < x \leq 1$  に対して,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は各点収束し,  $f_n(x) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を示せ. このことから, 極限関数は  $[0, 1]$  上で積分すると 0 になることがわかる.
- (2) 極限と積分が交換できないこと, すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq 0$$

を示せ.

#### 問題 4.3 (やや難).

$I = [a, b]$  を有界な閉区間とし,  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $I$  上連続な関数列とし,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  に一様収束するとする.  $x_0 \in I$  を一つ固定し,  $x \in I$  に対して,

$$F_n(x) := \int_{x_0}^x f_n(x) dx, \quad F(x) := \int_{x_0}^x f(x) dx$$

と定める (定理 4.2 より,  $F$  は  $I$  上 well-defined である). このとき,

$$F_n \rightarrow F \quad (n \rightarrow \infty) \quad I \text{ 上一様}$$

を示せ.

極限と微分の交換はより気をつけないといけない.

#### 例 4.7.

$n \in \mathbb{N}$  に対して,  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{nx^2}{2} & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ x - \frac{1}{2n} & (\frac{1}{n} < x) \end{cases}$$

とおくことで、関数列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  を定める。このとき、 $n \in \mathbb{N}$  に対して  $f_n$  は  $C^1$  級であり、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x) \end{cases}$$

と定めたときに、 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $f$  に一様収束する。しかし、関数  $f$  は微分可能ではない。つまり、微分可能な関数列が一様収束しても、極限関数が微分可能になるとは限らない。

では、どのような条件の下で、微分と極限が交換できるかを考える。

**定理 4.4** (極限と微分の交換).

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $I$  上の  $C^1$  級関数列とし、 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、

$$\begin{aligned} f_n &\rightarrow f \quad (n \rightarrow \infty) \text{ } I \text{ 上一様} \\ \frac{df_n}{dx} &\rightarrow g \quad (n \rightarrow \infty) \text{ } I \text{ 上一様} \end{aligned}$$

を仮定する。このとき、 $f$  は  $C^1$  級となり、極限と微分が交換できる。すなわち

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n}{dx} = g$$

が成り立つ。

**注意 4.3.**

定理 4.4 で  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  の一様収束性は各点収束性におきかえても成り立つ。さらに、ある  $x_0 \in I$  と  $a \in \mathbb{R}$  が存在して、

$$f_n(x_0) \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

におきかえることもできる。すなわち、ある一点において収束していれば十分である。もちろん、 $\left\{ \frac{df_n}{dx} \right\}_{n=1}^\infty$  の一様収束性ははずすことができない。

**注意** (関数解析学を知っている人向け).

例 4.7 は、微分は一様連続位相に関して連続にならないことを主張している。それに対して定理 4.4 は、微分が一様収束位相に関して閉作用素になっていることを主張している。つまり、閉作用素は極限と微分の交換が動機になっている。

## 5. 関数項級数と巾級数

5.1. 関数項級数. この節では  $I \subset \mathbb{R}$  は常に区間とし (开区間, 閉区間でも半开区間などもよい),  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $I$  上の関数列とする。

**定義 5.1** (関数項級数).

$N \in \mathbb{N}$ ,  $x \in I$  に対し、 $S_N: I \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$S_N(x) := \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

で定める。  $I$  上の関数列  $\{S_N\}_{N=1}^\infty$  が  $I$  上各点収束するとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N(x)$$



とおき、関数項級数という。さらに、関数列  $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$  が  $I$  上一様収束するとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  は  $I$  上一様収束するという。

巾級数は、関数項級数の最もわかりやすい具体例である。巾級数の性質については、あとで詳しく述べる。

**例 5.1** (Fourier 級数).

$[-1, 1)$  上の関数列  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  を  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  と  $x \in [-1, 1)$  に対して

$$f_n(x) := a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

により定義する。ただし、 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  とする。このとき、 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  から決まる関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

を Fourier 級数という。Fourier はこの Fourier 級数を用いて熱方程式の解表示を与え、すべての関数は Fourier 級数で表示できると予想した。この Fourier の予想は正しくはないが、かなり多くの関数が Fourier 級数で表示できる、すなわち、 $f: [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  をうまく選べば

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

と書けることが知られている。ちなみに  $\cos$  は偶関数で  $\sin$  は奇関数であるが、任意の関数はこのように偶関数と奇関数の和で書くことができる。実際

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

に注意すればよい。

Fourier の予想は正しくはなかったが、この予想が契機となって、解析学、とくに無限を厳密に取り扱う考え方が発展したと考えられている。さらに、 $a_n, b_n$  の決め方を考えることで無限次元の計量線形空間の研究が発展し、 $a_n, b_n$  の重要性から Fourier 解析、実解析が発展した。

**注意.**

正確に書くなら、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  は  $I$  上一様収束すると書くのが正しいが、慣習上、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  は  $I$  上一様収束すると書くことが多い。

$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$  の一様収束性がわかれば、級数と微分、積分の交換が可能になる。定理 4.2, 4.3, 4.4 を級数の言葉で述べよう。

**定理 5.1** (関数項級数の連続性).

$\forall n \in \mathbb{N}$  に対して、 $f_n$  は  $I$  上連続とし、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  は  $I$  上一様収束するとする。このとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  は  $I$  上連続となる。

**定理 5.2** (級数と積分の交換).

$I = [a, b]$  は有界とする.  $\forall n \in \mathbb{N}$  に対して,  $f_n$  は  $I$  上連続とし,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  は  $I$  上一様収束するとする. このとき,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

が成り立つ.

**定理 5.3** (級数と積分の交換).

$\forall n \in \mathbb{N}$  に対して,  $f_n$  は  $I$  上  $C^1$  級とし,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$  は  $I$  上一様収束するとする. このとき,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  は  $C^1$  級で

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

が成り立つ.

一様収束性の証明は一般に大変であった. しかし, 級数については, 比較的使いやすい判定法がある.

**定理 5.4** (Weierstrass の優級数判定法).

$\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  が存在して,  $\forall n \in \mathbb{N}$  と  $\forall x \in I$  に対して  $|f_n(x)| \leq M_n$  かつ  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$  を仮定する. このとき,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  は  $I$  上一様収束する.

考え方 定理 4.1 より, 級数の収束に関する Cauchy の判定条件 (定理 3.1) と同様の証明で, 関数項級数の一様収束に関する Cauchy の判定条件を示せる. 優級数を用いて, Cauchy の判定条件をみたすことを示せばよい.

5.2. 巾級数. 関数項級数で最も重要なものは  $f_n(x) = a_n x^n$  の形をしたものである. 以下, これらの級数についてのみ考察していく.

**定義 5.2** (整級数, 巾級数).

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  の形の関数項級数を,  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  を係数とする  $x = a$  中心の整級数, あるいは巾級数という.

以下では, 話を簡単にするために,  $a = 0$  の場合について考えることにする.

補題 5.1 (Abel).

巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  が  $x = x_0$  で収束するならば,  $|x| < |x_0|$  をみたすすべての  $x \in \mathbb{R}$  に対して絶対収束する.

Abel の補題により,

$$(5.1) \quad R := \sup \left\{ \rho : |x| < \rho \text{ に対して } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は収束} \right\}$$

とおくと, 巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は

$$|x| < R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は絶対収束}, \quad |x| > R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は発散}$$

がわかる.

定義 5.3 (収束半径).

巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  に対し, (5.1) で定まる  $R \geq 0$  を巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  の収束半径という.

定理 5.5.

巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  に対し,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$  が存在すれば, 収束半径は  $R = \frac{1}{r}$  となる.

例 5.2.

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  に対しては, 収束半径は 1 である. 直接調べてもよいし, 定理 5.5 を使ってもよい.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  に対しては, 収束半径は  $\infty$  である. これは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

よりわかる.

定理 5.6.

巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  の収束半径を  $R > 0$  とする. このとき, 巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は任意の有界閉区間  $[a, b] \subset (-R, R)$  上一様収束する (このことを  $(-R, R)$  上広義一様収束するとかコンパクト一様収束するという). 特に,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は  $(-R, R)$  上連続である.

注意.

巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は  $|x| < R$  をみたす  $x$  について絶対収束する. このことから, 定理 5.6 は巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  が  $(-R, R)$  上広義一様絶対収束するという.

これにより, 収束半径の内側では, 微分や積分の交換が比較的自由にできる.

定理 5.7 (項別積分).

巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  の収束半径を  $R > 0$  とする. このとき, 任意の有界閉区間  $[a, b] \subset (-R, R)$  に対して

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b (a_n x^n) dx$$

が成り立つ. また,  $|x| < R$  に対して

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} y^{n+1} dy$$

が成り立つ.

定理 5.8 (項別微分).

巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  の収束半径を  $R > 0$  とする. このとき,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は  $(-R, R)$  上で微分可能であり,

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

が成り立つ. さらに, 項別微分してできる巾級数の収束半径も  $R$  である.

系 5.1.

巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  の収束半径を  $R > 0$  とすると,  $(-R, R)$  において, 無限回微分可能で項別微分ができる.

巾級数の収束半径の端点ではどうなるかは, 級数によりけりで一般には定まらない. だが, 収束半径の端点で収束すれば, 端点で連続であることが示される.

定理 5.9 (Abel の定理).

巾級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  の収束半径を  $R > 0$  とする. もし,  $x = R$  において, この巾級数が収束するならば,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は  $[0, R]$  上で一様収束し,  $[0, R]$  上連続になる. すなわち

$$\lim_{x \uparrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

が成り立つ.