解析学 A 演習問題 (2012 年 4 月 10 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 1.1.

$$e^{x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

とかけたとして, $a_0, \ldots, a_4$ を (形式的に) 求めよ.

問題 1.2.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := \frac{n}{n+1}$ と定めたとき,

$$a_n \to 1 \quad (n \to \infty)$$

となることを ε-N 論法を用いて示せ.

解析学 A 演習問題　(2012 年 4 月 17 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 2.1.

関数 $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$H(x) := \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \infty \\ 0 & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

で定めたときに, H は $x = 0$ で連続ではないことを示せ.

問題 2.2.

$r > 0$ に対して, $a_n := r^{n-1}$ によって数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める. このとき

$$0 < r < 1 \text{ のとき} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r},$$

$$1 \leq r < \infty \text{ のとき} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は発散}$$

を示せ.

解析学 A 演習問題 (2012 年 4 月 24 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 3.1.

数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $S \in \mathbb{R}$ が

$$S_{2m} \to S \quad (m \to \infty)$$
$$S_{2m+1} \to S \quad (m \to \infty)$$

をみたすときに, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して,

$$S_n \to S \quad (n \to \infty)$$

となることを示せ.

問題 3.2.

$p \in \mathbb{R}$, $a > 0$ に対して正項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p a^n = a + 2^p a^2 + 3^p a^3 + \cdots$$

は $0 < a < 1$ のとき収束し, $1 < a < \infty$ のとき発散することを示せ (ヒント: d'Alembert の判定法を用いよ).

解析学 A レポート問題　(2012 年 4 月 24 日)

問題 3.3 (Cauchy の判定法)**.**

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ を数列で, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq 0$ とする. 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = r$$

が存在するとする. 次を示せ (吹田・新保の教科書に証明があるが, それをうつしただけでは点数は与えない. きちんと自分の言葉でまとめなおすこと).

(1) $0 \leq r < 1$ のとき, 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $1 < r < \infty$ のとき, 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

問題 3.4.

交代級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

を求めてみよう.

(1) S_N を第 N 部分和, すなわち, $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ とおく. このとき, $\forall N \in \mathbb{N}$ に対して $S_{2N} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N+k}$ となることを示せ (ヒント: 例えば, $S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$ である. あとは類推してみよ).

(2) S_{2N} の極限を求めよ (ヒント: 区分求積法 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N+k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1+\frac{k}{N}}$ を考えよ)

問題 3.5.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は和の順序をとりかえることで, どの値にも収束させることができることが知られている.

`http://ja.wikisource.org/wiki/`解析概論/第 4 章/収束の判定法 (条件収束)

を参考にして, 適当な並べかえによって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ がどの値にも収束できることを説明せよ (もちろん, web のリンク先を写しただけでは点数を与えない. きちんと自分の言葉でまとめなおすこと. なお他の微分積分の教科書にもこの話題を取り上げているものがあるから, 調べてみるとよい)

解析学 A 演習問題 (2012 年 5 月 8 日)

学籍番号 名前

問題 4.1.

次を示せ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $|a_n| < b_n$ をみたし, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ をみたせば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

問題 4.2 (講義ノートの定理 3.7)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$ とおく. 次を示せ.

(1) $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ が成り立つ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するための必要十分条件は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ がともに収束することである. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

が成り立つ.

解析学 A 演習問題　(2012 年 5 月 15 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 5.1.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ に対し, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ が収束するなら, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ は絶対収束することを示せ (ヒント:相加相乗平均の不等式を使う).

問題 5.2.

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は絶対収束することを示せ.

解析学A 演習問題　(2012年5月22日)

学籍番号　　　　　　　名前

問題 6.1.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} < x < \infty \end{cases}$$

で定める．このとき, $n = 1, 2, 3$ に対する f_n のグラフの概形を (一つの座標平面上に) 書き, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する極限関数を求めよ．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, f_n は連続関数だが極限関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続関数でないことを確かめよ．さらに例 4.3 にならって, $x > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して, ε-N 論法をみたす $N \in \mathbb{N}$ を評価してみよ.

解析学 A 演習問題 (2012 年 6 月 5 日)

問題 7.1.

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$
$$\cos x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots$$

とかけたとして, a_n, b_n を (形式的に) 求めよ.

問題 7.2.
次の級数の収束, 発散を調べよ.

(1) $s > 0$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

(2) $s > 0$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^s}$.

(3) $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{1\times 2}{3\times 5} + \frac{1\times 2\times 3}{3\times 5\times 7} + \frac{1\times 2\times 3\times 4}{3\times 5\times 7\times 9} + \cdots$ (ヒント: まず $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表示したときの a_n を求めよ).

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

問題 7.3.
$r > 0$ とするとき, 次の級数が収束するような r の範囲を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} r^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} r^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} r^{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} r^{2n+1}.$$

問題 7.4.
$x \in \mathbb{R}$ に対して, $a_n := x^{n-1}$ によって数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める. このとき

$$0 < |x| < 1 \text{ のとき} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-x}, \qquad 1 < |x| < \infty \text{ のとき} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は発散}$$

を示せ. 余裕があれば, $|x| = 1$ のときも考えよ.

問題 7.5.
$-1 < x < 1$ に対して,

$$\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

とかけたとして, a_n を (形式的に) 求めよ (ヒント: $\log(1+x)$ の微分を考えて, 問題 7.4 をうまく利用せよ).

問題 7.6.

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき, $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せ. 反例を挙げて, 逆が成立しない, すなわち, $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であっても, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らないことを示せ (発散する理由も述べること).

問題 7.7.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ を数列で, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq 0$ とする. 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

が存在するとする. 次を示せ.

(1) $0 \leq r < 1$ のとき, 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $1 < r < \infty$ のとき, 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

問題 7.8.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ を数列で, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq 0$ とする. 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = r$$

が存在するとする. 次を示せ.

(1) $0 \leq r < 1$ のとき, 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $1 < r < \infty$ のとき, 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

問題 7.9.

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ に対して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ が存在して $c > 0$ とする. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が収束} \underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{が収束}$$

を示せ.

問題 7.10 (やや難, わからなければ, $p = q = 2$ で示してみよ)**.**

$p, q > 1$ が $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすときに, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q$ が収束するなら, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ は絶対収束することを示せ (ヒント: $\log x$ が $x > 0$ 上で上に凸関数であることを使って, $a, b > 0$ に対して $\dfrac{1}{p}\log a + \dfrac{1}{q}\log b \leq \log\left(\dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q}\right)$ となることを用いよ).

解析学 A 演習問題　(2012 年 6 月 12 日)

学籍番号　　　　　　　名前

問題 8.1.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0) \\ nx & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 1 & (\frac{1}{n} < x < \infty) \end{cases}$$

で定める．このとき, $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様収束しないことを定義に基づいて示せ (ヒント: まず何を示せばよいかを明らかにせよ).

解析学 A 演習問題　(2012 年 6 月 19 日)

学籍番号　　　　　　　名前

問題 9.1.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (-1 < x < 0) \\ nx & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 1 & (\frac{1}{n} < x \leq 1) \end{cases}$$

で定める. $f := \lim_{n \to \infty} f_n$ とおくとき, 次を示せ.

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx \to \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

問題 9.2.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $[0, 1]$ 上の連続な関数列で $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ に一様収束するとする. $x \in [0, 1]$ に対して,

$$F_n(x) := \int_0^x f_n(y)\, dy, \quad F(x) := \int_0^x f(y)\, dy$$

と定める (講義ノート 定理 4.2 より, F は $[0, 1]$ 上 well-defined である). このとき, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0, 1]$ 上一様に F に収束することを示せ.

解析学 A 演習問題 (2012 年 6 月 26 日)

学籍番号　　　　　　　　名前

問題 10.1.

$p > 1$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n^p}$ が $(-\infty, \infty)$ 上一様収束することを示せ.

問題 10.2.

$0 < r < 1$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(2\pi nx)$ が $(-\infty, \infty)$ 上一様収束することを示せ.

解析学 A 演習問題　(2012 年 7 月 3 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 11.1.

巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ の収束半径を求めよ．さらに

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

と定義すると, $\displaystyle\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\displaystyle\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ となることを確かめよ.

問題 11.2.

巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ の収束半径を求めよ． $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ の和を求め, 両辺積分することで,

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

が成り立つ x の範囲を求めよ.

解析学 A 演習問題　(2012 年 7 月 9 日)

学籍番号　　　　　　　名前

問題 12.1 (二項定理)**.**
$\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$ {}_\alpha C_n := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad {}_\alpha C_0 := 1 $$

と定義する.

(1) $\alpha \in \mathbb{N}$ のとき, $n > \alpha$ ならば ${}_\alpha C_n = 0$ を示せ.

(2) $\displaystyle \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha \bigg|_{x=0} = {}_\alpha C_n$ を示せ. ここで, 左辺は $(1+x)^\alpha$ を n 回 x 変数で微分したあとに $x=0$ を代入するという意味である.

(3) $\displaystyle \sum_{n=0}^\infty {}_\alpha C_n x^n$ の収束半径を求め, $\displaystyle (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty {}_\alpha C_n x^n$ が成り立つ x の範囲を与えよ.

問題 12.2.
問題 11.2 の結果に Abel の定理を用いて次の等式を示せ:

$$ \log 2 = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots. $$

解析学 A 定期試験問題

平成 24 年 7 月 24 日 第 3 時限施行　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず

問題 1.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することの定義を述べよ.

(2) $r > 0$ とする. 定義に従って, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ を求めよ.

(3) $0 < r < 1$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \cos(2\pi n)$ は絶対収束することを示せ.

問題 2.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $[0,1]$ 上の関数列, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を関数とする.

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に $[0,1]$ 上で一様収束することの定義を述べよ.

(2) $n \in \mathbb{N}$ と $x \in [0,1]$ に対して,

$$f_n(x) := x^n(1-x)^n, \qquad f(x) := 0$$

と定義する. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に $[0,1]$ 上で一様収束することを示せ.

(3) $n \in \mathbb{N}$ と $x \in [0,1]$ に対して, $[0,1]$ 上の関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$g_n(x) := \begin{cases} n^2 x & (0 \le x \le \frac{1}{2n}) \\ -n^2 x + n & (\frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n}) \\ 0 & (\frac{1}{n} < x \le 1) \end{cases}$$

と定義する. このとき, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (2) で定義した f に各点収束することと

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx \not\to \int_0^1 f(x)\,dx \quad (n \to \infty)$$

を示せ.

問題 3.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x^1 + x^2 - x^3 + \cdots$ の収束半径を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ を求めて両辺を項別積分することによって, $\log(x+1)$ の $x = 0$ を中心とする Taylor 展開を求めよ. とくに Taylor 展開がなりたつ x の範囲を明らかにせよ.

(3) Abel の定理を用いて次の等式を示せ:

$$\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$