7.1

問題を(代数(群)で)いいかえると

$\{ z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \} = \langle \alpha \rangle$ ← αを生成元とする巡回群(ただし演算はかけ算とする)

となる$\alpha \in \mathbb{C}$をみつけよということ。よって示すことは

(i) $\alpha \in \mathbb{C}$は何か?

(ii) αの位数はnか?(nでないと、解のすべてをかきあらわすことができない)

(iii) $k = 1, 2, \ldots, n-1$に対し$(\alpha^k)^n = 1$か?

である。$\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$としてみよ。

7.4

$z_n = x_n + i y_n \in \mathbb{C}$とかくと、$n, m \in \mathbb{N}$に対し

$$|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m|, \quad |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$$

だから$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$は$\mathbb{R}$上のCauchy列。

よって$\mathbb{R}$は完備だから収束するので

$$x_n \to x, \quad y_n \to y \quad (n \to \infty)$$

とかくと$z_n \to x + iy \quad (n \to \infty)$がわかる(定理1.2)

7.5

$F \subset \mathbb{C}$ が closed $\Longleftrightarrow$ $F^c = \mathbb{C} \setminus F$ が open

を示す

($\Longrightarrow$) 背理法で示す.

$$\exists z \in F^c \text{ s.t. } \forall \varepsilon > 0.\ U_\varepsilon(z) \not\subset F^c$$

ならば. $U_\varepsilon(z) \cap F \neq \phi$ となる (各自たしかめよ)

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し. $z_n \in U_{\frac{1}{n}}(z) \cap F$ とできるから

この数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ を考えると.

$|z_n - z| < \frac{1}{n}$ より $z_n \to z$ $(n \to \infty)$

F: closed より $z \in F$ となり $z \in F^c$ に矛盾.

($\Longleftarrow$) 背理法で示す

$\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ s.t. $z_n \to z$ $(n \to \infty)$ かつ $z \in F^c$

とすると. F^c は open だから $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U_\varepsilon(z) \subset F^c$.

他方 $z_n \to z$ $(n \to \infty)$ だから $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$n \geq N \Longrightarrow |z_n - z| < \varepsilon \text{ i.e. } z_n \in U_\varepsilon(z)$$

とできる. よって $z_n \in U_\varepsilon(z) \subset F^c$ となり.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ に矛盾する

7.7

$$\frac{g\circ f(z) - g\circ f(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

だから $z \to z_0$ とすると f が D 上正則より

$f(z) \longrightarrow f(z_0)$ $(z \to z_0)$ となることに注意すると

$$\frac{g\circ f(z) - g\circ f(z_0)}{z - z_0} \longrightarrow g'(f(z_0))\, f'(z_0) \quad (z \to z_0)$$

を得る.