§0 イントロダクション

$x^2+1=0$ は実数解 $x\in\mathbb{R}$ を持たない.

G. Cardano (16c) $\sqrt{-1}$ が $x^2+1=0$ の解とする!

$$\mathbb{C} := \{a+b\sqrt{-1} : a, b\in\mathbb{R}\}$$

〈Gauss の定理, 代数学の基本定理 (19c)〉

$a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n=0$ は $\mathbb{C}$ 内に.
重複をこめて n 個の解を持つ.

◎ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ にしたら
微積分はどうなるだろうか?

▨ 代数学の基本定理は微積分で証明できる.

▨ $\mathbb{C}$ は不等式が使えない ($z, w\in\mathbb{C}$ に対し $z\leq w$ の意味はない.)

▨ $\mathbb{C}$ をよく知りたければ $\mathbb{C}$ 上の関数をよく調べる必要がある.

〈オーバービュー〉

◎ $\mathbb{C}$ の位相, 連続関数 (距離)

◎ 複素関数の微積分

◎ exp, sin, cos を $\mathbb{C}$ 上でみるとどうなるか?

§1 複素数とGauss平面

§§1.1 複素数

$x, y \in \mathbb{R}$ と虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ により作られた数

$z = x + iy$ を**複素数**という. ここで i は $i^2 = -1$

をみたす. また

$$\mathrm{Re}\, z := x \quad (\text{実部という}), \quad \mathrm{Im}\, z := y \quad (\text{虚部という})$$

とかく. $\mathrm{Re}\, z = 0$, i.e. $z = iy$ とかけるとき z を**純虚数**

という. 複素数全体を $\mathbb{C}$, すなわち

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

とかく.

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$z_1 = z_2 \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 = y_2$$

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 := (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

(ただし $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$)

㊟ i を文字と思って計算して. $i^2 = -1$ でおきかえればよい.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対し

$$\bar{z} := \mathrm{Re}\, z - i\,\mathrm{Im}\, z = x - iy.$$

とおく. $\bar{z}$ を z の共役複素数 という.

例1.1

i) $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} + i + \frac{i^2}{2} = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i$$

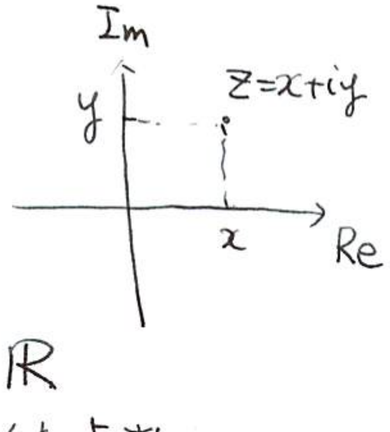
ii) $a^2 + b^2 \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-(bi)^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

iii) $z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対し.

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \geq 0.$$
$$z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z$$
$$z - \bar{z} = (x+iy) - (x-iy) = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\, z.$$

§§1.2 Gauss 平面



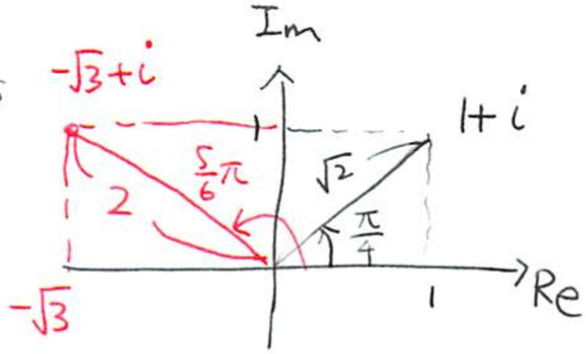
$z = x + iy \in \mathbb{C}$ は (x, y) 平面の点 として書くことができる. この平面を Gauss平面 とか 複素平面 という.

横軸(Re)は $(x, 0)$. i.e $x + i0 \in \mathbb{R}$

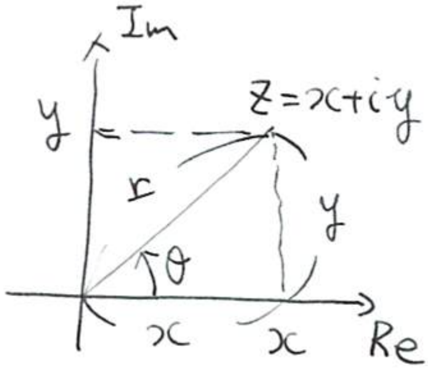
縦軸(Im)は $(0, y)$, i.e. $0 + iy$: 純虚数

横軸を実軸, 縦軸を虚軸 という.

例 1.2　$1+i$, $-\sqrt{3}+i$ を Gauss 平面に書く.



$z=x+iy\in\mathbb{C}$ を極座標 (r,θ) でかくと



$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\arctan\frac{y}{x}$$

となる. ただし, θ は一通りに定まらない ($\pm2\pi$, $\pm4\pi$ してもかわらない) のでことわりのない限り $-\pi<\theta\leq\pi$ に制限する.

r を z の**絶対値**, θ を**偏角**といい

$$|z|:=r,\quad \arg z:=\theta$$

とかく. このとき

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

となる. この右辺を z の**極形式**という.

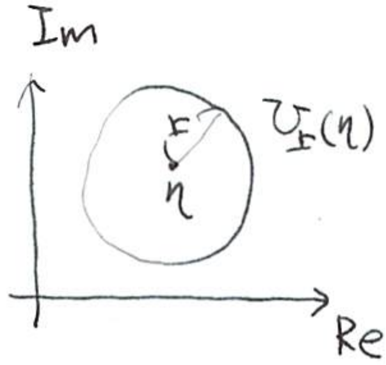
例 1.3　例 1.2 を参考にすると

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

例1.4 $r>0,\ \eta\in\mathbb{C}$ に対し

$$U_r(\eta) := \{z\in\mathbb{C} : |z-\eta| < r\}$$



とおく. $z=x+iy$, $\eta=a+ib$ と

おくと

$$|z-\eta|^2 = |x-a|^2+|y-b|^2$$

より $|z-\eta|$ は Gauss平面上で z と η との距離.

よって $U_r(\eta)$ は η 中心. 半径 r の開円板を表す.

〈Gauss平面と積〉

$z_1, z_2\in\mathbb{C}$ に対し. z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$ を Gauss平面に図示する.

簡単のため $|z_1|=|z_2|=1$ とし. 極形式

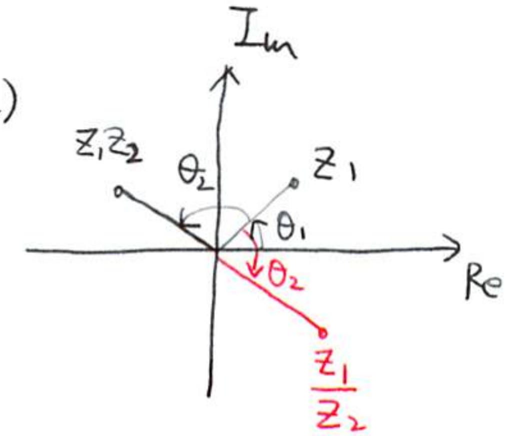
$z_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1$, $z_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2$ とする.

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= (\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\
&= \cos\theta_1\cos\theta_2+i\cos\theta_1\sin\theta_2\\
&\qquad +i\sin\theta_1\cos\theta_2+i^2\sin\theta_1\sin\theta_2\\
&= (\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2}_{=\cos(\theta_1+\theta_2)\ (\text{加法定理})})\\
&\qquad +i(\underbrace{\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2}_{=\sin(\theta_1+\theta_2)\ (\text{加法定理})})\\
&= \cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned}
$$

同様に

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

となる



定理1.1

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \in \mathbb{C}$ に対し.

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1 + z_2)$

i.e. $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

$z_2 \neq 0$ (とくに $r_2 \neq 0$) ならば

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

i.e. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

系1.1 (de Moivre の定理)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し.

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

§§1.3 複素数列の収束.

$z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$d(z,w) := |z-w|$$

とおくと. dは$\mathbb{C}$上の距離になる. すなわち.

- ① $d(z,w) \geq 0 \quad ({}^\forall z, w \in \mathbb{C})$
- ② $d(z,w) = 0 \iff z = w$.
- ③ $d(z,w) = d(w,z) \quad ({}^\forall z, w \in \mathbb{C})$
- ④ $d(z,w) \leq d(z,\eta) + d(\eta,w) \quad ({}^\forall z, w, \eta \in \mathbb{C})$

をみたす.

定義1.1 (収束)

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$: 複素数列, $z \in \mathbb{C}$.

$z = \lim_{n\to\infty} z_n$ または $z_n \to z \quad (n\to\infty)$

$$\underset{\text{定義}}{\iff} \quad |z_n - z| = d(z_n, z) \to 0 \quad (n\to\infty)$$

◎ $\mathbb{R}$ と違い. $\mathbb{C}$には不等式がないのではさみうちの定理はそのままでは使えない.

例1.5

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.

〈仮定〉

$$0 \leq |z_n - z| \leq |w_n - z| \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$$

$$w_n \to w \quad (n\to\infty)$$

〈結論〉

$$z_n \to z \quad (n\to\infty)$$

証明

$w_n \to z \quad (n\to\infty)$ より $|w_n - z| \to 0 \quad (n\to\infty)$

$0 \le |z_n - z| \le |w_n - z| \to 0 \quad (n\to\infty)$

だから $|z_n - z| \to 0 \quad (n\to\infty)$ となり

$z_n \to z \quad (n\to\infty)$ がわかる □.

$z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$ が

$z_n \to z \quad (n\to\infty)$ となるとき.

$0 \le |x_n - x| \le |z_n - z|$, $0 \le |y_n - y| \le |z_n - z|$ (問 2.3)

より $x_n \to x$, $y_n \to y \quad (n\to\infty)$ がわかる.

逆に $x_n \to x$, $y_n \to y \ (n\to\infty)$ が成り立つとき.

$0 \le |z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y|$ (問 2.3)

から $z_n \to z \quad (n\to\infty)$ がわかる.

定理 1.2

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$,

$$z_n \to z \quad (n\to\infty) \underset{\text{同値}}{\iff} \begin{matrix} \mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z_n \to \mathrm{Im}\, z_n \end{matrix} \quad (n\to\infty)$$

つまり $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$ とかいたとき.

$x_n \to x$, $y_n \to y \quad (n\to\infty)$.

定理1.3

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, $w = \lim_{n\to\infty} w_n$.

(1) $\lim_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$.

(2) $\lim_{n\to\infty} (z_n w_n) = zw$

(3) $z \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z}$.

の 定理1.2 を使わずに示すことができる.

証明　(2) だけ示す.

$$z_n w_n - zw = (z_n - z)(w_n - w) + w(z_n - z) + z(w_n - w)$$

より

$$\begin{aligned} |z_n w_n - zw| &= |(z_n - z)(w_n - w) + w(z_n - z) + z(w_n - w)| \\ &\leq |(z_n - z)(w_n - w)| + |w(z_n - z)| + |z(w_n - w)| \\ &= |z_n - z||w_n - w| + |w||z_n - z| + |z||w_n - w| \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

三角不等式

定理1.1

□.

定理1.4 （$\mathbb{C}$の完備性）

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ に対し．

$\displaystyle\lim_{n,m\to\infty} |z_n - z_m| = 0 \Rightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する．

$\displaystyle\lim_{n,m\to\infty} |z_n - z_m| = 0$ は正確に述べると．

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が（距離空間 $\mathbb{C}$ 上の）Cauchy列 i.e.

${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し．${}^{\exists}N \in \mathbb{N}$ が存在して．${}^{\forall}n, m \in \mathbb{N}$ に対し．

$$n, m \geq N \Rightarrow d(z_n, z_m) = |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

§§1.4 Gauss平面の位相．

$d(z, w) = |z - w| \quad (z, w \in \mathbb{C})$ とおくと．

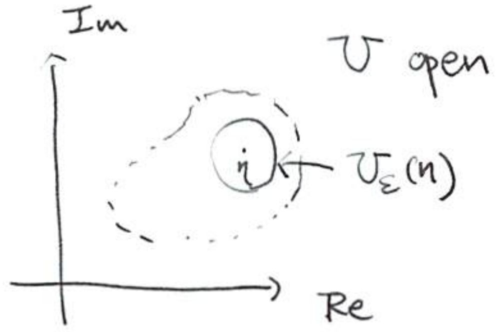
$(\mathbb{C}, d)$は距離空間になるので開集合や閉集合が定義できる．

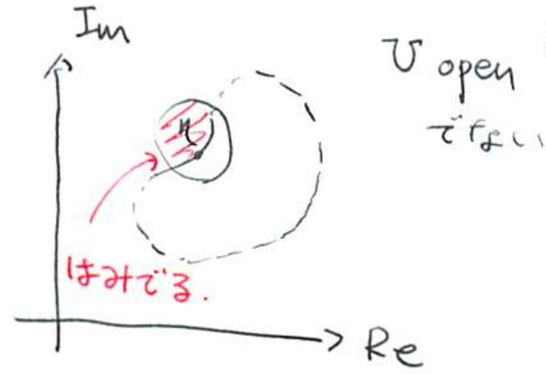
定義1.2 （開集合）

$U \subset \mathbb{C}$ が開集合 (open)

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ ${}^{\forall}\eta \in \mathbb{C}$ に対し ${}^{\exists}\varepsilon > 0$ が存在して

$$U_\varepsilon(\eta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \eta| < \varepsilon\} \subset U.$$



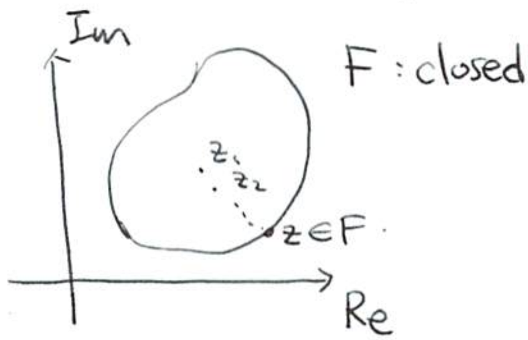


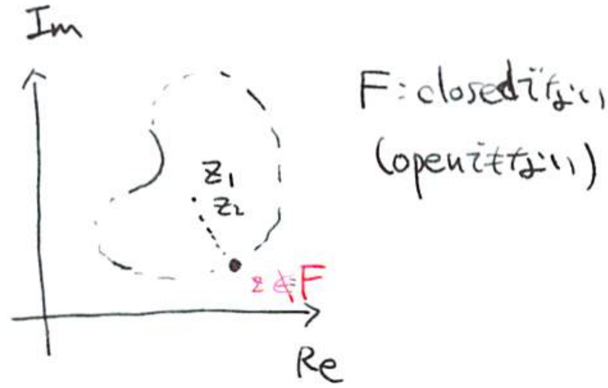
定義 1.3 (閉集合)

$F \subset \mathbb{C}$ が閉集合 (closed)

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$, $z \in \mathbb{C}$ が $z_n \to z$ $(n \to \infty)$

ならば $z \in F$.





注) 「開集合でない」は「閉集合」というわけではない.

日本語の対義語とは異なることに注意すること.

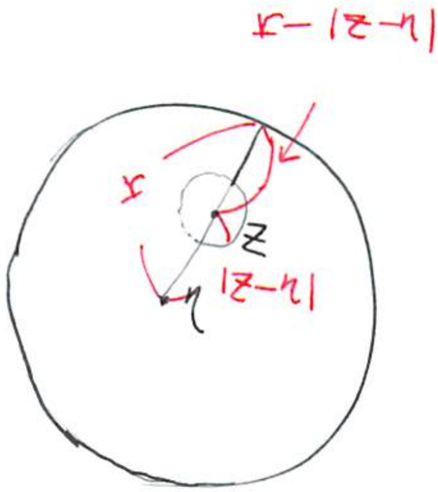
例 1.6

$r > 0$, $\eta \in \mathbb{C}$. $U_r(\eta) = \{z \in \mathbb{C} : |z-\eta| < r\}$ は開集合

$\overline{U_r}(\eta) := \{z \in \mathbb{C} : |z-\eta| \le r\}$ は閉集合

証明

〈$U_r(\eta)$が開集合であること〉



1. $^\forall z \in U_r(\eta)$に対し.

$|z-\eta| < r$ だから

$$\varepsilon = \frac{r - |z-\eta|}{2} > 0$$ とおく.

$U_\varepsilon(z) \subset U_r(\eta)$ を示せば

$U_r(\eta)$が開集合であることが示せる.

2. $U_\varepsilon(z) \subset U_r(\eta)$を示す. $^\forall w \in U_\varepsilon(z)$に対して.

$$|w-\eta| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{三角不等式}}}{\leq} |w-z| + |z-\eta| \underset{\substack{\uparrow \\ w \in U_\varepsilon(z),\ \varepsilon = \frac{r-|z-\eta|}{2}}}{<} \frac{r-|z-\eta|}{2} + |z-\eta|$$

$$= \frac{r+|z-\eta|}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ z \in U_r(\eta)}}{<} r$$

より $w \in U_r(\eta)$である. 従って$U_\varepsilon(z) \subset U_r(\eta)$ となる.

〈$\overline{U_r}(\eta)$が閉集合であること〉

$\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{U_r}(\eta)$が$z_n \to z \ (n\to\infty)$と仮定する.

このとき. $|z_n - \eta| \leq r \quad (^\forall n \in \mathbb{N})$. また.

$z_n - \eta \longrightarrow z - \eta \quad (n \to \infty)$ より

$|z_n - \eta| \longrightarrow |z-\eta| \quad (n\to\infty) \qquad$ (問3.2)

よって$|z-\eta| \leq r$ より $z \in \overline{U_r}(\eta)$ となり.

$\overline{U_r}(\eta)$が閉集合であることが示された. □

定理1.5

$F \subset \mathbb{C}$ が閉集合 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $F^c = \mathbb{C} \setminus F$ が開集合.

定義1.4（有界）

$A \subset \mathbb{C}$ が有界

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists M > 0$ が存在して. $|z| \leq M$ $(^\forall z \in A)$

定理1.6（Bolzano-Weierstrassの定理）

$K \subset \mathbb{C}$：有界閉集合, $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset K$

$\Longrightarrow$ $^\exists \{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{z_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して.

$\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ は収束部分列.

i.e. Kは点列コンパクト.

定理1.7（Heine-Borelの定理）

$K \subset \mathbb{C}$：有界閉集合, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$：$K$の開被覆

i.e. $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

$\Longrightarrow$ $^\exists \underbrace{U_1, \cdots, U_N}_{\text{有限個}} \in \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_n$

すなわち Kはコンパクト.

§2 連続関数

$D \subset \mathbb{C}$ は開集合とする

〈復習〉

$(a.b) \subset \mathbb{R}$, $f:(a.b) \to \mathbb{R}$.

f が $x_0 \in (a.b)$ で連続

$\iff$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a.b)$ が $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$

ならば $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n\to\infty)$.

$\iff$ ${}^\forall \varepsilon>0$ に対し. ${}^\exists \delta>0$ が存在して. ${}^\forall x\in(a.b)$ に対し

$$\underbrace{|x-x_0|}_{=d(x,x_0)} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(x_0)|}_{=d(f(x),f(x_0))} < \varepsilon.$$

どちらも $\mathbb{C}$ の言葉でかける.

<u>定義2.1</u> (連続)

$f:D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in \mathbb{C}$ で連続.

$\underset{定義}{\iff}$ $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ が $z_n \to z_0$ $(n\to\infty)$

ならば $f(z_n) \to f(z_0)$ $(n\to\infty)$.

${}^\forall z \in D$ で f が連続のとき. f は D 上連続という.

例2.1

$f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$f(z) := z, \quad g(z) := \bar{z}$$

で定義すると、f, g は $z=0$ で連続である。

証明

g の連続性のみ示す。

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ が $z_n \to 0 \ (n \to \infty)$ をみたすとき、

$$|g(z_n) - g(0)| = |\overline{z_n} - 0| = |\overline{z_n}|$$

$$\underset{(問3.1)}{=} |z_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

より、$g(z_n) \to g(0) \ (n \to \infty)$ となるから g は $z=0$ で連続 □

定理2.1

$f : D \to \mathbb{C}$ が D 上連続ならば $\bar{f}$, $|f|$ も D 上連続。ただし

$$\bar{f}(z) := \overline{f(z)}, \quad |f|(z) := |f(z)| \quad (z \in D)$$

証明

1. $^\forall z \in D$ に対し、$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ が $z_n \to z \ (n \to \infty)$ をみたすとすると、

$$|\bar{f}(z_n) - \bar{f}(z)| = |\overline{f(z_n)} - \overline{f(z)}|$$

$$= |\overline{f(z_n) - f(z)}|$$

$$\underset{(問4.1)}{=} |f(z_n) - f(z)| \underset{f\text{は連続}}{\to} 0 \quad (n \to \infty)$$

よって $\bar{f}(z_n) \to \bar{f}(z) \ (n \to \infty)$ となるので $\bar{f}$ は D 上連続。

2. 1と同様に $z \in \mathbb{C}$, $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ をとると.

$$\big|\,|f|(z_n) - |f|(z)\,\big| = \big|\,|f(z_n)| - |f(z)|\,\big|$$
$$\leq |f(z_n) - f(z)| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

(問3.2)　　　　f は連続.

より $|f|(z_n) \to |f|(z)$ $(n \to \infty)$ となるので f は D上連続 □.

定理2.2

$f: D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で連続.

$\Longleftrightarrow$ (同値) ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対して. ${}^\exists \delta > 0$ が存在して. ${}^\forall z \in D$ に対し.

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

注意2.1

定義2.1と定理2.2は $\mathbb{C}$ が距離空間であるということしか使っていない(和や積を使っていない)

$d(z, z_0) = |z - z_0|$, $d(f(z), f(z_0)) = |f(z) - f(z_0)|$

に注意すれば差も使ってはいないことに注意せよ.

⑪ $f: D \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \in D$, $x, y \in \mathbb{R}$ に対し.

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) \tag{2.1}$$

とかいてみる. ただし $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

は実数値関数である.

定理2.3

$f:D\to\mathbb{C}$ がD上連続.

$\Longleftrightarrow$ fを(2.1)でかいたときに, u, vが
同値. 2変数x, yの関数として. D上連続

証明(厳密ではない)

($\Rightarrow$) $x_n\to x$, $y_n\to y$ $(n\to\infty)$ のとき.

$$|u(x_n,y_n)-u(x,y)| \underset{(問2.3)}{\leq} |f(x_n+iy_n)-f(x+iy)| \underset{仮定}{\longrightarrow} 0 \quad (n\to\infty)$$

より $u(x_n,y_n)\to u(x,y)$. $(n\to\infty)$. vも同様.

($\Leftarrow$) $z_n\to z$ $(n\to\infty)$ のとき. $z_n=x_n+iy_n$, $z=x+iy$とかくと

$$|f(z_n)-f(z)| = |(u(x_n,y_n)-u(x,y))+i(v(x_n,y_n)-v(x,y))|$$

$$\underset{(問2.3)}{\leq} |u(x_n,y_n)-u(x,y)|+|v(x_n,y_n)-v(x,y)|$$

$$\underset{仮定}{\longrightarrow} 0 \quad (n\to\infty)$$

となるので $f(z_n)\to f(z)$ $(n\to\infty)$. □.

定理2.4

$f, g: D\to\mathbb{C}$, D上連続

(1) $f\pm g$ も D上連続.

(2) fg も D上連続.

定義2.2（関数の極限）

$f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$f(z) \to \alpha \quad (z \to z_0)$ or $\displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ $^\forall \varepsilon > 0$ に対して $^\exists \delta > 0$ が存在して，$^\forall z \in D$ に対し

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - \alpha| < \varepsilon.$$

定理2.5

$f, g: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$\displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{z \to z_0} g(z) = \beta$

(1) $\displaystyle\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \alpha \pm \beta$

(2) $\displaystyle\lim_{z \to z_0} (f(z)\, g(z)) = \alpha\beta$.

証明は実関数の極限の証明と同じである.

§3 正則関数

§§3.1 複素微分. 正則関数

定義 3.1 (複素微分. 正則)

$D \subset \mathbb{C}$: 開集合, $f: D \to \mathbb{C}$. $z_0 \in D$.

(i) f が z_0 で 微分可能

$$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が存在する. この極限を $f'(z_0)$ とか $\frac{df}{dz}(z_0)$

とかく.

(ii) $\forall z \in D$ に対し. f が z で 微分可能のとき. f は

D 上 正則 であるといい. $f': z \mapsto f'(z)$ を

f の 導関数 という.

〈認めること〉

f が D 上 正則 $\Longrightarrow$ f は D 上 無限回 微分可能.

(これは. あとで証明できる)

◎ $f: D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で微分可能ならば z_0 で連続.

(∵)

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(z)$$

とかくと. $\dfrac{|o(z)|}{|z - z_0|} = \left| \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \to 0 \quad (z \to z_0)$

より とくに $|o(z)| \to 0 \quad (z \to z_0)$. □

例3.1

$n \in \mathbb{N}$ に対し $f(z) = z^n \ (z \in \mathbb{C})$ とおくと $z_0 \in \mathbb{C}$ に対し

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0}$$

$$= z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}$$

より

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = z_0^{n-1} + z_0^{n-2} z_0 + \cdots + z_0 z_0^{n-2} + z_0^{n-1}$$
$$= n z_0^{n-1}.$$

よって $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$.

定理3.1

$D \subset \mathbb{C}$ 開集合. $f, g: D \to \mathbb{C}$, D上正則

$\Longrightarrow$ $f \pm g$, fgもD上正則で

$(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(fg)' = f'g + fg'$.

また、$z_0 \in D$ に対し $g(z_0) \neq 0$ なら $\frac{f}{g}$ も z_0 で微分可能で

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

証明

$(fg)'$ を計算してみる。$z, z_0 \in D$ に対し

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \frac{(f(z) - f(z_0))g(z)}{z - z_0} + \frac{f(z_0)(g(z) - g(z_0))}{z - z_0}$$

$$\to f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$(z \to z_0)$$

□

定理3.2（合成関数の微分）

$D, D' \subset \mathbb{C}$ 開集合，$f = f(z) : D \to \mathbb{C}$，$D$上正則

$g = g(w) : D' \to \mathbb{C}$，$D'$上正則，$f(D) \subset D'$

$\Rightarrow F = g \circ f : D \to \mathbb{C}$ は D上正則で

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dg}{dw}(f(z))\frac{df}{dz}(z) \quad ({}^\forall z \in D)$$

証明は実数の微積分と同様

例 3.2

$F(z) = (2z^2+i)^5$ とすると 定理3.2より

$f(z) = 2z^2+i$, $g(w) = w^5$ とおいて.

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dg}{dw}(f(z))\frac{df}{dz}(z)$$
$$= 5(f(z))^4 4z = 20z(2z^2+i)^4.$$

例3.3

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = |z|^2$ $(z \in \mathbb{C})$ で定めると

fは $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して 微分可能ではない.

証明は次のセクションにまわす.

§§3.2 Cauchy-Riemannの関係式.

$D \subset \mathbb{C}$ 開集合, $f: D \to \mathbb{C}$ D上正則.

$\mathrm{Re} f(z) = u(x,y)$, $\mathrm{Im} f(z) = v(x,y)$ $(z = x+iy \in D)$

i.e.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (z = x+iy \in D)$$

とする. u, vの特徴を調べる.

$z \in D$ に対し

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \to f'(z) \qquad (h \to 0)$$

1. $h \in \mathbb{R}$ とすると、$z+h = x+h+iy$ より

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+h,y)+iv(x+h,y)-(u(x,y)+iv(x,y))}{h}$$

$$= \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}$$

$$\xrightarrow[(h\to 0)]{} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = f'(z) \quad -(*)$$

2. $h = ik$, $k \in \mathbb{R}$. i.e. hを純虚数とすると、

$z+h = x+i(y+k)$ より

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x,y+k)+iv(x,y+k)-(u(x,y)+iv(x,y))}{ik}$$

$$= \frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{k} + \underbrace{\frac{1}{i}}_{=-i}\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}$$

$$\xrightarrow[(k\to 0)]{} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f'(z). \quad -(**)$$

(*) と (**) より

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

だから $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ となる.

実は逆も成り立つ

定理3.3（Cauchy-Riemannの関係式）

$D\subset\mathbb{C}$ 開集合，$f:D\to\mathbb{C}$，u, v：実数値関数.

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\quad z=x+iy\in D.$

とかいたとき.

f が D 上正則

$\Longleftrightarrow$ u, v は D 上（(x,y) 変数の関数とみて）C^1 級で

同値

$$(\mathrm{CR})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) & (z=x+iy\in D)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{cases}$$

をみたす. さらに $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ となる.

この式（CR）を Cauchy-Riemannの関係式（方程式）

という.

$\Leftarrow$ の証明はやらないことにして，具体例を

みることにする.

例3.4

$$f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 5 + i(4x^3y - 4xy^3)$$

$$(z = x+iy \in \mathbb{C})$$

は, $\mathbb{C}$上 正則

$\because$
$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 5$$
$$v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3$$

はともにC^1級で.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 12xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -12x^2y + 4y^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 12x^2y - 4y^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 4x^3 - 12xy^2$$

より $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$.

となり Cauchy-Riemannの関係式をみたすから

fは$\mathbb{C}$上 正則であり.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$= 4x^3 - 12xy^2 + i(-12x^2y + 4y^3)$$ となる.

例3.5

例3.3の $f(z)=|z|^2$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上で正則ではない.

∵ $f(z)=|z|^2=x^2+y^2 \quad (z=x+iy\in\mathbb{C})$

より

$u(x,y)=x^2+y^2,\quad v(x,y)=0$

とおくと $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. ここで

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0$$

より

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\neq\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\quad(x\neq 0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\neq-\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\quad(y\neq 0)$$

となるから. Cauchy-Riemann の関係式を

$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上でみたさない.

§4 複素巾級数

e^x のTaylor展開は

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

であった. ここで 右辺の $x \in \mathbb{R}$ を $z \in \mathbb{C}$ におきかえて

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (z \in \mathbb{C})$$

とすれば $\mathbb{C}$ 上の指数関数が定められているようにみえる. これはどこまで正しいのだろうか？

§§4.1 巾級数

$c_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対し.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \quad (z \in \mathbb{C})$$

の形の級数を **巾級数** という.

定理4.1

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z=z_0\ (\neq 0)$ で収束.

$\Longrightarrow$ $|z|<|z_0|$ をみたすすべての $z\in\mathbb{C}$ に対し

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| < \infty \qquad (\text{絶対収束})$$

証明

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ が収束するならば. $c_n z_0^n \to 0\ (n\to\infty)$

だから $\exists M>0$ が存在して

$$|c_n z_0^n| \leq M \qquad (\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$$

とできる. 従って.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$
$$\leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

となり. 右辺の級数が公比 $\left|\frac{z}{z_0}\right|<1$ の

等比級数だから収束する. $\square$.

定理4.1より一般に巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対し

原点中心, 半径 r の円 $U_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$

があり

$z \in U_r(0)$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束.

$z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ $(\neq \mathbb{C} \setminus U_r(0))$

に対して $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は発散

がわかる. この半径 r を収束半径という. ただし.

$z = 0$ 以外で発散するときは $r = 0$, $^\forall z \in \mathbb{C}$ で

収束するときは $r = \infty$ と考える.

<u>定理4.2</u> (d'Alembertの判定法)

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対し. もし

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

が存在すれば r は収束半径である.

d'Alembert の判定法はみとめて．使い方をみることにする．

例4.1

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = 1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$

の収束半径は $r=\infty$ である．

(∵) $c_n=\dfrac{1}{n!}$ だから

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0 = \frac{1}{+\infty} \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore\ r=\infty$$

② $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\,z^n = 1+z+2!\,z^2+\cdots+n!\,z^n+\cdots$

の収束半径は $r=0$ である．

(∵) $c_n=n!$ だから

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = n+1 \to \infty = \frac{1}{+0}$$

$$\therefore\ r=0.$$

§§4.2 巾級数の正則性

$x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とおくと、収束半径内で f は無限回微分可能となる。
このことを $\mathbb{C}$ 上でみることにする。

定理4.3

巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径を R とする。

このとき、$f : U_R(0) \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (z \in U_R(0))$$

で定義すると、f は $U_R(0)$ 上正則であり、

$$(*) \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \qquad (z \in U_R(0))$$

が成り立つ。さらに $(*)$ の右辺の巾級数の収束半径も R となる。

証明はあとまわしにして、例をみることにする。

例 4.2

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は 1 である.(各自)

$z \neq 1$ に対し,

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 1+z+\cdots \quad +z^n$$

だから,両辺 $n\to\infty$ とすると $|z|<1$ ならば

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

$|z|<1$ に対し定理4.3より両辺微分して

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

が得られる.

例 4.3

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

で定義すると,fは無限回微分可能

しかし,f の $x=0$ における Taylor 展開

$$g(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

の収束半径は 1 であり.

$$f(x) = g(x) \quad (-1 < x < 1)$$
$$g(x) \text{は発散} \quad (|x| > 1)$$

である. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ に注意すると. 定理4.3

より. $\arctan x$ の Taylor 展開 も収束半径が 1 となる.

さて. $z \in \mathbb{C}$ として. $f(z), g(z)$ を考えてみると

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = g(z) \quad (|z| < 1)$$

となるが. $z = \pm i$ で $f(z)$ は無限大に発散する.

つまり. f は $\mathbb{R}$ 上滑らかであるが. $\mathbb{C}$ 上では.

$|z| = 1$ 上に発散する点 (特異点) があるため.

$\mathbb{C}$ 上正則でない. このことが $\mathbb{R}$ 上の Taylor

展開 $g(x)$ に影響を与えている.

◎ 実数上の関数 (指数関数や三角関数)

を複素数上に拡張してみると. 関数の

性質がよくわかることがある.

定理4.3の証明の概略

(*)だけ示す. そのためには $z \in U_R(0)$ に対し

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \right| \to 0 \qquad (h \to 0)$$

を示せばよい.

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left((z+h)^n - z^n \right)$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n z^{n-1} h + {}_nC_2 z^{n-2} h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} + h \sum_{n=2}^{\infty} \left({}_nC_2 z^{n-2} + {}_nC_3 z^{n-3} h + \cdots + {}_nC_n h^{n-2} \right)$$

だから. $|h|$:十分小, $z \in U_R(0)$ のときに.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left({}_nC_2 z^{n-2} + {}_nC_3 z^{n-3} h + \cdots + {}_nC_n h^{n-2} \right) < \infty$$

を示せばよい. 少し計算すると. $|z| < r < R$ なる r に対し. $\exists M > 0$ s.t.

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \left({}_nC_2 z^{n-2} + {}_nC_3 z^{n-3} h + \cdots + {}_nC_n h^{n-2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{M r}{(r - |z| - |h|)(r - |z|)^2}$$

と評価できる(小川え内 定理3.3).

□

§5 初等関数

§§5.1 指数関数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

であった. 例4.1より) 右辺は $\mathbb{C}$ 上で収束する.

このことを使って指数関数を $\mathbb{C}$ 上に拡張する.

定義5.1 (指数関数)

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots$$

により定義する.

$x, y \in \mathbb{R}$ に対し $e^{x+y} = e^x e^y$ であった.

この性質が $\mathbb{C}$ 上でも成り立つことをみる.

定理5.1 (指数法則)

$z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

理由

$$e^{z+w} = 1 + \frac{1}{1!}(z+w) + \frac{1}{2!}(z+w)^2 + \frac{1}{3!}(z+w)^3 + \cdots$$

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \left(1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{1!}w + \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{3!}w^3 + \cdots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1!}(z+w) + \frac{1}{2!}(z^2 + 2zw + w^2) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(z^3 + 3z^2 w + 3zw^2 + w^3) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1!}(z+w) + \frac{1}{2!}(z+w)^2 + \frac{1}{3!}(z+w)^3 + \cdots \\ &= e^{z+w} \end{aligned}$$

▨

※ 厳密には 解析学A 定理3.9，吹田・新保 p.136 定理7. を参照せよ.

〈Eulerの公式〉

$\theta \in \mathbb{R}$ に対し. $e^{i\theta}$ を考える.

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{1}{1!}(i\theta) + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{i}{1!}\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{i}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{i}{5!}\theta^5 - \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta.$$

定理5.2 (Eulerの公式)

$\theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

とくに

$$e^{i\pi} = -1.$$

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対し

$$e^z = e^{x+iy} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{定理5.1}}}{=} e^x e^{iy}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{定理5.2}}}{=} e^x(\cos y + i\sin y)$$

(極形式)

だから

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

定理5.3（指数関数の微分）

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$(e^z)' = e^z.$$

証明

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対し、

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

問5.4 (4) より e^z は $\mathbb{C}$ 上正則であり

$$(e^z)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy} \\ \text{-Riemann} \\ \text{の関係式}}}{=} \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y)$$

$$= e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z$$

□

§§ 5.2 三角関数

$\mathbb{C}$ 上の三角関数 cos, sin も Taylor 展開によって定義しよう.

定義 5.2 (三角関数)

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \cdots$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \cdots$$

により定義する. (問 5.2 を用いると, 右辺の級数は $\mathbb{C}$ 上 絶対収束する)

$\theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\text{Euler の公式})$$

であったが, これを示すときに

$$e^{i\theta} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \theta^{2n}\right) + i\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta^{2n+1}\right)$$

を示した. $\theta \in \mathbb{R}$ を $z \in \mathbb{C}$ におきかえれば

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

となる.

定理 5.4 (一般化された Euler の公式)

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

$$\cos(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (-z)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = \cos z$$

$$\sin(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (-z)^{2n+1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = -\sin z.$$

より

$$e^{-iz} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Euler} \\ \text{の公式}}}{=} \cos(-z) + i \sin(-z)$$

$$= \cos z - i \sin z.$$

となる. そこで

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i\sin z \end{cases}$$

をとくと.

$$(*) \begin{cases} \cos z = \dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z = \dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{cases}$$

が得られる. これを用いて三角関数を定義してもよいし. 計算には. こちらの方が便利である.

定理 5.5 (三角関数の周期性)

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\cos(z+2\pi) = \cos z$$

$$\sin(z+2\pi) = \sin z$$

証明 cos のみ示す.

$$\cos(z+2\pi) \underset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right)$$

$$\underset{\text{問}10.1(3)}{=} \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$

□

定理5.6（三角関数の微分）

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

証明　これも cos のみ示す.

$$(\cos z)' = \left(\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\right)'$$
$$= \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$$
$$= -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z \quad \square$$

定理5.7（加法定理）

$z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$
$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

証明　これも $\cos(z+w)$ のみ示す.

$$\cos(z+w) = \frac{1}{2}(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) = \frac{1}{2}(e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw})$$

$\cos z \cos w - \sin z \sin w$

$$= \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw})$$
$$- \frac{1}{4i^2}(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})$$
$$= \underset{\text{(各自)}}{\cdots} = \frac{1}{2}(e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}) = \cos(z+w)$$

$\square$

§§5.3 対数関数

$e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単射なので逆関数 $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

が定義できた. しかし. $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は単射ではない

ので. 逆関数(対数関数)はこのままでは定義で

きない. ($0 \neq 2\pi i$ だが $e^0 = e^{2\pi i}$)

ところで $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$

と極形式でかくとき. $-\pi < \theta \leq \pi$ としていた.

このとき

$$e^{\log r + i\theta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{指数法則}}}{=} e^{\log r} e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

となる. $x > 0$ に対し $e^{\log x} = x$ となることから

$\log z = \log r + i\theta$ とすればよさそうである

<u>定義5.3</u> (対数関数)

$z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ $(r > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi)$ とかくとき.

$$\mathrm{Log}\, z := \log r + i\theta$$

と定義する.

例 5.1

$$\mathrm{Log}\,1 = \log 1 + i0 = 0$$

実数は $\theta = 0$

一般に $r > 0$ に対し

$$\mathrm{Log}\,r = \log r + i0 = \log r$$

$$\mathrm{Log}(-1) = \mathrm{Log}\left((\cos\pi + i\sin\pi)\right) = \log 1 + i\pi = i\pi$$

$$\mathrm{Log}(1+i) = \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) = \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4}$$

$\mathrm{Log}\sqrt{2} + \mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{4}})$ と考えればよい

例 5.2

$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ に対し $z = re^{i\theta}$ $(-\pi < \theta \leq \pi,\ r > 0)$

とかくと

$$e^{\mathrm{Log}\,z} = e^{\mathrm{Log}(re^{i\theta})} = e^{\log r + i\theta}$$

$$= e^{\log r}e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

例 5.3

$\log e^z = z$ とは限らない. たとえば

$z = \log 2 + i\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$$e^z = e^{\log 2}e^{i\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$-\pi < \theta \leq \pi$ となるため

だから

$$\log e^{z} = \log 2 + i\frac{\pi}{4} \neq \log 2 + i\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = z.$$

定理 5.8(対数関数の微分)

Log は $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ 上で正則になり

$$(\mathrm{Log}\, z)' = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0])$$ となる.

証明は講義ノートをみよ.(少し難しい)

§§ 5.4 双曲線関数

定義 5.4(双曲線関数)

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$$

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$$

と定義する.

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\cosh(iz) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$

$$\cos(iz) = \frac{1}{2}(e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}) = \cosh z$$

$$\sinh(iz) = i \sin z$$

$$\sin(iz) = i \sinh z$$

がわかる.

定理5.9 (双曲線関数の微分)

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z$$

証明 $\cosh z$ のみ示す.

$$(\cosh z)' = (\cos(iz))' = -i \sin iz$$

$$= -i(i \sinh z) = \sinh z.$$

もちろん, 定義を直接計算してもよい $\square$

定理5.10 (加法定理)

$z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$$

$$\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w.$$

証明は各自. (cf. 高木貞治「解析概論」§54)

〈まとめ〉

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$\mathbb{C}$ 上では指数関数がわかれば, 他の関数の性質もよくわかる

§ Appendix

§§ 巾乗根と Riemann 面

$w^2 = z$ となる $w \in \mathbb{C}$ をもとめてみる

$w = \rho e^{i\phi}$, $z = r e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$

とすると $\rho^2 e^{2i\phi} = r e^{i\theta}$ より

$$\rho = \sqrt{r}, \quad \phi = \frac{\theta}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$\therefore$ $\sqrt{z} = w$ であるが、どう定めればよいか？

$x > 0$ のとき、$y^2 = x$ を考えて、$y > 0$ となる方を $\sqrt{x}$ と定義した。$\mathbb{C}$ では、こういう選び方はできない。

〈わかっていること〉

$$w_0 = \sqrt{r}\, e^{\frac{\theta}{2}}, \quad w_1 = \sqrt{r}\, e^{\frac{\theta}{2} + \pi}$$

の2つのみを考えればよい （e^z の周期性）

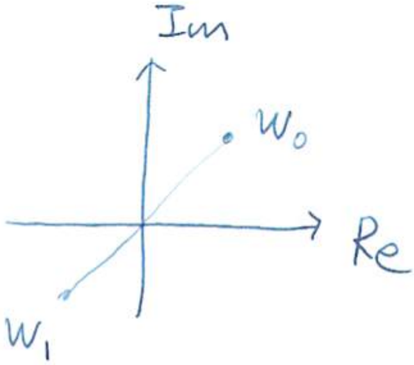
たとえば $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときを考えると

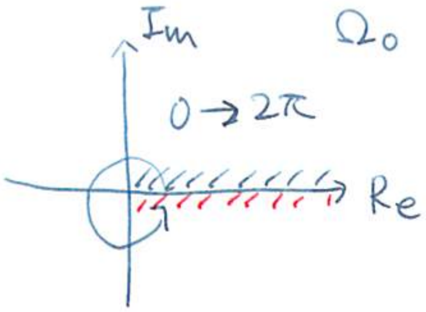
$$w_0 = e^{\frac{\pi}{4} i}, \quad w_1 = e^{\frac{5}{4}\pi i}, \quad w_0^2 = e^{\frac{\pi}{2} i}, \quad w_1^2 = e^{\frac{5}{2}\pi i}$$

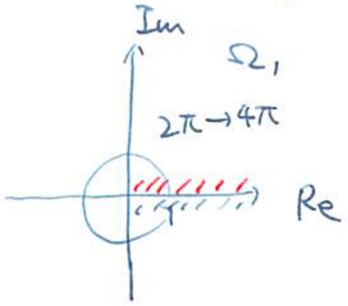
〈Riemannのアイデア〉

$e^{\frac{\pi}{2}i}$ と $e^{\frac{5}{2}\pi i}$ を

区別しよう。

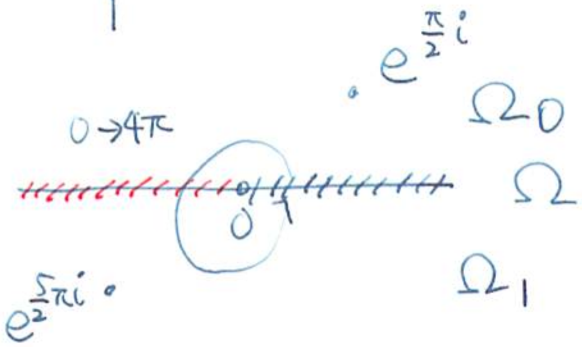






⟶

赤の斜線同士
青の斜線同士
をくっつける



このΩの上での $\sqrt{z}$ は一価に定まる

(e.g. $\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}i}} = e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\sqrt{e^{\frac{5}{2}\pi i}} = e^{\frac{5}{4}\pi i}$

このΩを $\sqrt{z}$ を一価関数とするRiemann面という

注 ここでは $\sqrt{z}$ に対して、正の実軸を切ってRiemann面を構成したが、切り方は他にもある。また、$\sqrt[n]{z}$ や $\log z$ に対してもRiemann面を構成できる。

§§ Riemann 予想

(この話は、私が学部時代に勉強した程度のお話)

$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ とかく(この分野での方言みたいなもの)

$\sigma > 1$ に対し

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と定める(右辺の級数は収束する)

〈解析接続〉

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$$

の右辺を使って e^z $(z \in \mathbb{C})$ を定義した。このように、何か等式があると、それを使って関数の定義域を拡張できることがある。(この拡張を解析接続という)

<u>定理</u> (関数等式)

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s) \quad (s \in \mathbb{C})$$

ただし、Γ はガンマ関数(を $\mathbb{C}$ 上に解析接続したもの)

この関数等式により ζ は $\mathbb{C}$ 上に解析接続される。

この拡張された関数 ζ を Riemann のゼータ関数という。

〈Euler積〉

ゼータ関数は数論（素数の分布）と関係がある.

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \frac{1}{1-7^{-s}} \cdots$$

（Euler積表示）

logをとると

$$-\log \zeta(s) = \sum_{p:\text{素数}} \log(1-p^{-s})$$

$\zeta(s) = 0 \implies -\log\zeta(s) = \infty \implies$ 素数の分布がわかる

$\implies$ 暗号理論 etc.

〈Riemann予想〉

関数等式より $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\underbrace{\zeta(1-(2n+1))}_{\zeta(-2n)} = (\text{何か}) \times \underbrace{\cos\left(n\pi+\frac{1}{2}\right)}_{0}$$

より $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \cdots = 0$ （自明な零点）

Riemann予想 （Clay数学研究所のミレニアム懸賞問題）

$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$.

$\zeta(s) = 0$ 非自明

$\implies \sigma = \frac{1}{2}$