解析学 B –複素関数論序論–

1. 複素数と Gauss 平面

1.1. **複素数.** $x, y \in \mathbb{R}$ と**虚数単位**$i = \sqrt{-1}$ により作られた数 $z = x + iy$ を**複素数**という. ここで, i は $i^2 = -1$ をみたす. また, $\operatorname{Re} z := x$(実部という), $\operatorname{Im} z := y$(虚部という) と書く. $\operatorname{Re} z := 0$, すなわち $z = iy$ と書けるとき, z を純虚数という. 複素数全体を $\mathbb{C}$, すなわち

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

とかく. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
z_1 = z_2 &\underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \\
z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
z_1 - z_2 &:= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \\
z_1 z_2 &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &:= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (x_2^2 + y_2^2 \neq 0)
\end{aligned}$$

と定義する. つまりは, i を文字だと思って計算して, $i^2 = -1$ でおきかえればよい.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対して, $\bar{z} := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z = x - iy$ と定義する. $\bar{z}$ を z の**共役複素数**という.

例 1.1.

いくつか計算例をあげる.

- $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i,$
- $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ のとき $\dfrac{1}{a + bi} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2},$
- $z = x + iy \in \mathbb{C}$ のとき

$$\begin{aligned}
z\bar{z} &= x^2 + y^2 \geq 0 \\
z + \bar{z} &= 2x = 2 \operatorname{Re} z \\
z - \bar{z} &= 2iy = 2i \operatorname{Im} z
\end{aligned}$$

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}
z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \geq 0, \\
z + \bar{z} &= (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z \\
z - \bar{z} &= (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z
\end{aligned}$$

となる.

1.2. **Gauss 平面.** $z = x + iy \in \mathbb{C}$ は (x, y) 平面の点として書くことができる. この平面を **Gauss 平面**とか**複素平面**という. 横軸は $(x, 0)$, すなわち $x + i0 \in \mathbb{R}$ となり, 縦軸は $(0, y)$, すなわち $0 + iy$ となり純虚数となる. 横軸は**実軸**, 縦軸は**虚軸**という.

例 1.2.
$1 + i$ と $-\sqrt{3} + i$ を Gauss 平面に書く.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ を極座標 (r, θ) でかくと

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

となる. ただし, θ は一通りには定まらない ($\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ してもかわらない) ので, 断りのない限り $-\pi < \theta \le \pi$ に制限する. r を z の**絶対値**, θ を**偏角**といい

$$|z| := r, \quad \arg z := \theta$$

とかく. このとき

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

となる. この右辺を z の**極形式**という.

例 1.3.
例 1.2 を参考にすると

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

となる.

例 1.4.
$r > 0$, $\eta \in \mathbb{C}$ に対して,

$$U_r(\eta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \eta| < r\}$$

とおく. $z = x + iy$, $\eta = a + ib$ とおくと

$$|z - \eta|^2 = |x - a|^2 + |y - b|^2$$

となることから, $|z - \eta|$ は Gauss 平面上で z と η の距離になる. よって, $U_r(\eta)$ は η 中心, 半径 r の開円盤を表す.

Gauss 平面と積. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して, $z_1 z_2, \dfrac{z_1}{z_2}$ を Gauss 平面に図示してみよう. 簡単のため, $|z_1| = |z_2| = 1$ として, 極形式を $z_1 = \cos\theta_1 + i \sin\theta_1$, $z_1 = \cos\theta_2 + i \sin\theta_2$ とすると, 加法定理を用いて

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

となる. つまり, 複素数の積は Gauss 平面において回転に対応する.

定理 1.1.
$z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$, $z_1 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2 \in \mathbb{C}$ に対して,

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

となる, すなわち,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

となる. また, $z_2 \neq 0$, すなわち $r_2 \neq 0$ であれば

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

となる, すなわち

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

となる.

系 1.1 (de Moivre の定理)**.**
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$z^n = r^n \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = r^n \left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

となる.

1.3. **複素数列の収束.** $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$d(z, w) := |z - w|$$

とおくと, d は $\mathbb{C}$ 上の距離になる.

定義 1.1 (収束)**.**
$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ を複素数列, $z \in \mathbb{C}$ に対して, $z = \lim_{n\to\infty} z_n = z$ または, $z_n \to z \quad (n \to \infty)$ であるとは

$$|z_n - z| = d(z_n, z) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

をみたすことである.

$\mathbb{R}$ と違い, $\mathbb{C}$ には不等式がないので, はさみうちの定理はそのままでは使えない.

例 1.5.
$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ を複素数列, $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$0 \leq |z_n - z| \leq |w_n - z| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$
$$w_n \to z \quad (n \to \infty)$$

を仮定する. このとき

$$z_n \to z \quad (n \to \infty)$$

となる.

$z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ が $z_n \to z \quad (n \to \infty)$ となるとき,

$$0 \le |x_n - x| \le |z_n - z|, \quad 0 \le |y_n - y| \le |z_n - z| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

となるから, $x_n \to x$, $y_n \to y \quad (n \to \infty)$ となる.

逆に $x_n \to x$, $y_n \to y \quad (n \to \infty)$ となるとき,

$$0 \le |z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y|$$

から $z_n \to z \quad (n \to \infty)$ がわかる.

定理 1.2.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ を複素数列, $z \in \mathbb{C}$ とする. このとき

$$z_n \to z \quad (n \to \infty) \underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. つまり, $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$ と書いたときに右側は

$$x_n \to x,\ y_n \to y \quad (n \to \infty)$$

となる.

定理 1.3.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ を複素数列, $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, $w = \lim_{n\to\infty} w_n$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$,

(2) $\lim_{n\to\infty} (z_n w_n) = zw$,

(3) $z \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = \dfrac{1}{z}$.

定理 1.4 ($\mathbb{C}$ の完備性)**.**

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{n,m} |z_n - z_m| = 0 \Longrightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{は収束する.}$$

$\lim_{n,m} |z_n - z_m| = 0$ は正確に述べると $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (距離空間 $\mathbb{C}$ 上での)Cauchy 列, すなわち, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall n.m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \ge N \Longrightarrow d(z_n, z_m) = |z_n - z_m| < \varepsilon$$

となることである.

1.4. **Gauss 平面の位相.** $d(z.w) = |z - w|$ とおくと, $(\mathbb{C}, d)$ は距離空間になるので, 開集合や閉集合が定義できる.

定義 1.2 (開集合)**.**

$U \subset \mathbb{C}$ が**開集合**であるとは, $\forall \eta \in U$ に対して, $\exists \varepsilon > 0$ が存在して

$$U_\varepsilon(\eta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \eta| < \varepsilon\} \subset U$$

をみたすことである.

定義 1.3 (閉集合)**.**
$F\subset\mathbb{C}$ が**閉集合**であるとは, 任意の複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset F$ と $z\in\mathbb{C}$ に対して, $z_n\to z$ $(n\to\infty)$ ならば $z\in F$ となることである.

「開集合でない」は「閉集合」**というわけではない.** 日本語の対義語とは異なることに注意すること.

例 1.6.
$r>0$, $\eta\in\mathbb{C}$ に対して, $U_r(\eta):=\{z\in\mathbb{C}:|z-\eta|<r\}$ は開集合となり $\bar{U}_r(\eta):=\{z\in\mathbb{C}:|z-\eta|\le r\}$ は閉集合となる.

定理 1.5.
$F\subset\mathbb{C}$ が閉集合であることと, $F^c=\mathbb{C}\setminus F$ が開集合であることは同値である.

定義 1.4 (有界)**.**
$A\subset\mathbb{C}$ が有界であるとは, $\exists M>0$ が存在して, $\forall z\in A$ に対して $|z|\le M$ が成り立つことである.

定理 1.6 (Bolzano-Weierstrass の定理)**.**
$K\subset\mathbb{C}$ を有界閉集合, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$ を複素数列とすると, 部分列 $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して, $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束部分列となる. すなわち, K は点列コンパクトである.

定理 1.7 (Heine-Borel の定理)**.**
$K\subset\mathbb{C}$ を有界閉集合, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の開被覆, すなわち $K\subset\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ とする. このとき, 有限個 $U_1,\dots,U_N\in\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して, $K\subset\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N}U_n$ が成り立つ. すなわち, K はコンパクトである.

2. 連続関数

$D\subset\mathbb{C}$ は開集合とする.
$(a,b)\subset\mathbb{R}$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ に対して, f が $x_0\in(a,b)$ で連続であるとは $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(a,b)$ が $x_n\to x_0\quad(n\to\infty)$ ならば $f(x_n)\to f(x_0)\quad(n\to\infty)$ となることであった. これは, ε-δ 論法を用いると $\forall\varepsilon>0$ に対して, $\exists\delta>0$ が存在して, $\forall x\in(a,b)$ に対して,

$$|x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

となることであった. どちらの場合も距離空間の言葉で書ける.

定義 2.1 (連続)**.**
$f:D\to\mathbb{C}$ が $z_0\in D$ で**連続**であるとは, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D$ が $z_n\to z_0\quad(n\to\infty)$ ならば, $f(z_n)\to f(z_0)\quad(n\to\infty)$ が成り立つことをいう. また, $\forall z\in D$ で f が連続のとき, f は D 上連続という.

例 2.1.
$f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $z\in\mathbb{C}$ に対して,

$$f(z):=z,\quad g(z):=\overline{z}$$

で定義すると, f,g は $z=0$ で連続である.

定理 2.1.
$f : D \to \mathbb{C}$ が D 上連続ならば, $\overline{f}$, $|f|$ も D 上連続となる. ただし

$$\overline{f}(z) := \overline{f(z)}, \quad |f|(z) := |f(z)| \quad (z \in D)$$

定理 2.2.
$f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で連続であることと,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall z \in D \qquad |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

は同値である.

注意 2.1.
定義 2.1 や定理 2.2 は, $\mathbb{C}$ が距離空間であるということしか使っていない (とくに, 和や積を使っていない). $d(z, z_0) = |z - z_0|$, $d(f(z), f(z_0)) = |f(z) - f(z_0)|$ に注意すれば, 差も実質的には使っていないことに注意せよ.

$f : D \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \in D$, $x, y \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.1}$$

と書いてみる. ただし, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ は**実数値**関数である.

定理 2.3.
$f : D \to \mathbb{C}$ が D 上連続であることと, f を (2.1) で書いたときに, u, v が 2 変数 x, y の関数として D 上連続であることは同値である.

定理 2.4.
$f, g : D \to \mathbb{C}$ を D 上連続とする.

(1) $f \pm g$ も D 上連続.
(2) fg も D 上連続.

定義 2.2.
$f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $f(z) \to \alpha \quad (z \to z_0)$, または $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$ であるとは, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $\forall z \in D$ に対して,

$$0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう.

定理 2.5.
$f, g : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = \beta$ とする.

(1) $\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \alpha \pm \beta$.
(2) $\lim_{z \to z_0} (f(z)g(z)) = \alpha\beta$.

3. 正則関数

3.1. 複素微分, 正則関数.

定義 3.1 (複素微分, 正則)**.**
$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ とする. このとき, f が z_0 で**微分可能**であるとは

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が存在することをいう. この極限を $f'(z_0)$ とか $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ と書く.
任意の $z \in D$ に対して, f が z で微分可能のとき, f は D 上**正則**であるといい, $f' : z \mapsto f'(z)$ を f の**導関数**という.

この講義では, f が D 上正則ならば, f が D 上無限回微分可能となることを認める. 実際, これはあとで証明できる事実である. 実関数と違うことに十分注意せよ. 実関数は微分可能だからといって, 無限回微分可能とは限らない.

例 3.1.
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $f(z) = z^n$ $(z \in \mathbb{C})$ とおく. $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\ &= z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}\end{aligned}$$

となるから,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z_0^{n-1} + z_0^{n-2}z_0 + \cdots + z_0 z_0^{n-2} + z_0^{n-1} = nz_0^{n-1}$$

となる.

定理 3.1.
$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $f, g : D \to \mathbb{C}$ は D 上正則とする. このとき, $f \pm g$, fg も D 上正則であり,

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg'$$

となる.

定理 3.2.
$D, D' \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f = f(z) : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則, $g = g(w) : D' \to \mathbb{C}$ を D' 上正則とし, $f(D) \subset D'$ とする. このとき $F = g \circ f : D \to \mathbb{C}$ は D 上正則であり,

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dg}{dw}(f(z))\frac{df}{dz}(z) \quad (z \in D)$$

となる.

例 3.2.
$F(z) = (2z^2 + i)^5$ とおくと, 定理 3.2 より $f(z) = 2z^2 + i$, $g(w) = w^5$ とおいて

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dg}{dw}(f(z))\frac{df}{dz}(z) = 5(f(z))^4 4z = 20z(2z^2 + i)^4.$$

例 3.3.
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = |z|^2 \quad (z \in \mathbb{C})$ で定めると, f は $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して, **微分可能ではない.** 証明は次のセクションにまわす.

3.2. **Cauchy-Riemann の関係式.** $D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則とし,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x,y) \qquad (x = z + iy \in D)$$

とおく. すなわち

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (x = z + iy \in D)$$

とおく.

定理 3.3 (Cauchy-Riemann の関係式)**.**
$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f : D \to \mathbb{C}$ に対して,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x,y) \qquad (x = z + iy \in D)$$

とおく. すなわち

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (x = z + iy \in D)$$

とおく. このとき, f が D 上正則であることと, u, v が D 上 ($(x.y)$ 変数の関数とみて)C^1 級で

$$\text{(CR)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

をみたすことは同値である. さらに, このとき $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ となる. この式 (CR) を **Cauchy-Riemann の関係式 (方程式)** という.

例 3.4.
$f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 5 + i(4x^3y - 4xy^3) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$ とおくと, f は $\mathbb{C}$ 上正則である. 実際に $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 5$ と $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3$ はともに C^1 級で

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 12xy^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -12x^2y + 4y^3$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 12x^2y - 4y^3$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 4x^3 - 12xy^2$$

より $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ となり, Cauchy-Riemann の関係式をみたすから, f は $\mathbb{C}$ 上正則であり,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ &= 4x^3 - 12xy^2 + i(12x^2y - 4y^3) \end{aligned}$$

となる.

例 3.5.

$f(z) = |z|^2$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で正則でない. 実際,

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

より, $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$ とおくと, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ となる. ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 2y \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

より, $(x,y) \neq (0,0)$ に対して $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \neq -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ だから, Cauchy-Riemann の関係式を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で満たさない.

4. 複素巾級数

4.1. 巾級数. $c_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \quad (z \in \mathbb{C})$$

を巾級数という.

定理 4.1.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0 \neq 0$ で収束するならば, $|z| < |z_0|$ をみたすすべての $z \in \mathbb{C}$ に対して, $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| < \infty$(つまり絶対収束) がなりたつ.

巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対して原点中心, 半径 r の円 $U_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ があって, $z \in U_r(0)$ に対して, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束, $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ に対して, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は発散

する．この半径 r を**収束半径**という．ただし，$z=0$ 以外で発散するときは $r=0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ で収束するときは $r=\infty$ と考える．

定理 4.2 (d'Alembert の判定法)**.**
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対して，もし $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n+1}{c_n}\right| = \frac{1}{r}$ が存在すれば，r は収束半径である．

例 4.1.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ の収束半径は $r=\infty$ である．
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ の収束半径は $r=0$ である．

4.2. **巾級数の正則性.**

定理 4.3.
巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径を R とする．このとき，$f : U_R(0) \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (z \in U_R(0))$$

で定義すると，f は $U_R(0)$ 上で正則であり，

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad (z \in U_R(0)) \tag{4.1}$$

が成り立つ．さらに (4.1) の右辺の巾級数の収束半径も R となる．

例 4.2.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は 1 である．$z \neq 1$ に対して，

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n$$

だから，両辺 $n \to \infty$ とすると，$|z| < 1$ ならば

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

となる．定理 4.3 より，両辺微分すると

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

が得られる．

例 4.3.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad (x\in\mathbb{R})$$

で定義すると, f は無限回微分可能である. しかし $x=0$ における Taylor 展開

$$g(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

の収束半径は 1 であり,

$$f(x) = g(x) \quad (-1<x<1)$$
$$g(x) \text{ は発散} \quad (|x|>1)$$

である. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ に注意すると, 定理 4.3 より, $\arctan x$ の Taylor 展開も収束半径が 1 になる.

さて $z\in\mathbb{C}$ として, $f(z)$, $g(z)$ を考えてみると

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = g(z) \quad (|z|<1)$$

となるが, $z=\pm i$ で $f(z)$ は無限大に発散する. つまり, f は $\mathbb{R}$ 上では滑らかではあるが, $\mathbb{C}$ 上では $|z|=1$ 上に発散する点 (特異点という) があるため, $\mathbb{C}$ 上で正則ではない. このことが $\mathbb{R}$ 上の Taylor 展開 $g(x)$ に影響を与えている.

実数上の関数 (指数関数や三角関数) を複素数に拡張してみると, 関数の性質がよくわかることがある.

5. 初等関数

5.1. 指数関数.

定義 5.1 (指数関数)**.**

$z\in\mathbb{C}$ に対して, 指数関数 e^z を

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$$

と定義する.

定理 5.1 (指数法則)**.**

$z,w\in\mathbb{C}$ に対して,

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

が成り立つ.

定理 5.2 (Euler の公式)**.**

$\theta\in\mathbb{R}$ に対して,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

が成り立つ. とくに,

$$e^{i\pi} = -1$$

が成り立つ.

定理 5.3 (指数関数の微分)**.**
$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$(e^z)' = \frac{d}{dz}e^z = e^z$$

5.2. **三角関数.**

定義 5.2 (三角関数)**.**
$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots$$
$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots$$

と定義する.

定理 5.4 (一般化された Euler の公式)**.**
$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^z = \cos z + i \sin z$$

が成り立つ.

定理 5.5 (三角関数の周期性)**.**
$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

定理 5.6 (三角関数の微分)**.**
$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$(\cos z)' = \frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z, \quad (\sin z)' = \frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z.$$

定理 5.7 (加法定理)**.**
$z, w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad \sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

5.3. **対数関数.**

定義 5.3 (対数関数)**.**
$z \in \mathbb{C}$ を $r > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$ として, $z = re^{i\theta}$ と極形式で書くとき,

$$\mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta$$

で定義する.

例 5.1.
$\mathrm{Log}\, 1 = 0$ であり, より一般に, 正の実数 $r > 0$ に対して $\mathrm{Log}\, r = \log r$.
$\mathrm{Log}(-1) = i\pi$, $\mathrm{Log}(1 + i) = \dfrac{1}{2}\log 2 + i\dfrac{\pi}{4}$ となる.

例 5.2.
$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ に対して, $e^{\mathrm{Log}\, z} = z$ が成り立つ.

例 5.3.
$z \in \mathbb{C}$ に対して, $\mathrm{Log}(e^z) = z$ とは限らない. 例えば, $z = \log 2 + i\left(2\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$ とすると, $e^z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ だから,

$$\mathrm{Log}\, e^z = \log 2 + i\frac{\pi}{4} \neq z$$

定理 5.8.
Log は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上で正則となり, $(\mathrm{Log}\, z)' = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ となる.

証明.
1. $z = x + iy = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ と書くとき $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

となる (もう少し頑張ると, x, y を r, θ で表すこともできる).
2. $\mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta$ だったから $u(r,\theta) = \log r$, $v(r,\theta) = \theta$ とおくと, $\mathrm{Log}\, z = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ となり

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(r,\theta) &= \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{x}{r^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(r,\theta) &= \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{y}{r^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(r,\theta) &= \frac{x}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) - \frac{y}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) = -\frac{y}{r^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(r,\theta) &= \frac{y}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{x}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{x}{r^2} \end{aligned}$$

となるから, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(r,\theta) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(r,\theta)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(r,\theta) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(r,\theta)$ となり, Cauchy-Riemann の関係式を $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上で満たすから, Log は正則となる. また,

$$(\mathrm{Log}\, z)' = \frac{\partial u}{\partial x}(r,\theta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(r,\theta) = \frac{x - iy}{r^2} = \frac{1}{z}$$

がわかる. □

5.4. 双曲線関数.

定義 5.4 (双曲線関数)**.**
$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

と定義する.

定理 5.9 (双曲線関数の微分)**.**
$z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(\cosh z)' = \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z$$

が成り立つ.

定理 5.10 (加法定理)**.**
$z, w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w, \quad \sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$$

が成り立つ.