解析学 B 演習問題　(2012 年 9 月 25 日)

学籍番号　　　　　　　名前

問題 1.1.

次を $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形で表せ.

(1) $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

(2) $\dfrac{1+i}{2i}$

問題 1.2.

$z=x+iy\in\mathbb{C}$ は $z\neq 0$ とする．このとき, 定義に従って $z\cdot\dfrac{1}{z}=1$ となることを示せ (つまり, x と y の形で $a+bi$ の形に書きかえてから示せ).

問題 1.3.

次を Gauss 平面に図示し, 極形式を求めよ.

(1) $-1+\sqrt{3}i$

(2) $1-i$

問題 1.1 の解答.

(1) -1

(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

なお, 定理 1.1 を使って計算してもよい．4 乗以上の計算になると, そっちの方が早い． □

問題 1.3 の解答.

(1) $2\left(\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$

(2) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{1}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right)$

(2) について, 間違ってはいないのだが, あとあとの事情により $\dfrac{7}{4}\pi$ にはして欲しくない．また, $\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{1}{4}\pi\right)-i\sin\left(\dfrac{1}{4}\pi\right)\right)$ も等号としては間違ってはいないのだが, これは普通, 極形式とはいわない ($\sin$ と $\cos$ の間は $+$ にする)．同様に, $\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{1}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right)$ も極形式とはいわない ($\sin$ と $\cos$ の角度は同じ値にする). □

問題 1.4 (問題 1.3 の類題)**.**

次を Gauss 平面に図示し, 極形式を求めよ.

(1) $-2\sqrt{3}-2i$

(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

解析学 B 演習問題　(2012 年 10 月 2 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 2.1.

(1) $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1,\ z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2 \in \mathbb{C}$ と極形式で書いたとき

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

を示せ.

(2) $(1+\sqrt{3}i)^6$ を計算せよ (定理 1.1(系 1.1) を使う方が簡単).

問題 2.2.

(1) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して, 三角不等式

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

を示せ.

(2) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して, $d(z,w) := |z-w|$ とおくとき,

$$d(z,w) \le d(z,\eta) + d(\eta,w) \quad (\forall z, w, \eta \in \mathbb{C})$$

を示せ.

問題 2.3.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対して, 次の不等式を示せ.

(1) $|x| \le |z|$, $|y| \le |z|$

(2) $|z| \le |x| + |y|$

問題 2.1 (2) の解答.

$(1+\sqrt{3}i)^6 = 2^6 = 64$ □

問題 2.2 の (1) の証明の概略.

$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とすると

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2,$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} + x_2^2 + y_2^2$$

だから両辺見比べると,

$$(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 = 2(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - x_1x_2 - y_1y_2).$$

Schwarz の不等式を使えば, $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - x_1x_2 - y_1y_2 \ge 0$ がわかる. □

問題 2.4 (問題 2.1 の類題)**.**

次を計算せよ.

$$(\sqrt{3} + i)^6, \quad (1+i)^5, \quad \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$$

解析学B 演習問題　(2012年10月9日)

学籍番号　　　　　名前

問題 3.1.

$\{z_n\}_{n=1}^\infty$, $\{w_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$z_n \to z, \quad w_n \to w \qquad (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad z_n + w_n \to z + w \qquad (n \to \infty)$$

を示せ.

問題 3.2.

(1) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$$

を示せ (ヒント: $z = z - w + w$, $w = w - z + z$ と三角不等式を使う).

(2) $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$z_n \to z \qquad (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad |z_n| \to |z| \qquad (n \to \infty)$$

を示せ.

問題 3.3.

$r > 0$ に対して, $(U_r(0))^c = \mathbb{C} \setminus U_r(0)$ が閉集合であることを, **定理 1.5 を用いずに**例 1.6 のようにして示せ. (注意: もし, 前日までに出していた問題, 中心を η として解いたのなら, そちらを解答してよい).

問題 3.1 の略解.

$|(z_n + w_n) - (z + w)| \le |z_n - z| + |w_n - w| \to 0$ $(n \to \infty)$ が書けてればよい. ただし, 矢印であるべきところが $=$ になっているものはダメ. また, 実部と虚部にわけて, 定理 1.2 を使ってもよい (この解答が一人だけいた. 使うなとはいっていないのでもちろん OK) □

問題 3.2 の略解.

$|z| \le |z - w| + |w|$ より $|z| - |w| \le |z - w|$. 同様に, $|w| - |z| \le |z - w|$ だから, 組み合わせれば, (1) が得られる. $\big||w| - |z|\big|$ を直接計算しようとすると, 場合分けが発生してかなり面倒. また, この問題でも, 矢印であるべきところが $=$ になっているものはダメ. □

問題 3.3 の略解.

$\{z_n\} \subset (U_r(0))^c$ ならば, $|z_n| \ge r$ である. あとは $n \to \infty$ とするだけ. □

解析学 B 演習問題 (2012 年 10 月 16 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 4.1.

下記の問いに答えよ.

(1) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $|\overline{z}| = |z|$ を示せ.

(2) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して, $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$ を示せ.

(3) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して, $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{zw}$ を示せ (ヒント: $z = x + iy$ と書いて計算してもよいが, 少し面倒. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と極形式で書いたときに, $\overline{z}$ の極形式はどうなるかを考えよ)

問題 4.2.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f, g : D \to \mathbb{C}$ を D 上連続関数とする. このとき, $f \pm g$, fg が D 上連続となることを示せ.

問題 4.1 の (3) について.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と極形式で書いたときに, $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ となる (各自, Gauss 平面に図示して確かめよ). だから $z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $w = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とすると, 定理 1.1 を使って

$$
\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))} = r_1 r_2(\cos(-(\theta_1+\theta_2)) + i\sin(-(\theta_1+\theta_2)) \\
\overline{z} \cdot \overline{w} &= (r_1(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)))(r_2(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2))) \\
&= r_1 r_2(\cos(-(\theta_1+\theta_2)) + i\sin(-(\theta_1+\theta_2))
\end{aligned}
$$

となる. □

解析学 B 演習問題 (2012 年 10 月 23 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 5.1.

次の関数を微分せよ. 括弧は展開しなくてよい.

(1) $(z^3+2i)^6$
(2) $(4iz^2+3)^4$

問題 5.2.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f, g : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = \beta$ とする. このとき, ε-δ 論法を用いて, $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = \alpha\beta$ を示せ (吹田・新保 p.8 の定理 2 を参照せよ. なお, $|f|$ が D 上有界になることは認めてもよいが, 認めなくても証明はできる).

問題 5.1 の解答.

(1) $18z^2(z^3+2i)^5$
(2) $32iz(4iz^2+3)^3$

□

問題 5.2 の「$|f|$ が有界であることを認めた」証明.

$|f|$ が有界だから, ある $M > 0$ が存在して, $|f(w)| \leq M$ $(\forall w \in D)$ とできる. そこで, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta_1 > 0$ と $\delta_2 > 0$ が存在して $\forall w \in D$ に対して,

$$|w - z_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(w) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$$
$$|w - z_0| < \delta_2 \Longrightarrow |g(w) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

とできる (ここで, $\forall \varepsilon > 0$ を **2 回書かないこと**はとても重要. 2 回書いてしまうと, 2 つの ε が同じなのか違うのか？という屁理屈がでてきてしまう. 証明では**どんな屁理屈にも対応できるように書かなければいけない**). そこで, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ととると $\forall z \in D$ に対して $|z - z_0| < \delta$ ならば (ちなみに, ここは上の z と違っていようが一緒だろうが困ることはない)

$$\begin{aligned}
|f(z)g(z) - \alpha\beta| &= |f(z)(g(z)-\beta) + \beta(f(z)-\alpha)| \\
&\leq |f(z)||g(z)-\beta| + |\beta||f(z)-\alpha| \\
&\leq M|(g(z)-\beta)| + (|\beta|+1)|f(z)-\alpha| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + (|\beta|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)} = \varepsilon
\end{aligned}$$

となるので, $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = \alpha\beta$ となる. □

注意.

証明をよくみてみると, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall z \in D$, $|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)g(z) - \alpha\beta| < \varepsilon$ の順で (1 回づつ) 記号がでていることに注意せよ. 上の証明の中で, w は実は z にしても何も問題はないが, 定義の記号が順番通りに出ていることを強調したかったので, わざと w で書いた (だから, w のところは z で書いても間違いではない).

解析学B 演習問題　(2012 年 10 月 30 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 6.1.

次の関数が $\mathbb{C}$ 上正則かどうかを調べ, 正則ならば導関数 f' を求めよ.

(1) $f(z) = \operatorname{Re} z = x \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$.

(2) $f(z) = \overline{z} \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$.

(3) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$.

(4) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$.

問題 6.2.

$f(z) = x^2 - y^2 + iv(x, y) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$ が $\mathbb{C}$ 上正則となるとき, $v(x, y)$ を一つ求めよ.

問題 6.1 の解答.

(1) $\mathbb{C}$ 上正則でない

(2) $\mathbb{C}$ 上正則でない

(3) $\mathbb{C}$ 上正則で $f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + 6xyi$

(4) $\mathbb{C}$ 上正則で $f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z)$.

□

問題 6.2 の解答.

$v(x, y) = 2xy$ など. □

問題 6.3 (問題 6.1 の類題)**.**

次の関数が $\mathbb{C}$ 上正則かどうかを調べ, 正則ならば導関数 f' を求めよ.

(1) $f(z) = \operatorname{Im} z = y \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$.

(2) $f(z) = |z|^2 \quad (z \in \mathbb{C})$.

(3) $f(z) = 5x + iy \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$.

(4) $f(z) = 2x^2 - 2y^2 + 4x + 3 + 4i(xy + y) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$.

(5) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + i(x^2y - y^3 - 2xy + i) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$.

問題 6.4.

$z_0 = a + bi \in \mathbb{C}$ とするとき, $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ を $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ で定義する. f が $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ 上正則であり, $f'(z) = -\dfrac{1}{(z - z_0)^2}$ となることを, Cauchy-Riemann の方程式を用いて示せ.

解析学B 演習問題 (2012年11月6日)

この週に限り, 得点は半分にして計算します. なお, 問題 7.1, 7.2, 7.3, 7.8 は期末テストに出すかもしれませんので, よく考えてみてください.

問題 7.1.

$z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, 1 の n 乗根, すなわち $z^n = 1$ のすべての解が

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}$$

の形で書けることを示せ (ヒント: de Moivre の定理を使う).

問題 7.2.

$(a+bi)^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ を $a^2 + b^2 = 1$ を仮定して (つまり $|a+bi| = 1$ として) 解くことにより, $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \cos(22.5^\circ)$ と $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sin(22.5^\circ)$ を求めよ.

問題 7.3.

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ を計算することにより, 三倍角の公式

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \quad \sin(3\theta) = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta$$

を導け.

問題 7.4 (ノートの定理 1.4)**.**

定理 1.2 と $\mathbb{R}$ の完備性を用いて, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{n,m\to\infty} |z_n - z_m| = 0 \Longrightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{は収束する}$$

を示せ. なお, $\displaystyle\lim_{n,m\to\infty} |z_n - z_m| = 0$ を正確に述べると $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (距離空間 $\mathbb{C}$ 上での)Cauchy 列, すなわち, $\forall\varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall n.m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N \Longrightarrow d(z_n, z_m) = |z_n - z_m| < \varepsilon$$

となることである.

問題 7.5 (ノートの定理 1.5, 距離空間, 位相空間のノートも参考にせよ)**.**

$F \subset \mathbb{C}$ が閉集合であることと, $F^c = \mathbb{C} \setminus F$ が開集合であることは同値であることを証明せよ.

問題 7.6 (ノートの定理 2.2, 微分積分学の教科書やノートも参考にせよ)**.**

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とする. $f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で連続であることと,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall z \in D \qquad |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

は同値であることを証明せよ.

問題 7.7 (ノートの定理 3.2, 微分積分学の教科書やノートも参考にせよ)**.**

$D, D' \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f = f(z) : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則, $g = g(w) : D' \to \mathbb{C}$ を D' 上正則とし, $f(D) \subset D'$ とする. このとき $F = g \circ f : D \to \mathbb{C}$ は D 上正則であり,

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dg}{dw}(f(z))\frac{df}{dz}(z) \quad (z \in D)$$

となることを示せ.

問題 7.8.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x + iy \in D)$ を D 上正則関数とする.

(1) u, v は調和関数, すなわち

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

を示せ.

(2) 次を示せ:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

問題 7.9.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x + iy \in D)$ を D 上正則関数とする.

$$(7.1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \end{aligned}$$

とおく (∂ と d が違うことに注意).

(1) f が正則であることと $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ が同値であることを示せ. さらに, このとき $f' = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ を示せ.

(2) 次を示せ.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} := \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2$$

問題 7.10 (難)**.**

問題 7.9 の記号をそのまま使う.

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}, \ \dfrac{\partial}{\partial y} = i\dfrac{\partial}{\partial z} - i\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ を示せ (ヒント: $z, \overline{z}$ をそれぞれ x, y で微分してみよ).

(2) (1) を用いて, (7.1) を導出せよ.

解析学 B 演習問題　(2012 年 11 月 13 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 8.1.

次の巾級数の収束半径を求めよ.

(1) $1 + z + 2z + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots$

(2) $1 - z + \dfrac{1}{2^2}z^2 - \dfrac{1}{3^2}z^3 + \cdots + (-1)^n\dfrac{1}{n^2}z^n + \cdots$

(3) $1 + \dfrac{1}{2}z + \dfrac{2}{3}z^2 + \dfrac{3}{4}z^3 + \cdots + \dfrac{n}{n+1}z^n + \cdots$

(4) $a, b, c > 0$ に対して,

$$1 + \frac{ab}{1c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2c(c+1)}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3c(c+1)(c+2)}z^3 + \cdots$$

問題 8.2.

$\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \dfrac{1}{\rho}\quad (n\to\infty)$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$ の収束半径を求めよ (ヒント: $w = z^2$ とおきかえてみよ).

問題 8.1 の解答.

収束半径はすべて 1(正しい漢字で書きましょう). □

問題 8.2 の (厳密な) 証明.

$w = z^2$ とおくと, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ となるから, $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \dfrac{1}{\rho}\quad (n\to\infty)$ より, $|w| < \rho$ なら収束, $|w| > \rho$ なら発散がわかる. $|w| = |z^2| = |z|^2$ だったから, $|z| < \sqrt{\rho}$ なら収束, $|z| > \sqrt{\rho}$ なら発散となる. よって, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$ の収束半径は $\sqrt{\rho}$ になる. □

解析学 B 演習問題　(2012 年 11 月 20 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 9.1.

$|z| < 1$ とするとき, 次の級数が表す関数は何か答えよ.

(1) $1 - z + z^2 - z^3 + \cdots\cdots + (-1)^n z^n + \cdots$.

(2) $z - z^2 + z^3 - z^4 + \cdots + (-1)^{n-1} z^n + \cdots$.

問題 9.2.

$U_1(0)$ で収束する巾級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が与えられ, $z \in U_1(0)$ に対して, $f'(z) = 0$ ならば, $f(z)$ は定数で c_0 に等しいことを示せ (ヒント: 定理 4.3 を繰り返し使い, $z = 0$ を代入してみよ).

問題 9.3.

$U_r(0)$ で収束する 2 つの巾級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ が $U_r(0)$ 上で同じ関数を表すならば, $c_n = d_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ となることを示せ (ヒント: 同じように定理 4.3 を繰り返し使い, $z = 0$ を代入してみよ).

問題 9.1 の解答.

(1) $\dfrac{1}{1+z}$

(2) $\dfrac{z}{1+z}$

□

問題 9.2 の厳密な証明.

$\forall z \in U_1(0)$ に対して $f'(z) = 0$ だから, 両辺 z で微分することにより, $\forall k \in \mathbb{N}$ と $\forall z \in U_1(0)$ に対して, $f^k(z) = 0$ となることに注意しておく. さて, $k = 1$ のとき定理 4.3 を使うと

$$f'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots + nc_n z^{n-1} + \cdots$$

となるから, $z = 0$ を代入すると, $0 = f'(0) = c_1$ となり, $c_1 = 0$ がわかる.

次に $k = 2$ のときに定理 4.3 を 2 回使うと,

$$f'(z) = 2c_2 + 3 \cdot 3c_3 z + \cdots + n(n-1)c_n z^{n-2} + \cdots$$

となるから, $z = 0$ を代入すると, $0 = f''(0) = 2c_2$ となり, $c_2 = 0$ がわかる.

以下, 同じように計算する. $k \in \mathbb{N}$ に対して, 定理 4.3 を k 回使うと

$$f^{(k)}(z) = k!c_k + (k+1)k \cdots 3 \cdot 2c_{k+1} z + \cdots + n(n-1) \cdots (n-k+1)c_n z^{n-k} + \cdots$$

となるから, $z = 0$ を代入すると, $0 = f^{(k)}(0) = k!c_k$ となり, $c_k = 0$ がわかる. □

問題 9.3 の簡単な証明.

$z \in U_R(0)$ に対して $F(z) = f(z) - g(z)$ とおいて $F(z) = 0$ を示せばよい. f と g が同じ関数を表すのだから, 特に $z \in U_R(0)$ に対して, $F'(z) = f'(z) - g'(z) = 0$ となるので, 問題 9.2 より $F(z) = c_0 - d_0$ となることがわかる. また, f と g が同じ関数を表すのだから $f(0) = g(0)$ となるはずなので, $c_0 = d_0$ となり, $F(z) = 0$ となることがわかる. □

解析学B 演習問題 (2012年11月27日)

学籍番号 名前

問題 10.1.

次の等式を示せ.

(1) $e^{2\pm 3\pi i} = -e^2$.

(2) $\exp\left(\dfrac{2+\pi i}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{e}{2}}(1+i)$.

(3) $e^{z+2\pi i} = e^z \quad (z \in \mathbb{C})$.

(4) $e^{z+\pi i} = -e^z \quad (z \in \mathbb{C})$.

問題 10.2.

次の集合をGauss平面に図示せよ (見やすく書くこと).

(1) $\{z \in \mathbb{C} : e^z \in \mathbb{R}\}$.

(2) $\{z \in \mathbb{C} : e^z$ は純虚数$\}$.

解析学B 演習問題　(2012年12月4日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 11.1.

$z \in \mathbb{C}$ に対して, $\sin(z+2\pi) = \sin z$ を示せ.

問題 11.2.

$z \in \mathbb{C}$ に対して, $(\sin z)' = \cos z$ を示せ.

問題 11.3.

$z, w \in \mathbb{C}$ に対して, $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ を示せ (省略せずに書くこと).

問題 11.4.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対して, $\cos z = u(x,y) + iv(x,y)$ と書いたときに, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ を求めよ (ヒント: 指数関数を使う).

問題 11.4 の解答.

$\cos z = \dfrac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x + \dfrac{i}{2}(e^{-y} - e^y)\sin x$ $\square$

解析学B 演習問題　(2012 年 12 月 11 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 12.1.
$\mathrm{Log}(-2+i2\sqrt{3})$ を求めよ.

問題 12.2.
$z \in \mathbb{C}$ に対して, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ を示せ.

問題 12.3.
$\cos z = 2$ となる $z \in \mathbb{C}$ を求めよ. $x \in \mathbb{R}$ のときは $|\cos x| \leq 1$ であったが, $z \in \mathbb{C}$ のときは, $|\cos z| \leq 1$ ではない.

問題 12.1 の解答.
$\mathrm{Log}(-2+i2\sqrt{3}) = 2\log 2 + \dfrac{2}{3}\pi.$ □

問題 12.3 の解答.
$\cos z = 2$ とすると, $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2$ より, $e^{iz}+e^{-iz} = 4$. そこで, $w = e^{iz}$ とおくと, $w + \dfrac{1}{w} = 4$ だから, $w^2 - 4w + 1 = 0$. これを解くと $w = 2 \pm \sqrt{3}$ が得られる.

$z = x + iy$ と書くと, $iz = ix - y$ だから $w = e^{-y}e^{ix}$ となる. よって,

$$e^{-y} = e^{-ix}(2 \pm \sqrt{3})$$

がわかるが, 右辺は正の実数でなければならないから, $e^{-ix} = 1$ となる. よって, $m \in \mathbb{N}$ に対して $x = 2m\pi$ となることがわかる. このとき $e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3}$ だから, 両辺 log をとれば $-y = \log(2 \pm \sqrt{3})$. すなわち, $m \in \mathbb{N}$ に対して $z = 2m\pi - i\log(2 \pm \sqrt{3})$ となることがわかる.

なお, $z = 2m\pi + i\log(2 \pm \sqrt{3})$ となっても正しい. 実際

$$\log(2 \pm \sqrt{3}) = -\log\left(\frac{1}{2 \pm \sqrt{3}}\right) = -\log\left(2 \mp \sqrt{3}\right)$$

となるからである. □

解析学 B 試験対策問題

ここにあるのは, 複素関数論に関する, 今までの演習問題とその類題などをよせ集めたものである (講義では距離空間や巾級数の話題も扱ったが, これらに関する問題は試験で出すつもりはない). 易しい問題と難しい問題をあまり区別せずに並べてある. まずは**わかる問題とわからない問題を区別することからはじめてみよ.** 次に, わからない問題に対して, **まずはノートや参考書などをみながらでよいから, じっくり考えてみよ. その考えた時間は決して無駄にはならない.** 残念ながら, 考えた時間と数学の理解度は比例してはくれない (と思われる) が, **わからなくてもいいからとにかく考えることが, 数学の理解への一番の近道である.** なお, この講義では**とにかく計算できること**を主眼においている. **複素数の積と Gauss 平面との関係**, **Cauchy-Riemann の方程式**, **Euler の公式**はよく復習しておくこと.

複素数と Gauss 平面に関する問題

問題 13.1.
次を $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形で表せ.

(1) $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
(2) $\dfrac{1+i}{2i}$
(3) $(1+\sqrt{3}i)^6$
(4) $(\sqrt{3}+i)^6$
(5) $(1+i)^5$
(6) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$
(7) $(\sqrt{3}+i)^6(1+i)^5$
(8) $(1+i)^5(1+\sqrt{3}i)^6$

問題 13.2.
次を Gauss 平面に図示し, 極形式を求めよ.

(1) $-1+\sqrt{3}i$
(2) $1-i$
(3) $-2\sqrt{3}-2i$
(4) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

問題 13.3.
$z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ に対して, 1 の n 乗根, すなわち $z^n=1$ のすべての解が

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\dots,\alpha^{n-1}$$

の形で書けることを示せ (ヒント: de Moivre の定理を使う).

問題 13.4.

$(a+bi)^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ を $a^2+b^2=1$ を仮定して (つまり $|a+bi|=1$ として) 解くことにより, $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \cos(22.5°)$ と $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sin(22.5°)$ を求めよ.

問題 13.5.

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ を計算することにより, 三倍角の公式

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \quad \sin(3\theta) = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta$$

を導け. また, $\cos(4\theta), \cos(5\theta), \sin(4\theta), \sin(5\theta)$ を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表せ.

Cauchy-Riemann の方程式を使う問題

問題 13.6.

次の関数が $\mathbb{C}$ 上正則かどうかを調べ, 正則ならば導関数 f' を求めよ.

(1) $f(z) = \operatorname{Re} z = x \quad (z = x+iy \in \mathbb{C})$.
(2) $f(z) = \overline{z} \quad (z = x+iy \in \mathbb{C})$.
(3) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \quad (z = x+iy \in \mathbb{C})$.
(4) $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y) \quad (z = x+iy \in \mathbb{C})$.
(5) $f(z) = \operatorname{Im} z = y \quad (z = x+iy \in \mathbb{C})$.
(6) $f(z) = |z|^2 \quad (z \in \mathbb{C})$.
(7) $f(z) = 5x + iy \quad (z = x+iy \in \mathbb{C})$.
(8) $f(z) = 2x^2 - 2y^2 + 4x + 3 + 4i(xy + y) \quad (z = x+iy \in \mathbb{C})$.
(9) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + i(x^2y - y^3 - 2xy + i) \quad (z = x+iy \in \mathbb{C})$.

問題 13.7.

$f(z) = x^2 + x - y^2 + iv(x,y) \quad (z = x+iy \in \mathbb{C})$ が $\mathbb{C}$ 上正則となるとき, $v(x,y)$ を一つ求めよ.

問題 13.8.

$z_0 = a+bi \in \mathbb{C}$ とするとき, $f : \mathbb{C}\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ を $z \in \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ に対して $f(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ で定義する. f が $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ 上正則であり, $f'(z) = -\dfrac{1}{(z-z_0)^2}$ となることを, Cauchy-Riemann の方程式を用いて示せ.

問題 13.9.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x+iy \in D)$ を D 上正則関数とする.

(1) u, v は調和関数, すなわち

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

を示せ.

(2) 次を示せ:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

初等関数に関する問題

問題 13.10.

Euler の公式や指数法則を使って, 次の等式を示せ.

(1) $e^{2\pm3\pi i} = -e^2$.

(2) $\exp\left(\dfrac{2+\pi i}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{e}{2}}(1+i)$.

(3) $e^{z+2\pi i} = e^z \quad (z \in \mathbb{C})$.

(4) $e^{z+\pi i} = -e^z \quad (z \in \mathbb{C})$.

問題 13.11.

Euler の公式を用いて, $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ を用いて表せ. この結果を利用して次を示せ.

(1) (三角関数の周期性) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $\sin(z+2\pi) = \sin z$, $\cos(z+2\pi) = \cos z$.

(2) (三角関数の性質) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

(3) (三角関数の微分) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$

(4) (加法定理) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w, \quad \cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w.$$

問題 13.12.

$z \in \mathbb{C}$ に対して, $\cosh z$ と $\sinh z$ の定義を述べよ. 定義を用いて, 次を示せ. 特に微分と加法定理については, 定義から直接計算する方法と, 「双曲線関数と三角関数」の結果を使う方法の 2 通りで計算してみよ.

(1) (双曲線関数と三角関数) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $\cosh(iz) = \cos z$, $\sinh(iz) = i\sin z$, $\cos(iz) = \cosh z$, $\sin(iz) = i\sinh z$.

(2) (双曲線関数の性質) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

(3) (双曲線関数の微分) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $(\sinh z)' = \cosh z$, $(\cosh z)' = \sinh z$

(4) (双曲線関数の加法定理) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sinh(z+w) = \sinh z\cosh w + \cosh z\sinh w, \quad \cosh(z+w) = \cosh z\cosh w + \sinh z\sinh w.$$

問題 13.13.

$\cos z = 2$ となる $z \in \mathbb{C}$ を求めよ. $x \in \mathbb{R}$ のときは $|\cos x| \leq 1$ であったが, $z \in \mathbb{C}$ のときは, $|\cos z| \leq 1$ ではない.

問題 13.14.

対数関数について, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Log}(-2+i\sqrt{3})$, $\mathrm{Log}(1+i)$ を求めよ.

(2) $e^{\mathrm{Log}\, z} = z$ を示せ.

(3) $\mathrm{Log}\, e^z \neq z$ となる $z \in \mathbb{C}$ を一つ答えよ.