

解析学 B 定期試験問題

平成 25 年 1 月 29 日 第 3 時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること

以下, $i = \sqrt{-1}$ は常に虚数単位とする. 「答えのみでよい」と書かれていない問題については, 途中計算や理由も書くこと.

問題 1.

次の各問いに答えよ.

(1) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5$ を $a + bi$ の形で表せ (答えのみでよい).

(2) $(a+bi)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ を $a^2+b^2 = 1$ を仮定して (つまり $|a+bi| = 1$ として) 解くことにより, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos(22.5^\circ)$ を求めよ. ただし, 二重根号はそのままでもよいが分母は有理化して答えよ.

(3) $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $\cos(3\theta)$ を $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を用いて表せ.

問題 2.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ とする. 次の各問いに答えよ.

(1) 次の関数が \mathbb{C} 上正則かどうかを答えよ.

(a) $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy - 3)$.

(b) $f(z) = \operatorname{Im} z = y$.

(c) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$.

(d) $f(z) = |z|^2$.

(2) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数とし, \mathbb{R}^2 上の実数値関数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ で $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と書いたときに u が調和関数であること, すなわち

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を示せ.

問題 3.

$\theta \in \mathbb{R}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $e^{i\theta}$ を $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を用いて表せ (答えのみでよい).
- (2) $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ を用いて表せ.
- (3) $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ に対して加法定理

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

を示せ.

以下余白, 計算用紙として使ってよい