解析学 A 及び演習 第 1 回小テスト

2018 年 5 月 25 日 第 4 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を認める. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

全ての問題に答えよ. 一つの問題につき, 一枚の解答用紙 (両面使ってよい) を用いること.

問題 1.

集合 Ω と集合 Ω 上の集合族 Σ, Σ 上の関数 μ は次をみたすとする.

有限加法族

1. $\Omega \in \Sigma$.
2. 任意の $A \in \Sigma$ に対して $A^c = \Omega \setminus A \in \Sigma$.
3. 任意の**有限個**の $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \Sigma$ に対して, $\bigcup_{k=1}^N A_k \in \Sigma$.

有限加法的測度

1. すべての $A \in \Sigma$ に対して, $0 \le \mu(A) \le +\infty$.
2. $\mu(\emptyset) = 0$.
3. (**有限加法性**) 任意の有限個の $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_N \in \Sigma$ と $k, l \in \mathbb{N}$ に対して, $k \neq l$ ならば $A_k \cap A_l = \emptyset$ をみたすとき,
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^N \mu(A_k)$$
となる.

任意の**有限個**の $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_N \in \Sigma$ に対して,

$$(*) \qquad \mu\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^N \mu(B_k), \qquad \bigcup_{k=1}^l A_k = \bigcup_{k=1}^l B_k \quad (1 \le \forall l \le N)$$

が成り立つような Σ に属する集合 $B_1, B_2, \ldots, B_N \in \Sigma$ を構成し, $(*)$ が成り立つことを証明せよ.

問題 2.

集合 $\Omega \subset \mathbb{R}$ と $a \in \Omega$ に対して, Dirac のデルタ測度 δ_a が可測空間 $(\Omega, 2^\Omega)$ 上の測度になることを示せ. さらに, $(\Omega, 2^\Omega, \delta_a)$ は σ-有限となることを示せ.

問題 3.

(Ω, Σ, μ) を測度空間とする．任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ に対して，$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ が成り立つとき

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \tag{1.1}$$

は正しいか？ 正しければ証明し，正しくなければ反例をあげて一般には成り立たないことを説明せよ．

問題 4.

$(\mathbb{R}, \Sigma, m)$ を Lebesgue 測度空間とする．このとき，$-\infty < b < a < \infty$ に対して $m^*([a, b]) = b - a$ を示せ．