解析学及び演習 A 第 2 回小テスト

2018 年 7 月 20 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を認める．解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

全ての問題に答えよ. 一つの問題につき, 一枚の解答用紙 (両面使ってよい) を用いること.

問題 1.

測度空間 (Ω, Σ, μ) の可測関数全体のなす集合を $\mathscr{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$ と書く. つまり,

$$\mathscr{M}(\Omega, \Sigma, \mu) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ は}(\Omega, \Sigma, \mu)\text{上の可測関数} \}$$

と置く. このとき, $f, g \in \mathscr{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して, $f + g \in \mathscr{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $cf \in \mathscr{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$ を示せ.

問題 2.

測度空間 (Ω, Σ, μ) の可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が可積分であることと, f_+, f_- の両方が可積分であることが同値であることを示せ.

問題 3.

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測集合の列 $E_n \in \Sigma$ $(n \in \mathbb{N})$ は

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j), \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \Omega$$

をみたすとする. 可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ は $f \geq 0$ をみたすとする. このとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} f \chi_{E_k} \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$$

を示せ.

問題 4.

可積分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $s > 0$ に対して

$$\mathscr{L}[f](s) := \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

を f の **Laplace 変換**という.

(1) $\mathscr{L}[f](s) \to 0$ $(s \to \infty)$ を示せ.

(2) f は微分可能かつ有界を仮定する. このとき, すべての $s > 0$ に対して $\mathscr{L}[f'](s) = -f(0) + \lambda \mathscr{L}[f](s)$ が成り立つことを示せ.

問題 5.

可積分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y) g(y)\, dy$$

を f と g の **たたみこみ (Convolution)** という. 以下, f, g は連続として (つまり, Riemann 積分の計算手法はすべて認めて) 次の問いに答えよ.

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して, $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ を示せ.

(2) f, g が連続な可積分関数であれば,

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx \right)$$

を示せ.

(3) f は C^1 級で f' は有界, g は C 級で可積分関数とする. このとき,

$$(f * g)'(x) = (f' * g)(x)$$

を示せ (ヒント: 微分の定義に戻って, 極限と積分の順序交換ができるかどうかを調べる).