解析学及び演習 A 試験問題

2018 年 7 月 30 日 第 1 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1.

次の各問いに答えよ.

(1) $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ が Ω 上の σ-加法族であることの定義を書け.
(2) 可測空間 (Ω, Σ) に対し, $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ が Ω 上の測度であることの定義を書け.
(3) 測度空間 (Ω, Σ, μ) が σ-有限であることの定義を書け.
(4) 測度空間 (Ω, Σ, μ) の測度 μ が完備であることの定義を書け.
(5) $\mu^* : 2^{\Omega} \to [0, \infty]$ が集合 Ω 上の (Carathèodory の) 外測度であることの定義を書け.
(6) 集合 Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, $A \subset \Omega$ が外測度 μ^* について可測集合であることの定義を書け.
(7) $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, (1 次元)Lebesgue 外測度 $m^*(A)$ の定義を書け.
(8) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が可測関数であることの定義を書け.
(9) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の単関数 $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ $(c_k > 0,\ E_k \in \Sigma)$ について, 積分 $\int_{\Omega} f \, d\mu$ の定義を書け.
(10) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の積分 $\int_{\Omega} f \, d\mu$ の定義を書け.
(11) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の積分の順序保存性とは何か？ 主張を書け.
(12) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の積分の線形性とは何か？ 主張を書け.
(13) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数列 $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して単調収束定理の主張を書け.
(14) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数列 $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して Fatou の補題の主張を書け.
(15) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数列 $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して Lebesgue の優収束定理の主張を書け.

(16) $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を測度空間, $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ を直積測度空間とする. 直積測度空間上の可測関数 $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ に対して, 積分の順序交換

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$

が成り立つための可測関数 f に対する十分条件を一つ述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

(Ω, Σ, μ) を測度空間とする. 次の主張が正しいか正しくないかを述べよ.

(1) 任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ に対して, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ が成り立つとき

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

が成り立つ.

(2) 空集合は可測集合でない.

(3) Ω 上の可測関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対し, 各点収束する極限関数 $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ が存在すれば, f は可測関数となる.

(4) Ω 上の可測関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対し, 各点収束する極限関数 $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ が存在するとき

$$\int_{\Omega} f \, d\mu \geq \limsup_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \, d\mu$$

が成り立つ.

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の直線 l で Lebesgue 可測集合とならないものが存在する.

問題 3.

次の問いに答えのみを答えよ.

(1) m を 1 次元 Lebesgue 測度とする. $m(\mathbb{Q})$ を求めよ.

(2) 広義 Riemann 積分可能であるが, Lebesgue 可積分でない関数の例をあげよ (定義域をきちんと明記すること).

(3) $D := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ とするとき, Lebesgue 積分 $\displaystyle\int_0^1 x \chi_D(x) \, dx$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n e^{x^n} \, dx$ を求めよ.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(nx) e^{-nx^2} \, dx$ を求めよ.

問題 4.

Riemann 積分と Lebesgue 積分の違いについて, 知ることを述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.