解析学 **A** および演習 演習問題 (2018 年 4 月 13 日)

今週は演習提出なし.

問題 1.1 (宿題, 微積の演習書に似た問題があるはず)**.**

次の積分を計算せよ (採点は答えのみしか確認しない).

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ (ヒント: $+4-4=0$ を考えたあとに, $\sqrt{x^2+4}=t-x$ とおく).

(2) $\displaystyle\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$ (ヒント: $\sqrt{a^2-x^2}$ の形をみたら, 半径 a の円を疑え).

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \quad (a>0)$ (ヒント: $a=1$ のときに注意)

(5) $\displaystyle\int_D \sqrt{x}\,dxdy, \quad (D: x^2+y^2 \le x)$

(6) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)\,dxdy, \quad (D: \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ a,b>0)$

(7) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)\,dxdy, \quad (D: x^2+y^2 \le a^2,\ a>0)$

(8) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, (ヒント: $\displaystyle\int_{\{x,y\ge 0\}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を考える)

問題 1.2 (宿題)**.**

次の問いに調べよ.

(1) 閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上の関数列 $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ が関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上各点収束することの定義を述べよ.

(2) 閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上の関数列 $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ が関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上一様収束することの定義を述べよ.

(3) 閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上の関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の Riemann 下積分と Riemann 上積分の定義を述べよ. 分割の定義は認めてよい. 2016 年度の水野の講義ノートを参照せよ.

(4) 閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上の関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が Riemann 積分可能となるための十分条件を一つのべよ.

その他, 講義ノートの問題 1.0.1, 1.0.2, 1.0.3 を考えてみよ.

解析学 **A** および演習 演習問題　(2018 年 4 月 20 日)

問題 2.1 (提出課題)**.**
命題 1.1.1 の証明を書け.

問題 2.2 (提出課題)**.**
Ω を集合とする. このとき, $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ が Ω 上の σ-加法族であることの定義を書け.

注意 2.1.
講義では, 問題 の Ω として Ω が実数上の開区間であるとしたが, σ-加法族であることの定義には Ω が実数上の開区間であることは必要ない. つまり, 講義で説明した Ω は実は集合であればなんでもよい.

問題 2.3 (宿題)**.**
集合 Ω に対し, 次の各問いに答えよ.

(1) $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ が Ω 上の σ-加法族であることの定義を書け.
(2) 命題 1.1.1 の主張を書け (証明は書かなくてよい).

解析学 A および演習 演習問題 (2018 年 4 月 27 日)

問題 3.1 (提出課題)**.**

命題 1.1.3 の証明を書け.

問題 3.2 (宿題)**.**

次の各問いに答えよ.

(1) 可測空間 (Ω, Σ) に対し, $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ が Ω 上の測度であることの定義を書け.

(2) 命題 1.1.3 の主張を書け (証明は書かなくてよい).

(3) 測度空間 (Ω, Σ, μ) が σ-有限であることの定義を書け.

(4) 測度空間 (Ω, Σ, μ) の測度 μ が完備であることの定義を書け.

その他, 講義ノートの問題 1.1.1–10 を考えてみよ.

解析学及び演習 **A** 演習問題　(2018 年 5 月 11 日)

問題 4.1 (提出課題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) $\mu^* : 2^\Omega \to [0,\infty]$ が集合 Ω 上の (Carathèodory の) 外測度であることの定義を書け.
(2) 集合 Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, $A \subset \Omega$ が外測度 μ^* について可測集合であることの定義を書け.

問題 4.2 (提出課題)**.**
命題 1.1.4 の証明を書け.

問題 4.3 (宿題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) $\mu^* : 2^\Omega \to [0,\infty]$ が集合 Ω 上の (Carathèodory の) 外測度であることの定義を書け.
(2) 集合 Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, $A \subset \Omega$ が外測度 μ^* について可測集合であることの定義を書け.
(3) 講義ノートの命題 1.1.4 の主張を書け (証明は書かなくてよい).
(4) 講義ノートの定理 1.1.1 の主張を書け (証明は書かなくてよい). 書かなくてもよいが, 主張にでてくる σ-加法族と完備測度空間の定義を確認しておくこと.

その他, 講義ノートの問題 1.1.11 を考えてみよ.

解析学及び演習 A 演習問題　(2018 年 5 月 18 日)

問題 5.1 (提出課題)**.**
次の問いに答えよ.

(1) 開区間 $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \Omega$ に対して, (1 次元)Lebesgue 外測度 $m^*(A)$ の定義を書け. 書かなくてもよいが, 外測度の定義, 外測度について可測集合について復習すること.

(2) Ω 上の Borel 集合族の定義と Borel 測度の定義を書け.

問題 5.2 (提出課題)**.**
定理 1.1.2 の証明を書け.

問題 5.3 (宿題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 開区間 $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \Omega$ に対して, (1 次元)Lebesgue 外測度 $m^*(A)$ の定義を書け. 書かなくてもよいが, 外測度の定義, 外測度について可測集合について復習すること.

(2) Ω 上の Borel 集合族の定義と Borel 測度の定義を書け.

(3) m を 1 次元 Lebesgue 測度とするとき, 次の値を求めよ (答えのみでよい).

(a) $m((1, 3))$

(b) $m(\{4\})$

(c) $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[k, k + \frac{1}{2^k}\right]\right)$

(d) $m(\mathbb{Q})$

その他, 講義ノートの問題 1.1.12 を考えてみよ.

解析学及び演習 A 演習問題　(2018 年 6 月 1 日)

問題 6.1 (提出課題)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が可測関数であることの定義を述べよ.

問題 6.2 (提出課題)**.**
命題 1.2.2 の証明を書け.

問題 6.3 (宿題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が可測関数であることの定義を述べよ.
(2) 命題 1.2.1 の主張を書け.
(3) 命題 1.2.2 の主張を書け.
(4) 命題 1.2.4 の主張を書け.

その他, 講義ノートの問題 1.2.1–8 を考えてみよ.

解析学及び演習 **A** 演習問題　(2018 年 6 月 8 日)

問題 7.1 (提出課題)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の測度 μ に関する (Lebesgue) 積分の定義を, 単関数の積分の定義も含めて書け.

問題 7.2 (提出課題)**.**
命題 1.2.6 の証明を書け.

問題 7.3 (宿題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が単関数であることの定義を書け.
(2) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値単関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の Lebesgue 積分の定義を書け.
(3) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の測度 μ に関する (Lebesgue) 積分の定義を書け.
(4) Lebesgue 積分の順序保存性とは何か？ 主張を書け.

その他, 講義ノートの問題 1.2.9, 10 を考えてみよ.

解析学及び演習 **A** 演習問題　(2018 年 6 月 15 日)

問題 8.1 (提出課題)**.**
　非負値可測関数列に対する単調収束定理の主張 (定理 1.3.1) を書け.

問題 8.2 (提出課題)**.**
　講義ノート例 1.3.4 の議論を写せ. f_n が f に $[0,1]$ 上各点収束すること, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負値単調増加関数列であることをきちんと説明してみよ.

問題 8.3 (宿題)**.**
　次の各問いに答えよ.

(1) 測度空間 (Ω,Σ,μ) 上の非負値可測関数列 $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$ に対する単調収束定理の主張 (定理 1.3.1) を書け.

問題 8.4 (宿題)**.**
　講義ノート例 1.3.4 の議論を写せ. (f_n が f に $[0,1]$ 上各点収束すること, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負値単調増加関数列であることをきちんと説明するとなおよい)

　その他, 講義ノートの問題 1.3.1–5 を考えてみよ.

解析学及び演習 **A** 演習問題　(2018 年 6 月 22 日)

問題 9.1 (提出課題)**.**
Lebesgue 積分の線形性とは何か？ 主張を書け.

問題 9.2 (提出課題)**.**
講義ノート例 1.3.5 の議論を写せ. f_n が f に $[0,1]$ 上各点収束すること, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負値単調増加関数列であることをきちんと説明してみよ.

問題 9.3 (宿題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の積分の線形性とは何か？ 主張を書け.
(2) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数列 $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ に対する単調収束定理の主張 (定理 1.3.1) を書け.

問題 9.4 (宿題)**.**
講義ノート例 1.3.5 の議論を写せ. (f_n が f に $[0,1]$ 上各点収束すること, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負値単調増加関数列であることをきちんと説明するとなおよい)

その他, 講義ノートの問題 1.3.6–9 を考えてみよ.

解析学及び演習 **A** 演習問題　(2018 年 6 月 29 日)

問題 10.1 (提出課題)**.**
講義ノート例 1.3.7 の議論を写せ. (f_n が f に $[0,1]$ 上各点収束すること, $|f(x)| \leq g(x)$ が成り立つことを説明するとなおよい).

問題 10.2 (提出課題)**.**
講義ノート例 1.3.8 の議論を写せ. (f_n が f に $[0,1]$ 上各点収束すること, $|f(x)| \leq g(x)$ が成り立つことを説明するとなおよい).

問題 10.3 (宿題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Fatou の補題とは何か？ 主張を書け.
(2) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Lebesgue の優収束定理とは何か？ 主張を書け.

問題 10.4 (宿題)**.**
講義ノート例 1.3.7 の議論を写せ. (f_n が f に $[0,1]$ 上各点収束すること, $|f(x)| \leq g(x)$ が成り立つことを説明するとなおよい).

問題 10.5 (宿題)**.**
講義ノート例 1.3.8 の議論を写せ. (f_n が f に $[0,1]$ 上各点収束すること, $|f(x)| \leq g(x)$ が成り立つことを説明するとなおよい).

その他, 講義ノートの問題 1.3.10–12 を考えてみよ.