解析学および演習 A 演習問題　(第 1 回)

学生番号　　　　　名前

問題 1.1.

次の積分を計算せよ (採点は答えのみしか確認しない).

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$　(ヒント: $+4-4=0$ を考えたあとに, $\sqrt{x^2+4}=t-x$ とおく).

(2) $\displaystyle\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$　(ヒント: $\sqrt{a^2-x^2}$ の形をみたら, 半径 a の円を疑え).

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx \quad (a>0)$　(ヒント: $a=1$ のときに注意)

(5) $\displaystyle\int_D \sqrt{x}\,dxdy, \quad (D: x^2+y^2 \le x)$

(6) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)\,dxdy, \quad (D: \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ a,b>0)$

(7) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)\,dxdy, \quad (D: x^2+y^2 \le a^2,\ a>0)$

(8) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$　(ヒント: $\displaystyle\int_{\{x,y\ge 0\}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を考える)

問題 1.2.

次の問いを答えよ.

(1) 閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上の関数列 $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ が関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上各点収束することの定義を述べよ.

(2) 閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上の関数列 $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ が関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上一様収束することの定義を述べよ.

(3) 閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上の関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の Riemann 下積分と Riemann 上積分の定義を述べよ. 分割の定義は認めてよい.

(4) 閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上の関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が Riemann 積分可能となるための十分条件を一つのべよ.

解析学および演習A 演習問題　(第2回)

学生番号　　　　　名前

問題 2.1.

集合 Ω に対し, $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ が Ω 上の σ-加法族であることの定義を書け.

問題 2.2.

(Ω, Σ) を可測空間とする. 次を示せ.

(1) $\emptyset \in \Sigma$. すなわち, 空集合は可測集合となる.

(2) 任意の可算個の $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ に対して $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$, すなわち, 可算個の可測集合の共通部分もまた可測集合となる.

(3) 任意の $A, B \in \Sigma$ に対して, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \Sigma$, すなわち任意の二つの可測集合の和集合, 共通部分, 差集合はまた可測集合となる.

注意 2.1.

講義では, 問題 の Ω として Ω が実数上の開区間であるとしたが, σ-加法族であることの定義には Ω が実数上の開区間であることは必要ない. つまり, 講義で説明した Ω は実は集合であればなんでもよい.

解析学および演習 演習問題 A　(第 3 回)

学生番号　　　　　名前

問題 3.1.

次の各問いに答えよ.

(1) 可測空間 (Ω, Σ) に対し, $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ が Ω 上の測度であることの定義を書け.

(2) 測度空間 (Ω, Σ, μ) が σ-有限であることの定義を書け.

(3) 測度空間 (Ω, Σ, μ) の測度 μ が完備であることの定義を書け.

問題 3.2.

(Ω, Σ, μ) を測度空間とするとき, 次を示せ.

(1) 任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ に対して, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ ならば

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

(2) 任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ に対して, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ かつ $\mu(A_1) < \infty$ が成り立つとき

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

解析学及び演習 A 演習問題　(第 4 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 4.1.

次の各問いに答えよ.

(1) $\mu^* : 2^\Omega \to [0,\infty]$ が集合 Ω 上の (Carathèodory の) 外測度であることの定義を書け.

(2) 集合 Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, $A \subset \Omega$ が外測度 μ^* について可測集合であることの定義を書け.

(3) 講義ノートの定理 2.18 の主張を書け (証明は書かなくてよい).

問題 4.2.

$\Sigma = 2^{\mathbb{R}}$ とした可測空間 $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ と計数測度 μ に対し, 次の値を求めよ (答えのみでよい).

(1) $\mu(\mathbb{R})$

(2) $\mu(\{100$ 以下の素数 $\})$

問題 4.3.

$\Sigma = 2^{\mathbb{R}}$ とした可測空間 $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ と $0 \in \mathbb{R}$ を台にもつ Dirac のデルタ測度 δ_0 について, 次が正しいか正しくないか答えよ (答えのみでよい).

$$\delta_0(\mathbb{R}) = 1, \quad \delta_0(\mathbb{Q}) = 0, \quad \delta_0((-1,1)) = 2, \quad \delta_0([0,\infty)) = 1.$$

問題 4.4.

Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, 次を示せ.

(1) $A \subset \Omega$ に対して $\mu^*(A) = 0$ ならば A は μ^* について可測集合となる.

(2) $A \subset \Omega$ が μ^* について可測集合ならば $A^c = \Omega \setminus A$ も μ^* について可測集合となる.

解析学及び演習 A 演習問題　(第 5 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 5.1.

次の問いに答えよ.

(1) 開区間 $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \Omega$ に対して, (1 次元)Lebesgue 外測度 $m^*(A)$ の定義を書け. 書かなくてもよいが, 外測度の定義, 外測度について可測集合について復習すること.

(2) Ω 上の Borel 集合族の定義と Borel 測度の定義を書け.

(3) m を 1 次元 Lebesgue 測度とするとき, 次の値を求めよ (答えのみでよい).

(a) $m((1, 3))$

(b) $m(\{4\})$

(c) $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[k, k+\frac{1}{2^k}\right]\right)$

(d) $m(\mathbb{Q})$

問題 5.2.

m^* を一次元 Lebesgue 外測度とするとき, $-\infty < a < b < \infty$ に対して, $m^*((a, b)) = b - a$ となることを示せ.

解析学及び演習 **A** 演習問題　(第 7 回)

学生番号　　　　　名前

問題 7.1.

次の各問いに答えよ.

(1) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が可測関数であることの定義を述べよ.

(2) 命題 3.2 の主張を書け.

(3) 命題 3.3 の主張を書け.

問題 7.2.

命題 3.2 の証明を書け.

解析学及び演習 **A** 演習問題　(第 8 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 8.1.

次の各問いに答えよ.

(1) 命題 3.4 の主張を書け.

(2) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の測度 μ に関する (Lebesgue) 積分の定義を書け.

(3) Lebesgue 積分の順序保存性とは何か？ 主張を書け.

問題 8.2.

$\alpha > 0$ に対して, 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

解析学及び演習 A 演習問題　(第 9 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 9.1.

非負値可測関数列に対する単調収束定理の主張 (定理 4.4) を書け.

問題 9.2.

講義ノート例 4.8 の議論を写せ. f_n が f に $(0,2)$ 上各点収束すること, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負値単調増加関数列であることをきちんと説明してみよ.

問題 9.3.

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測集合 $A \in \Sigma$ に対して,

$$\int_{\Omega} \chi_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A)$$

となることを定義に基づいて示せ.

解析学及び演習 A 演習問題　(第 10 回)

学生番号　　　　　名前

問題 10.1.

次の各問いに答えよ.

(1) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の積分の線形性とは何か？ 主張を書け.

(2) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数列 $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ に対する単調収束定理の主張 (定理 4.13) を書け.

問題 10.2.

講義ノート例 4.14 の議論を写せ. (f_n が f に $(0,1)$ 上各点収束すること, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負値単調増加関数列であることをきちんと説明するとなおよい)

解析学及び演習 A 演習問題　(第 11 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 11.1.

次の各問いに答えよ.

(1) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Fatou の補題とは何か？ 主張を書け.

(2) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Lebesgue の優収束定理とは何か？ 主張を書け.

問題 11.2.

講義ノート例 4.16 の議論を写せ. (f_n が f に $(0,1)$ 上各点収束することを説明するとなおよい).

解析学及び演習 A 演習問題　(第 12 回)

学生番号　　　　　名前

問題 12.1.

講義ノート例 4.18 の議論を写せ. (f_n が f に $(0,1)$ 上各点収束すること, $|f_n(x)| \le g(x)$ が成り立つことを説明するとなおよい).

問題 12.2.

講義ノート例 4.19 の議論を写せ. (f_n が f に $(0,1)$ 上各点収束すること, $|f_n(x)| \le g(x)$ が成り立つことを説明するとなおよい).

解析学及び演習 A 演習問題 (第 13 回)

学生番号　　　　　　　名前

問題 13.1.

測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ に対して, 直積外測度 $(\mu_1 \times \mu_2)^*$ の定義を述べよ.

問題 13.2.

二次元 Lebesgue 外測度 m_2^* の定義を述べよ.