解析学および演習B 演習問題　(2018 年 9 月 20 日)

学生番号　　　　　　名前

問題 1.1.

$k, l \in \mathbb{N}$ に対して, 次の積分を計算せよ.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx)\,dx, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx$$

解析学および演習B 演習問題　(2018年9月28日)

学生番号　　　　　　名前

問題 2.1.

$f(x) = x \ (-\pi < x < \pi)$ を Fourier 級数に展開せよ.

問題 2.2.

$f(x) = x^2 \ (-\pi < x < \pi)$ を Fourier 級数に展開せよ.

解析学および演習B 演習問題　(2018 年 10 月 5 日)

学生番号　　　　　　　名前

問題 3.1.

$f(x) = x^3$ $(-\pi < x < \pi)$ を Fourier 級数に展開せよ.

問題 3.2.

$f(x) = |x|$ $(-\pi < x < \pi)$ を Fourier 級数に展開せよ.

解析学及び演習 B 演習問題　(2018 年 10 月 12 日)

学生番号　　　　　　名前

問題 4.1.

$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$ のグラフを書け. つぎに, この関数 f を Fourier 級数に展開せよ. 得られた Fourier 級数に $x = 0$ を代入した値が $\lim_{t \to +0} \frac{f(t) + f(-t)}{0}$ となることをたしかめよ.

問題 4.2.

$f(x) = e^x$ $(-\pi < x < \pi)$ を Fourier 級数に展開せよ.

解析学及び演習 B 演習問題　(2018 年 10 月 19 日)

学生番号　　　　　　名前

問題 5.1 (Legendre 多項式)**.**

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ とおく. $m, n = 0, 1, 2, 3$ について

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx$$

を計算せよ.

答え

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

解析学及び演習 B 演習問題 (2018 年 11 月 9 日)

学生番号　　　　　　　名前

問題 6.1.
$\alpha > 0$ とする. $|x|^{-\alpha} \in L^2(-\pi,\pi)$ となるための α の条件を求めよ.

解析学及び演習 B 演習問題　(2018 年 11 月 16 日)

学生番号　　　　　名前

問題 7.1.

関数 $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ の奇関数部分 f_{odd}, 偶関数部分 f_{even} をそれぞれ $x\in(-\pi,\pi)$ に対して

$$f_{\mathrm{odd}}(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}, \quad f_{\mathrm{even}}(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

で定める.

(1) $f_{\mathrm{odd}}+f_{\mathrm{even}}=f$ を示せ.

(2) f_{odd} が奇関数であること, f_{even} が偶関数であることを示せ.

問題 7.2.

Euler の公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ $(\theta\in\mathbb{R})$ と複素数における指数法則をみとめて次を示せ.

(1) $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, \quad (\theta\in\mathbb{R})$

(2) $\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2, \quad \sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$
$(\theta_1,\ \theta_2\in\mathbb{R})$

解析学及び演習 B 演習問題　(2018 年 11 月 30 日)

学生番号　　　　　　名前

問題 8.1.

複素数値 L^2 空間 $L^2(-\pi,\pi\,;\mathbb{C})$ を

$$L^2(-\pi,\pi\,;\mathbb{C}) := \left\{ f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \text{ は可測関数}, \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

と定める. $f,g \in L^2(-\pi,\pi\,;\mathbb{C})$ に対して, f, g の $L^2(-\pi,\pi\,;\mathbb{C})$ 内積を

$$(f,g)_{L^2(-\pi,\pi\,;\mathbb{C})} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

で定める. このとき, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ が $L^2(-\pi,\pi\,;\mathbb{C})$ の正規直交系となることを示せ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

解析学及び演習 B 演習問題　(2018 年 12 月 7 日)

学生番号　　　　名前

問題 9.1.

次の Fourier 変換を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & a < x < b \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

(2) $k > 0$ に対して $f(x) = \begin{cases} e^{-kx} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

解析学及び演習 B 演習問題　(2018 年 12 月 14 日)

学生番号　　　　　　　名前

問題 10.1.

次の Fourier 変換を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < a \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

解析学及び演習 B 試験で配布する資料

関数 $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ の Fourier 級数とは

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

の右辺の級数であった. ここで,

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \qquad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$$

は f の Fourier 係数とよぶ.

二乗可積分関数のなす空間 $L^2(a,b)$ を

$$L^2(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C},\ \text{可測関数},\ \int_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

で定める. $f, g \in L^2(a,b)$ に対して

$$(f,g)_{L^2(-\pi,\pi)} := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

と定める.

可積分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して, f の Fourier 変換 $\mathscr{F}[f]$, $\hat{f}$ を

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

で定める.