解析学および演習 B 演習問題　(第 1 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 1.1.

$k, l \in \mathbb{N}$ に対して, 次の積分を計算せよ (計算過程をきちんと書くこと).

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(lx)\,dx, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin(lx)\,dx, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(lx)\,dx, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\,dx, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx$$

解析学および演習B 演習問題　(第2回)

学生番号　　　　　　名前

問題 2.1.

$f(x) = x\ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと).

問題 2.2.

$f(x) = x^2\ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと).

解析学および演習 B 演習問題　(第 3 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 3.1.
$f(x) = x^3$ $(-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

問題 3.2.
$f(x) = |x|$ $(-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

解析学及び演習 **B** 演習問題　(第 4 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 4.1.

$a \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = \begin{cases} -1, & (-\pi < x < 0), \\ a, & (x = 0), \\ 1, & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$ のグラフを書け. つぎに, この関数 f の Fourier 係数 a_k, b_k を求めよ. 次に, Fourier 級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

に $x = 0$ を代入した値を求めて, 級数が $f(0)$ に一致するときの a の値を求めよ.

問題 4.2.

$f(x) = e^x$ $(-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

解析学及び演習 B 演習問題 (第 5 回)

学生番号 名前

問題 5.1.

$\alpha > 0$ とする. $|x|^{-\alpha} \in L^2(-\pi,\pi)$ となるため, $|x|^{-\alpha} \in L^2(-\pi,\pi)$ とならないための α の条件を求めよ.

解析学及び演習 B 演習問題　(第 6 回)

学生番号　　　　　名前

問題 6.1.

関数 $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ の奇関数部分 f_{odd}, 偶関数部分 f_{even} をそれぞれ $x \in (-\pi, \pi)$ に対して

$$f_{\mathrm{odd}}(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\mathrm{even}}(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

で定める.

(1) $f_{\mathrm{odd}} + f_{\mathrm{even}} = f$ を示せ.

(2) f_{odd} が奇関数であること, f_{even} が偶関数であることを示せ.

問題 6.2.

Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ と複素数における指数法則をみとめて次を示せ.

(1) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (\theta \in \mathbb{R})$

(2) $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2, \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$
$(\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R})$

解析学及び演習 B 演習問題　(第 7 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 7.1.

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi,\pi)$ を $L^2(-\pi,\pi)$ 上の正規直交系とする. このとき, 任意の $f \in L^2(-\pi,\pi)$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{N} |(f, f_k)_{L^2(-\pi,\pi)}|^2 \leq \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2$$

を示せ (ヒント: $\alpha_k := (f, f_k)_{L^2(-\pi,\pi)}$ とおいて, $\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k \right\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \geq 0$ を考える).

解析学及び演習 B 演習問題　(第 8 回)

学生番号　　　　　名前

問題 8.1.

複素数値 L^2 空間 $L^2(-\pi,\pi\,;\,\mathbb{C})$ を

$$L^2(-\pi,\pi\,;\,\mathbb{C}) := \left\{ f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \text{ は可測関数}, \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

と定める. $f, g \in L^2(-\pi,\pi\,;\,\mathbb{C})$ に対して, f, g の $L^2(-\pi,\pi\,;\,\mathbb{C})$ 内積を

$$(f,g)_{L^2(-\pi,\pi\,;\,\mathbb{C})} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

で定める. このとき, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ が $L^2(-\pi,\pi\,;\,\mathbb{C})$ の正規直交系となることを示せ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

解析学および演習B レポート課題　(第9回)

問題 9.1.

次の関数の組が $L^2(-\pi,\pi)$ における正規直交系であることを示せ.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

問題 9.2.

$f(x) = x + x^2 + x^3$ $(-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと).

問題 9.3.

$f(x) = |x|x$ $(-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと).

問題 9.4.

0 でない定数 $a \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = e^{ax}$ $(-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと).

問題 9.5.

$(-\pi,\pi)$ 上の連続な関数列 $F_N : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ $(N \in \mathbb{N})$ が $F : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束するとき, F は $(-\pi,\pi)$ 上連続となることの証明を ε-δ 論法を用いて与えよ.

問題 9.6.

$f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して $d(f,g) := \|f - g\|_{L^2(-\pi,\pi)}$ とおくと, d は $L^2(-\pi,\pi)$ の距離になることをきちんと示せ.

問題 9.7.

$\alpha > 0$ に対して, $|x|^{-\alpha} \in L^2(-\pi,\pi)$ となるための α の条件を求めよ.

$1 \le p < \infty$ と可測集合 $I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$L^p(I) := \left\{f : I \to \mathbb{R},\ \text{可測関数},\ \int_I |f(x)|^p\,dx < \infty\right\}$$

で定める.

問題 9.8.

$1 \le p < \infty$ と $\alpha > 0$ に対して, $|x|^{-\alpha} \in L^p(-1,1)$ となるための α の条件を求めよ.

問題 9.9.

$1 \le p < \infty$ と $\alpha > 0$ に対して, $|x|^{-\alpha} \in L^p(1,\infty)$ となるための α の条件を求めよ.

問題 9.10.

$1 \le p < \infty$ と $\alpha > 0$ に対して, $(1 + |x|)^{-\alpha} \in L^p(\mathbb{R})$ となるための α の条件を求めよ.

解析学及び演習B 演習問題 (第10回)

学生番号　　　　　　　名前

問題 10.1.

次の Fourier 変換を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & a < x < b \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

(2) $k > 0$ に対して $f(x) = \begin{cases} e^{-kx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

解析学及び演習B 演習問題　(第 11 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 11.1.

次の Fourier 変換を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < a \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

答え

$$\frac{1}{4\pi^2\xi^2}\left(e^{-2\pi i a\xi} - 1\right) - \frac{a}{2\pi i\xi}e^{-2\pi i a\xi}$$

(2) $f(x) = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

答え

$$\frac{1}{4\pi^2\xi^2}\left(e^{-2\pi i\xi} + e^{2\pi i\xi} - 2\right) + \frac{1}{2\pi i\xi}\left(e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}\right)$$

解析学及び演習 B 演習問題　(第 12 回)

学生番号　　　　　　名前

問題 12.1.

次の Fourier 変換を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < a \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$

解析学および演習 B レポート課題　(第 13 回)

問題 13.1.

$k>0$ に対して $f(x)=\begin{cases} e^{-kx} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$ とおく.

(1) f の Fourier 変換を求めよ.

(2) $e^{-2\pi ix\xi}=\cos(2\pi x\xi)-i\sin(2\pi x\xi)$ に注意して

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos(2\pi x\xi)\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\sin(2\pi x\xi)\,dx$$

を求めよ.

(3) $l\in\mathbb{R}$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos(lx)\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\sin(lx)\,dx$$

を求めよ (ヒント: $2\pi\xi=l$ により, ξ を定めると...).

問題 13.2.

次の関数の Fourier 変換を求めよ.

(1) $k>0$ に対して $f(x)=e^{-k|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$.

(2) $k>0$ に対して $f(x)=xe^{-k|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$.

問題 13.3.

$h\in\mathbb{R}, \lambda>0$ に対して, 平行移動作用素 τ_h とスケール変換 δ_λ を $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対してそれぞれ

$$(\tau_h f)(x):=f(x-h), \qquad (\delta_\lambda f)(x):=f(x/\lambda)$$

で定める. このとき, $f\in L^1(\mathbb{R}), \xi\in\mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi)=e^{-2\pi i\xi h}\widehat{f}(\xi), \quad \widehat{(\delta_\lambda f)}(\xi)=\lambda\widehat{f}(\lambda\xi)$$

が成り立つことを示せ.

問題 13.4.

一次元熱方程式の初期値問題

$$\text{(H)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x)=u_0(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

を考える. $u=u(t,x):[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は未知関数, $u_0=u_0(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は与えられた関数である. 講義ノート §3.6 の前半の議論をもとにして, 形式的に熱方程式 (H) の解 $u(t,x)$ を導け.