

解析学および演習 B 演習問題 (第 1 回)

学生番号

名前

問題 1.1.

$k, l \in \mathbb{N}$ に対して, 次の積分を計算せよ (計算過程をきちんと書くこと).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx, & \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(lx) dx, & \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx, & \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx, & \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \end{aligned}$$

解析学および演習 B 演習問題 (第 2 回)

学生番号 _____ 名前 _____

問題 2.1.

$f(x) = x$ ($-\pi < x < \pi$) の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと).

問題 2.2.

$f(x) = x^2$ ($-\pi < x < \pi$) の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと).

解析学および演習 B 演習問題 (第 3 回)

学生番号

名前

問題 3.1.

$f(x) = x^3$ ($-\pi < x < \pi$) の Fourier 係数を求めよ.

問題 3.2.

$f(x) = |x|$ ($-\pi < x < \pi$) の Fourier 係数を求めよ.

解析学及び演習 B 演習問題 (第4回)

学生番号

名前

問題 4.1.

$a \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = \begin{cases} -1, & (-\pi < x < 0), \\ a, & (x = 0), \\ 1, & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$ のグラフを書け. つぎに, この関数 f の Fourier

係数 a_k, b_k を求めよ. 次に, Fourier 級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

に $x = 0$ を代入した値を求めて, 級数が $f(0)$ に一致するときの a の値を求めよ.

問題 4.2.

$f(x) = e^x$ ($-\pi < x < \pi$) の Fourier 係数を求めよ.

解析学及び演習 B 演習問題 (第 5 回)

学生番号

名前

問題 5.1.

$\alpha > 0$ とする. $|x|^{-\alpha} \in L^2(-\pi, \pi)$ となるため, $|x|^{-\alpha} \in L^2(-\pi, \pi)$ とならないための α の条件を求めよ.

解析学及び演習 B 演習問題 (第6回)

学生番号

名前

問題 6.1.

関数 $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ の奇関数部分 f_{odd} , 偶関数部分 f_{even} をそれぞれ $x \in (-\pi, \pi)$ に対して

$$f_{\text{odd}}(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

で定める.

(1) $f_{\text{odd}} + f_{\text{even}} = f$ を示せ.

(2) f_{odd} が奇関数であること, f_{even} が偶関数であることを示せ.

問題 6.2.

Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) と複素数における指数法則をみとめて次を示せ.

(1) $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (\theta \in \mathbb{R})$

(2) $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$

解析学及び演習 B 演習問題 (第 7 回)

学生番号

名前

問題 7.1.

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi, \pi)$ を $L^2(-\pi, \pi)$ 上の正規直交系とする. このとき, 任意の $f \in L^2(-\pi, \pi)$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=1}^N |(f, f_k)_{L^2(-\pi, \pi)}|^2 \leq \|f\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2$$

を示せ (ヒント: $\alpha_k := (f, f_k)_{L^2(-\pi, \pi)}$ とおいて, $\left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k \right\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 \geq 0$ を考える).

解析学および演習 B レポート課題 (第 8 回)

問題 8.1.

次の関数の組が $L^2(-\pi, \pi)$ における正規直交系であることを示せ.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

問題 8.2.

$f(x) = (a+1)x^3 + (b+1)x^4$ ($-\pi < x < \pi$) の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと). なお, a, b はそれぞれ学生番号の 1 の位, 10 の位とする.

問題 8.3.

$f(x) = |x|x$ ($-\pi < x < \pi$) の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと).

問題 8.4.

0 でない定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = e^{cx}$ ($-\pi < x < \pi$) の Fourier 係数を求めよ (計算過程をきちんと書くこと).

問題 8.5.

$\alpha > 0$ に対して, $|x|^{-\alpha} \in L^2(-\pi, \pi)$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

$1 \leq p < \infty$ と可測集合 $I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$L^p(I) := \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{可測関数}, \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

で定める.

問題 8.6.

$1 \leq p < \infty$ と $\alpha > 0$ に対して, $|x|^{-\alpha} \in L^p(-1, 1)$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

問題 8.7.

$1 \leq p < \infty$ と $\alpha > 0$ に対して, $|x|^{-\alpha} \in L^p(1, \infty)$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

問題 8.8.

$1 \leq p < \infty$ と $\alpha > 0$ に対して, $(1 + |x|)^{-\alpha} \in L^p(\mathbb{R})$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

解析学及び演習 B 演習問題 (第9回)

学生番号

名前

問題 9.1.

複素数値 L^2 空間 $L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ を

$$L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C}) := \left\{ f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \text{ は可測関数}, \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

と定める. $f, g \in L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ に対して, f, g の $L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ 内積を

$$(f, g)_{L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定める. このとき, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ が $L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ の正規直交系となることを示せ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

解析学及び演習 B 演習問題 (第 10 回)

学生番号

名前

問題 10.1.

次の Fourier 変換を求めよ.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1 & a < x < b \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$(2) k > 0 \text{ に対して } f(x) = \begin{cases} e^{-kx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

解析学及び演習 B 演習問題 (第 11 回)

学生番号

名前

問題 11.1.

次の Fourier 変換を求めよ.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < a \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

解析学及び演習 B 演習問題 (第 12 回)

学生番号

名前

問題 12.1.

次の Fourier 変換を求めよ.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < a \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

解析学および演習 B レポート課題 (第 13 回)

問題 13.1.

$k > 0$ に対して $f(x) = \begin{cases} e^{-kx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ とおく.

- (1) f の Fourier 変換を求めよ.
 (2) $e^{-2\pi i x \xi} = \cos(2\pi x \xi) - i \sin(2\pi x \xi)$ に注意して

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \cos(2\pi x \xi) dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-kx} \sin(2\pi x \xi) dx$$

を求めよ.

- (3) $l \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \cos(lx) dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-kx} \sin(lx) dx$$

を求めよ (ヒント: $2\pi\xi = l$ により, ξ を定めると...).

問題 13.2.

次の関数の Fourier 変換を求めよ.

- (1) $k > 0$ に対して $f(x) = e^{-k|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$).
 (2) $k > 0$ に対して $f(x) = xe^{-k|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$).

問題 13.3.

$h \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ に対して, 平行移動作用素 τ_h とスケール変換 δ_λ を $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対してそれぞれ

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h), \quad (\delta_\lambda f)(x) := f(x/\lambda)$$

で定める. このとき, $f \in L^1(\mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i \xi h} \widehat{f}(\xi), \quad \widehat{(\delta_\lambda f)}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\lambda \xi)$$

が成り立つことを示せ.

問題 13.4.

A を実係数 3 次対称行列とする. このとき, ある正定数 $C > 0$ が存在して, すべての $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $|A\vec{x}| \leq C|\vec{x}|$ とできることを示せ. (ヒント: A の固有値を重複を込めて $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とし, 対応する正規直交化した固有ベクトルを $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ とおく. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ が \mathbb{R}^3 の基底になることを用いて, $|A\vec{x}|^2$ と $|\vec{x}|^2$ を計算してみよ.)

問題 13.5.

一次元熱方程式の初期値問題

$$(H) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

を考える. $u = u(t, x): [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数, $u_0 = u_0(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられた関数である. 講義ノート §3.6 の前半の議論をもとにして, 形式的に熱方程式 (H) の解 $u(t, x)$ を導け.