第 1 章

無限次元の線形空間と Fourier 級数

問題 1.1.

内積のついた $\mathbb{R}$ 上の線形空間 $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ に対して, Schwarz の不等式

$$|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_H| \le \|\boldsymbol{u}\|_H \|\boldsymbol{v}\|_H, \qquad \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in H$$

を示せ (ヒント: $t \in \mathbb{R}$ に対して $f(t) = \|\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}\|_H^2$ を計算する. f の最小値を考えると...).

問題 1.2.

内積のついた $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ に対して, Schwarz の不等式

$$|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_H| \le \|\boldsymbol{u}\|_H \|\boldsymbol{v}\|_H, \qquad \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in H$$

を示せ (ヒント: $z \in \mathbb{C}$ に対して $f(t) = \|\boldsymbol{u} + z\boldsymbol{v}\|_H^2$ を計算する. 問題 1.1 のヒントにある $f(t)$ を最小にする t を z に代入するとどうなるか？).

問題 1.3.

$k, l \in \mathbb{N}$ に対して, 次の積分を計算せよ (計算過程をきちんと書くこと).

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx)\,dx, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx$$

第 2 章

Fourier 級数

1. Fourier 係数の性質

問題 2.1.
関数 $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ の奇関数部分 f_{odd}, 偶関数部分 f_{even} をそれぞれ $x \in (-\pi, \pi)$ に対して

$$f_{\mathrm{odd}}(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\mathrm{even}}(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

で定める.

(1) $f_{\mathrm{odd}} + f_{\mathrm{even}} = f$ を示せ.
(2) f_{odd} が奇関数であること, f_{even} が偶関数であることを示せ.

問題 2.2.
$f(x) = x \ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

問題 2.3.
$f(x) = x^2 \ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

問題 2.4.
$f(x) = x^3 \ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

問題 2.5.
$f(x) = |x| \ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

問題 2.6.
$f(x) = |x|x \ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

問題 2.7.
$f(x) = e^x \ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

問題 2.8.
0 でない定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = e^{cx} \ (-\pi < x < \pi)$ の Fourier 係数を求めよ.

問題 2.9.
$a \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = \begin{cases} -1, & (-\pi < x < 0), \\ a, & (x = 0), \\ 1, & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$ のグラフを書け. つぎに, この関数 f の Fourier 係数 a_k, b_k を求めよ. 次に, Fourier 級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

に $x = 0$ を代入した値を求めて, 級数が $f(0)$ に一致するときの a の値を求めよ.

2. 連続関数に対する Fourier 級数の収束

問題 2.10.

$(-\pi,\pi)$ 上の連続な関数列 $F_N:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ $(N\in\mathbb{N})$ が $F:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束するとき, F が $(-\pi,\pi)$ 上連続となることの証明を与えよ.

問題 2.11.

$(-\pi,\pi)$ 上の可積分関数列 $F_N:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ $(N\in\mathbb{N})$ が可積分関数 $F:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束するとき, 極限と積分の順序が交換できる. すなわち

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F_N(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx$$

が成り立つことの証明を与えよ.

3. L^2 空間

定義.

$1\le p<\infty$ と可測集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ に対して

$$L^p(\Omega):=\left\{f:\Omega\to\mathbb{R},\ 可測関数,\ \int_\Omega|f(x)|^p\,dx<\infty\right\}$$

で定める. $f\in L^p(\Omega)$ に対して

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}:=\left(\int_\Omega|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

で定める.

問題 2.12.

$\alpha>0$ とする. $|x|^{-\alpha}\in L^2(-\pi,\pi)$ となるため, $|x|^{-\alpha}\in L^2(-\pi,\pi)$ とならないための α の条件を求めよ.

問題 2.13.

$1\le p<\infty$ と $\alpha>0$ に対して, $|x|^{-\alpha}\in L^p(-1,1)$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

問題 2.14.

$1\le p<\infty$ と $\alpha>0$ に対して, $|x|^{-\alpha}\in L^p(1,\infty)$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

問題 2.15.

$1\le p<\infty$ と $\alpha>0$ に対して, $(1+|x|)^{-\alpha}\in L^p(\mathbb{R})$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

問題 2.16.

$1\le p<\infty$ と $\alpha>0$ に対して, $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}\in L^p(\mathbb{R})$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

問題 2.17.

$n\in\mathbb{N}$ に対して $B_1^n:=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ とおく.

(1) $n=2$ のとき, $1\le p<\infty$ と $\alpha>0$ に対して, $|x|^{-\alpha}\in L^p(B_1^2)$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

(2) $n=3$ のとき, $1\le p<\infty$ と $\alpha>0$ に対して, $|x|^{-\alpha}\in L^p(B_1^3)$ となるため/ならないための α の条件を求めよ.

(3) $n \in \mathbb{N}$ のとき, $1 \le p < \infty$ と $\alpha > 0$ に対して, $|x|^{-\alpha} \in L^p(B_1^n)$ となるため/ならないための α の条件を求めよ. なお, 極座標変換

$$x = r\omega, \quad 0 \le r \le 1, \quad \omega \in \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

とおいたときに, 変数変換により, $dx = r^{n-1} dr d\omega$ となることは使ってよい.

問題 2.18.

$1 \le p < \infty$ と可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して $L^p(\Omega)$ が線形空間であることを示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $a, b \ge 0$ に対して $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ を示せ.
(2) $f, g \in L^p(\Omega)$ に対して, $f + g \in L^p(\Omega)$ を示せ.
(3) $c \in \mathbb{R}$ と $f \in L^p(\Omega)$ に対して, $cf \in L^p(\Omega)$ を示せ.

問題 2.19.

可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と $f, g \in L^2(\Omega)$ に対して

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)g(x)\, dx$$

で定める. $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ が (実係数の) 内積の公理をみたすことを示せ.

問題 2.20.

$1 \le p < \infty$ と可測集合 $I \subset \mathbb{R}$, $f \in L^p(I)$, $\lambda > 0$ に対して

$$m_1(\{x \in I : |f(x)| \ge \lambda\}) \le \frac{1}{\lambda^p} \|f\|_{L^p(I)}^p$$

を示せ.

定義.

$1 \le p < \infty$ と可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$L^p_{\mathrm{w}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{可測関数},\ \sup_{\lambda > 0} (\lambda^p m_n(\{x \in I : |f(x)| \ge \lambda\})) < \infty \right\}$$

で定める. $f \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ に対して

$$\|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} := \sup_{\lambda > 0} \left(\lambda m_n(\{x \in I : |f(x)| \ge \lambda\})^{\frac{1}{p}} \right)$$

で定める.

問題 2.21.

$1 \le p < \infty$ に対して, 次を示せ.

(1) $|x|^{-\frac{1}{p}}$ は $L^p(-1, 1)$ に属さない.
(2) $|x|^{-\frac{1}{p}}$ は $L^p_{\mathrm{w}}(-1, 1)$ に属する.

問題 2.22.

次の関数の組が $L^2(-\pi, \pi)$ における正規直交系であることを示せ.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=1}^\infty$$

問題 2.23.

$\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(-\pi, \pi)$ を $L^2(-\pi, \pi)$ 上の正規直交系とする. このとき, 任意の $f \in L^2(-\pi, \pi)$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=1}^N |(f, f_k)_{L^2(-\pi, \pi)}|^2 \le \|f\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2$$

を示せ (ヒント: $\alpha_k := (f, f_k)_{L^2(-\pi,\pi)}$ とおいて, $\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k \right\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \geq 0$ を考える).

第 3 章

Fourier 変換

1. 複素 Fourier 級数

問題 3.1.

Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ と複素数における指数法則をみとめて次を示せ.

(1) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (\theta \in \mathbb{R})$

(2) $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2, \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$ $(\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R})$

問題 3.2.

複素数値 L^2 空間 $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$

$$L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi) := \left\{ f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \text{ は可測関数}, \ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

と定める. $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi\,;\mathbb{C})$ に対して, f, g の $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ 内積を

$$(f, g)_{L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

で定める.

(1) $(\cdot, \cdot)_{L^2(-\pi,\pi\,;\mathbb{C})}$ が (複素係数の) 内積の公理をみたすことを示せ.

(2) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ が $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ の正規直交系となることを示せ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

2. 可積分関数に対する Fourier 変換

定義.

可積分関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に対して, f の **Fourier** 変換 $\mathscr{F}[f]$, $\hat{f}$ を

(2.1) $$\mathscr{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

で定める. とくに $n = 1$ のときは

(2.2) $$\mathscr{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

である.

問題 3.3.

次の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a < x < b \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

問題 3.4.

次の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} x & a < x < b \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

問題 3.5.

次の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & a < x < b \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

問題 3.6.

次の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

問題 3.7.

$k > 0$ に対して, 次の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-kx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

問題 3.8.

$k > 0$ に対して, 次の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ.

$$f(x) = e^{-k|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$$

問題 3.9.

$k > 0$ に対して, 次の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ.

$$f(x) = xe^{-k|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$$

問題 3.10.

$k > 0$ に対して $f(x) = \begin{cases} e^{-kx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ とおく.

(1) f の Fourier 変換を求めよ.

(2) $e^{-2\pi ix\xi} = \cos(2\pi x\xi) - i\sin(2\pi x\xi)$ に注意して

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos(2\pi x\xi)\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\sin(2\pi x\xi)\,dx$$

を求めよ.

(3) $l \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos(lx)\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\sin(lx)\,dx$$

を求めよ (ヒント: $2\pi\xi = l$ により, ξ を定めると...).

問題 3.11.

$h \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ に対して, 平行移動作用素 τ_h とスケール変換 δ_λ を $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対してそれぞれ

$$(\tau_h f)(x) := f(x-h), \qquad (\delta_\lambda f)(x) := f(x/\lambda)$$

で定める. このとき, $f \in L^1(\mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i \xi h}\widehat{f}(\xi), \quad \widehat{(\delta_\lambda f)}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\lambda\xi)$$

が成り立つことを示せ.

3. Gauss 核の Fourier 変換

問題 3.12.

$t > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して, 関数 $G_t(x)$ は

$$\mathscr{F}[G_t](\xi) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

をみたすとする.

(1) G_t を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial^2 G_t}{\partial x^2}$ を計算せよ.

(3) $\dfrac{\partial G_t}{\partial t}$ を計算せよ.

4. 急減少関数の Fourier 変換

定義 (Schwartz 空間と急減少関数)**.**

$\mathbb{R}$ 上の **Schwartz 空間** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を

(4.1) $$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \text{すべての } k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ に対して } \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|f^{(l)}(x)| < \infty\}$$

で定める. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を**急減少関数**という.

問題 3.13.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が線形空間となることを示したい.

(1) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, $f + g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を示せ.

(2) $c \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, $cf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を示せ.

5. Fourier 変換の L^2 理論

問題 3.14.

$L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ 上の Fourier 変換 $\mathscr{F}$ は $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ 上の線形写像となることを示せ.

問題 3.15.

A を実係数 3 次対称行列とする. このとき, ある正定数 $C > 0$ が存在して, すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $|A\boldsymbol{x}| \leq C|\boldsymbol{x}|$ とできることを示せ. (ヒント: A の固有値を重複を込めて $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とし, 対応する正規直交化した固有ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とおく. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の基底になることを用いて, $|A\boldsymbol{x}|^2$ と $|\boldsymbol{x}|^2$ を計算してみよ.)

問題 3.16.

$f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ に対して

(5.1) $$\mathscr{F}^{-1}[f * g] = \mathscr{F}^{-1}[f]\mathscr{F}^{-1}[g]$$

が成り立つことを示せ.