第1章　実数と数列の極限

§1.1　イントロダクション

—円周率を求めてみよう—

$\pi = 3.141592653 5\cdots$

言葉の意味を定めること（証明はできない）

定義 1.1（円周率）

すべての円について円周率πを

$$\pi := \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$$

で定める　□

注意 1.1

どの円についても $\dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ は等しい。　□

注意 1.2

$A=B$ は「AとBが等しい」と

「AをBで定める」の２つの意味がある。

この違いを明確にするため、

$A=B$　　AとBが等しい

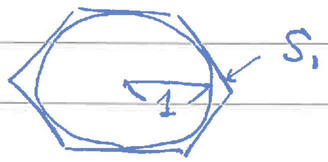
$A:=B$　　AをBで定める

と書きわけることにする。

半径1の円の円周の長さを求めて、2でわれば、πは求まるはず。

↜ どうやって円周の長さを求めるか？

〈Archimedes(アルキメデス)のアイデア〉



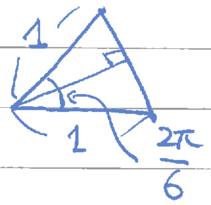
s_1：半径1の円に内接する正6角形の周の長さ

S_1：　〃　　外接する　　〃

⇒　　　$s_1 \le 2\pi \le S_1$

「ならば」の意味　　　円周の長さ.　　≦と同じ.

1. s_1を求める.

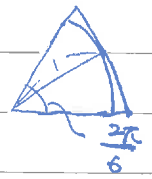


左図より一辺の長さは

$$2\times1\times\sin\left(\frac{2\pi}{6\times2}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$$

となる. よって $s_1=6\times1=6$ となる

2. S_1を求める.



左図より一辺の長さは

$$2\times1\times\tan\left(\frac{2\pi}{6\times2}\right)=2\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる. よって $S_1=6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ となる.

3.

s_2：半径1の円に内接する正12角形の周の長さ

S_2：　〃　外接する　〃

$\Longrightarrow$ $s_2 \le 2\pi \le S_2$.

s_3：半径1の円に内接する正24角形の周の長さ

S_3：　〃　外接する　〃

$\Longrightarrow$ $s_3 \le 2\pi \le S_3$.

これを続けると、自然数nに対して、

s_n：半径1の円に内接する正$6\times2^{n-1}$角形の周の長さ

S_n：　〃　外接する

$\Longrightarrow$ $s_n \le 2\pi \le S_n$

証明できる主張で重要なもの

定理 1.1 (Archimedes)

すべての自然数nに対して

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n}, \qquad (1)$$

$$s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n. \qquad (2)$$

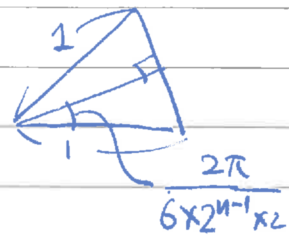
が成り立つ。 ∎

証明

1. s_nを求める。内接する正$6\times2^{n-1}$角形の一辺の長さは、右図より

$$2\times1\times\sin\left(\frac{\pi}{6\times2^{n-1}}\right)$$

となるので、

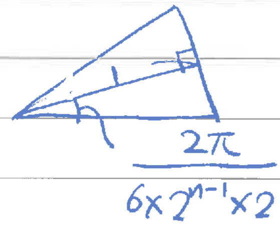


$$S_n = \underbrace{6\times2^{n-1}}_{\text{辺の数}}\times \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{6\times2^{n-1}}\right)}_{\text{一辺の長さ}} = 6\times2^{n}\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^{n}}\right)$$

となる。

2. S_nを求める。外接する正$6\times2^{n-1}$角形の一辺の長さは、右図より

$$2\times1\times\tan\left(\frac{\pi}{6\times2^{n-1}}\right)$$



となるので

$$S_n = 6\times2^{n-1}\times2\tan\left(\frac{\pi}{6\times2^{n-1}}\right) = 6\times2^{n}\tan\left(\frac{\pi}{3\times2^{n}}\right)$$

となる。

3. (1)を示す。倍角の公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right) - 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)$$

より

$$\frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n} = \frac{1}{6\times2^n\tan\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)} + \frac{1}{6\times2^n\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)+1}{6\times2^n\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)}$$

$$= \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)}{6\times2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)} \quad (\because \text{倍角公式})$$

$$= \frac{2}{6\times2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)} = \frac{2}{S_{n+1}}$$

が得られる.

4. (2) を示す. 倍角公式より

$$S_{n+1}s_n = \left(6\times 2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\right)\left(6\times 2^n\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)\right)$$

$$= \left(6\times 2^{n+1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)}\right)$$

$$\times\left(6\times 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\right)$$

(∵倍角公式)

$$= \left(6\times 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\right)^2 = s_{n+1}^2$$

が得られる. □

↑

証明終了の意味.

定理1.1より

$$\begin{cases} 2/S_{n+1} = 1/S_n + 1/s_n \\ s_{n+1}^2 = S_{n+1}s_n \\ s_1 = 6,\quad S_1 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

だから

$$\begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{2}{1/S_n + 1/s_n} \\ s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}s_n} \\ s_1 = 6,\quad S_1 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

となる。

例1.1

$n=2$ のときの s_2, S_2 を求める.

$$S_2 = \frac{2}{1/s_1 + 1/S_1} = \frac{2}{1/4\sqrt{3} + 1/6}$$

$$= 2 \div (1 \div 4\sqrt{3} + 1 \div 6) \fallingdotseq 6.4310$$

近似.

$$s_2 = \sqrt{S_2 s_1} \simeq \sqrt{6.4310 \times 6} \simeq 6.2117.$$

となる.

n	s_n	S_n	π の評価
1	6	6.9282	$6 \leq 2\pi \leq 6.9282$
2	6.2117	6.4310	$6.2117 \leq 2\pi \leq 6.4310$
3	6.2654	6.3197	$6.2654 \leq 2\pi \leq 6.3197$
4	6.2789	6.2926	$6.2789 \leq 2\pi \leq 6.2926$
5	6.2830	6.2873	$6.2830 \leq 2\pi \leq 6.2873$

$n=5$ で $3.1415 \leq \pi \leq 3.1436$ だから

$\pi \simeq 3.14$ がわかる.

〈問題点〉

① $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は円周率(の2倍)に近づいているのか?

1. $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ が $\boxed{\text{存在すれば}}$

定理1.1より (2)で $n \to \infty$ として

$$s^2 = Ss$$

だから ($s \neq 0$ を示せば) $s = S$ がわかる.

しかし、この「存在する」はどうやって示すのか？

2. そもそも円周の長さのような曲線の長さはどうやって定めるの？
(答：極限（と積分）)

3. では、極限とは何なのか？
(答：実数)

4. 実数とは何か？
有理数とはどこが違うのか？

〈第1章の目標〉

① 実数とは何か？について、大雑把に考え方を理解する。
(全部しっかりやることは大変なので、感覚がわかればよい)

② 実数と有理数にはどのような違いがあるのか理解する。

③ 数列の極限、とくに $\lim_{n\to\infty}$ をどのように定めればよいかを理解し、簡単な証明がかけるようにする。

④ 定理1.1の漸化式から定まる数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$
$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示す。

§1.2 実数の構成

	＋	−	×	÷(0を除く)	不等式
自然数	○	×	○	×	○
整数	○	○	○	×	○
有理数	○	○	○	○	○
実数	○	○	○	○	○
複素数	○	○	○	○	×

実数 ＝ 有理数 − 無理数

⇒ 無理数とは何か？

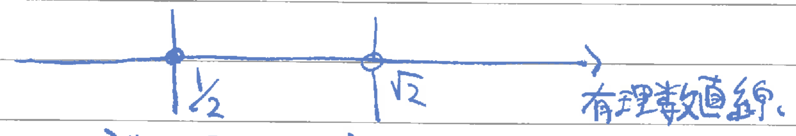
無理数：有理数でないもの

⇝ i は無理数？

① 実数とは何か？を考える必要がある。

〈Dedekind(デデキント)のアイデア〉

有理数直線を切ってみる



ぶつかる　　　ぶつからない。

↓　　　　　↓

有理数　　　無理数

これをどのようにして数学の言葉でいえばよいか？

〈集合論の基礎〉 詳しくは数学入門A

ものの集まりを**集合**といい，そのもの一つ一つを**要素**，**元**という。

例1.2 (よく使う集合)

$\mathbb{N}$：自然数全体のなす集合
$\mathbb{Z}$：整数全体のなす集合
$\mathbb{Q}$：有理数全体のなす集合
$\mathbb{R}$：実数全体のなす集合
$\mathbb{C}$：複素数全体のなす集合
ϕ：元，要素が一つもない集合（**空集合**という）

□

aが集合Aの要素，元であるとき，$a \in A$とかく。

例1.3

$-3 \in \mathbb{Z}, \ -3 \notin \mathbb{N}, \ \frac{9}{4} \in \mathbb{Q}, \ \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

□

集合はふつう$\{\cdots\}$と中かっこを使ってかくことが多い。

例1.4

$a, b \in \mathbb{R}$に対して

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

元が何か？をかく　　条件をかく。

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

とかく。(a,b)を**開区間**，$[a,b]$を**閉区間**という。

□

集合Aが集合Xの**部分集合**であるとは、「すべての $a \in A$ に対して $a \in X$」が成り立つことをいう。このとき、$A \subset X$ とかく。

例 1.5

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

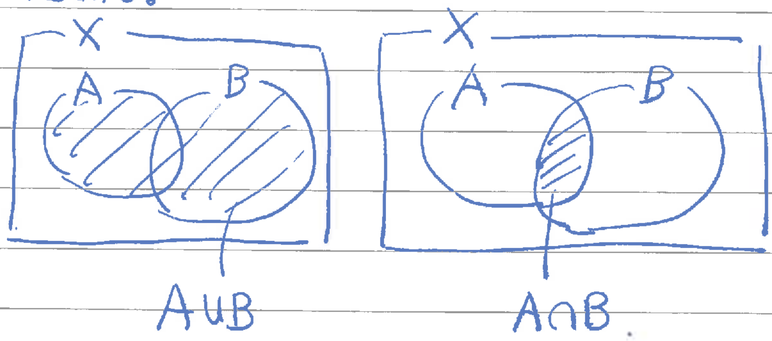
$\blacksquare$

集合Xの部分集合A, Bに対して**和集合** $A \cup B$ と**共通部分** $A \cap B$ を

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ または } x \in B\}$$

と定める。



〈Dedekindの切断〉

定義 1.2 (有理数の切断)

$\mathbb{Q}$ の部分集合A, Bが**有理数の切断**である。

$\overset{\text{定義}}{\iff}$

1. $A \cup B = \mathbb{Q}$
2. $A \cap B = \phi$
3. すべての $a \in A$, $b \in B$ に対して $a < b$
4. Aに最大値はない。すなわち、すべての $a \in A$ に対して $a' \in A$ が存在して $a < a'$。

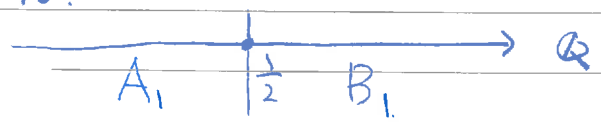
このとき、$\langle A, B \rangle$ とかくことにする。

例1.6

$A_1 := \{a \in \mathbb{Q} : a < \frac{1}{2}\}$

$B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b \geq \frac{1}{2}\}$

とすると $\langle A_1, B_1 \rangle$ は有理数の切断になる。このとき、B_1 に最小値 $\frac{1}{2}$ がある。そこで $\langle A_1, B_1 \rangle = \frac{1}{2}$ とみなすことにする。



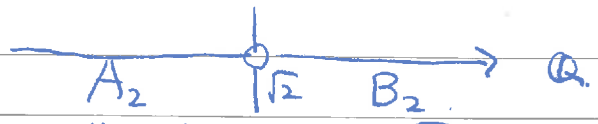
□

例1.7

$A_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0$ または $a^2 < 2\}$

$B_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a > 0$ かつ $a^2 \geq 2\}$

とすると、$\langle A_2, B_2 \rangle$ は有理数の切断になる。このとき、B_2 に最小値はなく、A_2 と B_2 の境目は $\sqrt{2}$ となっている



そこで、$\langle A_2, B_2 \rangle = \sqrt{2}$ とみなすことにする。□

$\langle A, B \rangle$ を有理数の切断としたとき、

B に最小値がある：有理数直線を切ったときにぶつかる（有理数）

B に最小値がない：有理数直線を切ったときにぶつからない（無理数）

に対応する。

定義 1.3 (実数)

有理数の切断を**実数**といい、実数全体のなす集合を$\mathbb{R}$とかく。□

次に、有理数の切断を用いて、実数の四則演算や絶対値を定義しないといけないが、このことについては小平[Kod]を参照せよ。

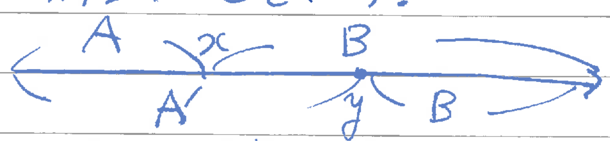
定義 1.4 (等号と大小)

$x, y \in \mathbb{R}$に対し、有理数の切断を用いて
$x = \langle A, B \rangle$, $y = \langle A', B' \rangle$ とかく。

$$x = y \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} A = A'$$
$$x \leqq y \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} A \subset A'$$
$$x < y \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} x \leqq y \text{ かつ } x < y$$

と定義する。「左を右で定める」という意味.

ここで $A = A'$ とは「$A \subset A'$ かつ $A' \subset A$」が成り立つことをいう。□



定理1.2 (有理数の稠密性)

すべての$x, y \in \mathbb{R}$に対して$x < y$ならば、ある$q \in \mathbb{Q}$が存在して $x < q < y$ とできる。□

例 1.8

$x := \sqrt{2}$, $y := \sqrt{3}$ とするとき、$q = 1.6 \in \mathbb{Q}$ とすれば $x < q < y$ とできる。定理1.2は y が$\sqrt{2}$より少しでも大きければ、いつでも $x < q < y$ となる $q \in \mathbb{Q}$ をみつけることができることを主張している。□

定理1.2の証明の方針

すべての$x, y \in \mathbb{R}$に対して，$x<y$と仮定する．有理数の切断を用いて，$x=\langle A, B\rangle$，$y=\langle A', B'\rangle$とかくと $A \subset A'$かつ$A \neq A'$が成り立つ。

従って

$$A' \setminus A := \{a \in \mathbb{Q} ; a \in A' かつ a \notin A\}$$

は空集合ではないから$g \in A' \setminus A$を1つ選ぶ。このとき，$x<g<y$が成り立つ $\square$

◎正確にはgに対する有理数の切断を用いて，不等式を示さないといけない。

§1.3 実数の性質と上限・下限．

§1.2で実数とは何か？を考えた．実数と有理数は何が違うか？について考える．

〈上限〉

$$(0,1)=\{x \in \mathbb{R} : 0<x<1\}$$

には最大値はないが，1が「最大値に似た性質」を持っている．このことをどうやって数学の言葉で表現するか？を考える．

〈論理の基礎〉〈わしくは数学入門A．

集合Aに対し

$\forall a \in A$：すべての（任意の）$a \in A$に対して

$\exists a \in A$：ある$a \in A$が存在して．

とかく．$\forall$は「for all」，「for any」のAをひっくり返したもの．$\exists$は「exist」のEをひっくり返したものである．

定義 1.5 (有界)

$A \subset \mathbb{R}$ に対して、A が**上に有界**であるとは「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して、すべての $a \in A$ に対して $a \leq M$ が成り立つ」ことをいう。これを

$\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall a \in A$ に対して $a \leq M$.

such that の略

とかく。このときの M を A の**上界**という。

A が**下に有界**であるとは「ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して、すべての $a \in A$ に対して $a \geq m$ が成り立つ」ことをいう。これを

$\exists m \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall a \in A$ に対して $a \geq m$

とかく。このときの m を A の**下界**という。

A が**有界**であるとは、「ある $M > 0$ が存在してすべての $a \in A$ に対して $|a| \leq M$ が成り立つ」ことをいう。これを

$\exists M > 0$ s.t. $\forall a \in A$ に対して $|a| \leq M$

とかく。 $\boxtimes$

例 1.9

$A := (0, 1)$ は有界である。 $\boxtimes$

証明

$M = 2 > 0$ とおく。すると $\forall a \in (0, 1)$ に対して $|a| \leq 1 \leq M$ が成り立つ $\square$

例 1.10

$B := (0, \infty)$ は上に有界ではない $\boxtimes$

例 1.11

$C := (-\infty, 3]$ は下に有界ではない $\boxtimes$

定義1.6

$A \subset \mathbb{R}$に対して、Aの上界の集合 A_u と下界の集合 A_ℓ をそれぞれ

$$A_u := \{M \in \mathbb{R} : {}^\forall a \in A \text{に対して} a \leq M\}$$
$$A_\ell := \{m \in \mathbb{R} : {}^\forall a \in A \text{に対して} a \geq m\}$$

と定める。 ☒

注意1.3

定義1.6の記法は一般的ではないので、使うときは上界の集合、下界の集合を明記すること。 ☒

例1.12

$A := [0,1)$ とするとき、Aの上界の集合 A_u, 下界の集合 A_ℓ は

$$A_u = \{M \in \mathbb{R} : {}^\forall a \in [0,1) \text{に対して} a \leq M\} = [1, \infty)$$
$$A_\ell = \{m \in \mathbb{R} : {}^\forall a \in [0,1) \text{に対して} a \geq m\} = (-\infty, 0]$$

となる。 ☒

定義1.7 (最大、最小)

$A \subset \mathbb{R}$に対して、Aの一番大きな数と一番小さな数をそれぞれAの最大値、最小値といい、$\max A$, $\min A$ とかく。 ☒

例1.13

$A := [0,1)$ に対して、$\max A$ は存在しない。$\min A = 0$ となる ☒

定義 1.8（上限，下限）

$A \subset \mathbb{R}$に対して，Aの上限 $\sup A$，下限 $\inf A$ をAの上界の集合A_u，下界の集合A_lを用いて

$$\sup A := \min A_u$$
$$\inf A := \max A_l$$

により定義する。 ☑

※ $\sup A$は，「Aよりも大きい数で1番小さい数」ということである。

〈論理記号を用いた上限，下限〉

$A \subset \mathbb{R}$に対して，$\alpha = \sup A$を論理記号でかくと，

1. $^\forall a \in A$に対して $a \leq \alpha$.
   （αはAの上界である）
2. $^\forall \varepsilon > 0$に対して，$^\exists a_0 \in A$ s.t $\alpha - \varepsilon < a_0$
   （αより少しでも小さいと，Aの上界ではない）

となる。

定理 1.3（実数の連続性）

上に有界な空でない実数の部分集合$A \subset \mathbb{R}$は，実数の上限 $\sup A$が存在する。 ☑

注意 1.4

定理1.3の「実数」を「有理数」にかえると，成立しない。つまり，定理1.3は有理数と実数の違いを表している。 ☑

講義ではやらない。

定理1.4 (Archimedesの原理)

$^\forall \varepsilon > 0$に対して、$^\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\varepsilon N_0 > 1$
が成り立つ。すなわち、どんな小さなすべての
正の実数$\varepsilon > 0$に対しても、(十分大きな)自然数
$N_0 \in \mathbb{N}$をうまく決めれば$\varepsilon N_0 > 1$とできる。$\boxtimes$

定理1.3の証明

$A \subset \mathbb{R}$を上に有界な集合とし、A_uをAの
上界の集合とする。$C := \mathbb{Q} \setminus A_u$, $D := \mathbb{Q} \cap A_u$
として、有理数の切断$\alpha := \langle C, D \rangle$を考える。
$\alpha = \min A_u$を示す。

1. $^\forall a \in A$に対し$a \leq \alpha$を示す。そのために
有理数の切断$a = \langle A', B' \rangle$を考える。$A' \subseteq C$を
示すために、背理法を用いて、$^\exists q \in A'$ s.t. $q \notin C$
と仮定する。すると$q \in D$より$q \in A_u$となり、
$a < q$がわかる。一方$a = \langle A', B' \rangle$より$q < a$
となり、矛盾となるから、$A' \subset C$がわかる。従って
$a \leq \alpha$がわかる。とくに$\alpha \in A_u$がわかった。

2. $\alpha = \min A_u$となる、すなわち$^\forall \varepsilon > 0$に対して
$\alpha - \varepsilon \notin A_u$を示す。$\alpha - \varepsilon < \alpha$より、有理数
の稠密性から、$^\exists q \in \mathbb{Q}$ s.t. $\alpha - \varepsilon < q < \alpha$と
できる。従って$q < \alpha$から$q \in C$となるが
$q \notin A_u$だから$\alpha - \varepsilon \notin A_u$となる。

1., 2.より$\sup A$が存在して、$\alpha = \sup A$
となることがわかる $\square$

講義ではやらない。

定理1.4の証明

背理法を用いて．

$\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\varepsilon_0 n \leq 1$

と仮定する。すると $A := \{\varepsilon_0 n : n \in \mathbb{N}\}$ は

上に有界となるから $\alpha := \sup A$ が存在する

(定理1.3)．従って $\alpha - \varepsilon_0$ は上界ではない

から

$\exists \alpha_0 \in A$ s.t $\alpha - \varepsilon_0 < \alpha_0$ (*)

とできる。よって $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\alpha_0 = \varepsilon_0 n_0$

とできるが (*) より

$$\alpha - \varepsilon_0 < \alpha_0 = \varepsilon_0 n_0$$

だから

$$\alpha < \varepsilon_0 (n_0 + 1) \qquad (**)$$

となる。$n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ より $\varepsilon_0 (n_0+1) \in A$ となり

(**)から $\alpha = \sup A$ に矛盾していることがわかる □

例 1.14

$A := [0, 1)$ に対して．$\sup A = 1$ となる。 図

証明

1. $\forall a \in A$ に対して $a \leq 1$ を示す.

$\forall a \in A$ に対して $a \in [0, 1)$ より $0 \leq a < 1$

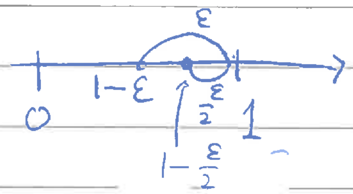
が成り立つから $a \leq 1$ も成り立つ。

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists a_0 \in A$ s.t $1 - \varepsilon < a_0$

を示す。

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $1-\varepsilon < a_0$ となる $a_0 \in A$ を

探す. 右図より



$$a_0 := \max\left\{\frac{1}{2}, 1-\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

とおくと. $\frac{1}{2} \leq a_0 < 1$ だから

$a_0 \in A$ となり

$$1-\varepsilon < 1-\frac{\varepsilon}{2} \leq a_0$$

となるので. $1-\varepsilon < a_0$ が成り立つ.

1. 2. より $\sup A = 1$ となることが示された □

注意1.5

存在を示すことは「成り立つものをみつける」と同じことである。例1.14の証明では.

$1-\varepsilon < a_0$ となる $a_0 \in A$ をみつければよい。

$a_0 \in A$ という条件から. $0 \leq a_0 < 1$ をみたして

$1-\varepsilon < a_0$ となる a_0 をみつければよい。◪

注意1.6

例1.14の証明で. $a_0 = 1-\frac{\varepsilon}{2}$ とすると.

$\varepsilon > 0$ が大きいときに. $1-\frac{\varepsilon}{2} < 0$ となって.

$a_0 \notin A$ となってしまうことがある。これを防ぐために. $a_0 := \max\left\{\frac{1}{2}, 1-\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ としてある. ◪

§1.4 実数の極限

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が実数aに収束するとは
「$|a_n-a|$がnを大きくすると0に近づくこと」
であった。このnを大きくや0に近づくを
どう厳密に表現するか？

定義1.9（数列の極限）
数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が実数aに収束するとは、
「任意の正の数$\varepsilon>0$に対して、ある自然数$N_0\in\mathbb{N}$が
存在して、すべての$n\in\mathbb{N}$に対して、$n\geq N_0$ならば$|a_n-a|<\varepsilon$
が成り立つ」ことをいう。論理記号でかくと
$^\forall\varepsilon>0$に対して、$^\exists N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n\in\mathbb{N}$に対して

$$n\geq N_0 \Longrightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

となる。このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n=a$とか、

$$a_n\longrightarrow a \quad (n\to\infty)$$

と書く。 ▨

定義の意味はあとまわしにして、例をみる。

例1.15

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$が成り立つ ▨

証明

1. 定義の$N_0\in\mathbb{N}$をみつけるために、$^\forall\varepsilon>0$に
対して、$N_0\in\mathbb{N}$をあとで決めることにする。
$^\forall n\in\mathbb{N}$に対して$n\geq N_0$を仮定すると

$$\left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0}$$

となる. $\boxed{\frac{1}{N_0} < \varepsilon}$ となる $N_0 \in \mathbb{N}$ を1つえらべば

$$\left|\frac{1}{n}-0\right| \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

が成り立つ。

2. $^\forall\varepsilon>0$ に対し. Archimedes の原理より $\varepsilon N_0 > 1$ となる $N_0 \in \mathbb{N}$ をとることができる。すると. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ を仮定すると

$$\left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n}$$
$$\leq \frac{1}{N_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

となるので $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ。 □

例 1.16

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ が成り立つ。

証明

1. 定義の $N_0 \in \mathbb{N}$ をみつけるために. $^\forall\varepsilon>0$ に対して $N_0 \in \mathbb{N}$ をあとで決めることにする. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ を仮定すると

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right| = \left|\frac{2(n+1)-2}{n+1}-2\right|$$
$$= \left|2-\frac{2}{n+1}-2\right|$$
$$= \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N_0+1}$$

となる. $\boxed{\frac{2}{N_0+1} < \varepsilon}$ となる $N_0 \in \mathbb{N}$ を1つ選べば

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right| \leq \frac{2}{N_0+1} < \varepsilon$$

が成り立つ. $\frac{1}{N_0+1} < \varepsilon$ を N_0 についてとくと. $\boxed{N_0 > \frac{2}{\varepsilon}-1}$ となる。

2. $^\forall\varepsilon>0$ に対して，$N_0 := \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1 \in \mathbb{N}$ とおく。

ただし，$\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ は，$\frac{2}{\varepsilon}$ を越えない最大の整数である。

このとき $N_0 > \frac{2}{\varepsilon} > \frac{2}{\varepsilon}-1$ となることに注意する。

$^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して，$n\geqq N_0$ を仮定すると

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right| = \left|\frac{2(n+1)-2}{n+1}-2\right|$$
$$= \frac{2}{n+1}$$
$$\leqq \frac{2}{N_0+1} < \frac{2}{2/\varepsilon} = \varepsilon$$

となるので $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$ が成り立つ　□

注意 1.7

例1.15，1.16の証明の，$N_0\in\mathbb{N}$ をみつける計算は証明でかかなくてもよいが，解析学で必要に重要な部分である。

例 1.17

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ ならば

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ が成り立つ。　図

これは ε-N 論法を用いないと証明が難しい。

○講義では省略，演習にまわす．

証明

1. 定義の $N_0\in\mathbb{N}$ をみつけるために，$^\forall\varepsilon>0$ に対して，$N_0\in\mathbb{N}$ を固定する。$\lim_{n\to\infty}a_n=a$ より

$^\exists N_1\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n\geqq N_1 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

とできる。そこで，$^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して，

$\boxed{N_0\geqq N_1}$ かつ $n\geqq N_0$ ならば

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right| = \left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$
$$\le \frac{1}{n}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)$$
$$+\frac{1}{n}(|a_{N_1}-a|+\cdots+|a_n-a|)$$
$$\le \frac{1}{N_0}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)$$
$$+\frac{1}{n}(\varepsilon(n-N_1+1))$$
$$\le \frac{1}{N_0}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)$$
$$+\varepsilon$$

となる。よって $\left|\frac{1}{N_0}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)<\varepsilon\right|$
となるように．$N_0\in\mathbb{N}$をえらべば
$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|\le\frac{1}{N_0}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)$$
$$+\varepsilon$$
$$<2\varepsilon$$
となる。

2. $\forall\varepsilon>0$に対して．$\lim_{n\to\infty}a_n=a$より
$\exists N_1\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$に対して
$$n\ge N_1 \implies |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} \quad -(*)$$
とできる。次に$N_0\in\mathbb{N}$を$N_0\ge N_1$かつ
$$\frac{1}{N_0}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)<\frac{\varepsilon}{2} \quad -(**)$$
となるようにとる（$\because$ Archimedesの原理）．
このとき，$\forall n\in\mathbb{N}$に対して．$n\ge N_0$ならば
$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$
$$\le\frac{1}{n}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)$$
$$+\frac{1}{n}(|a_{N_1}-a|+\cdots+|a_n-a|)$$
（$\because$ 三角不等式）
$$\le\frac{1}{N_0}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)$$
$$+\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}(n-N_1+1)\right) \quad (\because n\ge N_1 と(*))$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$　　　$(\because (**))$

$= \varepsilon$

となる. 従って $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$ が成り立つ

$\square$

定義 1.10 (数列の発散)

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するという。

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が(正の)無限大に発散するとは, $^{\forall}M \in \mathbb{R}$ に対して. $^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_0 \implies a_n > M$$

となることをいう. このとき. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とか

$$a_n \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

とかく.

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が負の無限大に発散するとは. $^{\forall}m \in \mathbb{R}$ に対して. $^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_0 \implies a_n < -m$$

となることをいう. このとき. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とか

$$a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$$

とかく

注意 1.8

定義 1.10 の $M \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ は $M > 0$, $m > 0$ におきかえてもよい

定理1.5

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$に対して, 次が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow a = b$.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が収束する $\Rightarrow \exists M > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$に対して $a_n \leq b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow a \leq b$.

四

◎(1)は講義中は証明しない

証明

(1) 背理法で示す。$a > b$と仮定する.

$\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b) > 0$ とおくと. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$より $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$に対して.

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$

が成り立つ. $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと

$N_0 \geq N_1$ より $|a_{N_0} - a| < \frac{1}{2}(a-b)$ だから

$a_{N_0} - a > -\frac{1}{2}(a-b)$ となるので $a_{N_0} > \frac{1}{2}(a+b)$

が成り立つ。一方 $N_0 \geq N_2$より

$|a_{N_0} - b| < \frac{1}{2}(a-b)$ だから

$a_{N_0} - b < \frac{1}{2}(a-b)$ となるので $a_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b)$

が成り立つ。従って

$$\frac{1}{2}(a+b) < a_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b)$$

となり矛盾する。$a<b$のときは各自確かめよ.

(2) $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ として, $\varepsilon = 1 > 0$ ととる。すると,
$^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば
$|a_n - a| < \varepsilon = 1$ が成り立つ。三角不等式
$|a_n| - |a| \leq |a_n - a|$ に注意すると $n \geq N_0$ なら

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad (*)$$

が成り立つ。そこで $M := \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N_0 - 1}|, 1+|a|\}$
とおく。$^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して
$1 \leq n < N_0$ のときは $|a_n| \leq M$.
$n \geq N_0$ のときは(*)より $|a_n| \leq 1 + |a| \leq M$
となるので $|a_n| \leq M$ が成り立つ。

(3) 背理法で示す。$a > b$ と仮定する。
$\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b)$ とおく。$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
より, $^{\exists}N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon = \tfrac{1}{2}(a-b)$$

が成り立つ。$N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと,
$N_0 \geq N_1$ より $|a_{N_0} - a| < \frac{1}{2}(a-b)$ だから
$a_{N_0} - a > -\frac{1}{2}(a-b)$ より $a_{N_0} > \frac{1}{2}(a+b)$
が成り立つ。一方 $N_0 \geq N_2$ より
$|b_{N_0} - b| < \frac{1}{2}(a-b)$ だから $b_{N_0} - b < \frac{1}{2}(a-b)$
より $b_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b)$ が成り立つ。従って

$$b_{N_0} < \tfrac{1}{2}(a+b) < a_{N_0}$$

となり $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ に矛盾する。

$\square$

注意 1.9

定理1.5の(3)の不等式"≤"を"<"にかえることはできない。$\square$

定理1.6

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_n \to a \quad (n\to\infty)$$
$$b_n \to b \quad (n\to\infty)$$

をみたすとき. 次が成り立つ.

(1) $a_n+b_n \to a+b \quad (n\to\infty)$.

(2) $a_n-b_n \to a-b \quad (n\to\infty)$.

(3) $a_n b_n \to ab \quad (n\to\infty)$.

(4) ${}^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $b_n\neq 0$, $b\neq 0$ ならば $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \quad (n\to\infty)$.

$\square$

証明

(1) ${}^\forall\varepsilon>0$ に対して $a_n\to a$, $b_n\to b$ $(n\to\infty)$ より ${}^\exists N_1, N_2\in\mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n\geq N_1 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon/2$$
$$n\geq N_2 \Rightarrow |b_n-b|<\varepsilon/2$$

とできる. $N_0:=\max\{N_1,N_2\}$ ととると, ${}^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $n\geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(a+b)| &= |(a_n-a)+(b_n-b)| \\ &\leq |a_n-a|+|b_n-b| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

となるので $a_n+b_n\to a+b$ $(n\to\infty)$ となる.

(2) 各自考えよ.

(3) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列なので定理1.5の(2)より

$\exists M>0$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $|b_n|\leq M$

とできる. 次に $\forall \varepsilon>0$ に対して.

$a_n\to a$, $b_n\to b$ $(n\to\infty)$ より.

$\exists N_1, N_2\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$n\geq N_1 \Rightarrow |a_n-a|\leq \frac{\varepsilon}{2M}$

$n\geq N_2 \Rightarrow |b_n-b|\leq \frac{\varepsilon}{2|a|+1}$

とできる。そこで $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$

とおくと. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $n\geq N_0$ ならば

$$
\begin{aligned}
|a_nb_n-ab| &= |a_nb_n-ab_n+ab_n-ab| \\
&= |(a_n-a)b_n+a(b_n-b)| \\
&\leq |a_n-a||b_n|+|a||b_n-b| \\
&\qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq M|a_n-a|+|a||b_n-b| \\
&< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)+\frac{|a|}{2|a|+1}\varepsilon \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つので $a_nb_n\to ab$ $(n\to\infty)$ となる.

講義でやらない.

(4) $b_n\to b$ $(n\to\infty)$ かつ $|b|\neq 0$ より.

$\exists N_1\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$n\geq N_1 \Rightarrow |b_n-b|<|b|/2$

とできるので. 特に $|b_n|\geq |b|/2$

が成り立つ。

$\forall \varepsilon>0$ に対して. $a_n\to a$, $b_n\to b$ $(n\to\infty)$

より. $\exists N_2, N_3\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_2 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{|b|}{4}\varepsilon$$
$$n \geq N_3 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{|b|^2}{4|a|+1}\varepsilon$$

とできる. $N_0 := \max\{N_1, N_2, N_3\}$ とおくと. ${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b b_n}\right|$$
$$= \left|\frac{(a_n - a)b - a(b_n - b)}{b b_n}\right|$$
$$\leq \frac{|a_n - a||b| + |a||b_n - b|}{|b|\,|b_n|}$$
$$(\because 三角不等式)$$
$$\leq \frac{2}{|b|^2}\left(|b||a_n - a| + |a||b_n - b|\right)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となるので $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}\ (n \to \infty)$ が成り立つ. □

定理1.7 (はさみうちの原理)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty, \{c_n\}_{n=1}^\infty$ が ${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ をみたすとする.

〈仮定〉

$\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ は収束して $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

〈結論〉

$\{c_n\}_{n=1}^\infty$ は収束して $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ となる. ▨

証明

$^\forall \varepsilon > 0$ に対し $N_0 \in \mathbb{N}$ をあとで決める。
$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、$^\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$n \geq N_1 \Rightarrow \alpha - a_n < \varepsilon$ とできる。次に $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ より、
$^\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、
$n \geq N_2 \Rightarrow b_n - \alpha < \varepsilon$ とできる。
また、$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ だったから $a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha$ となる。よって $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ ととれば、$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば

$$-\varepsilon < a_n - \alpha < c_n - \alpha < b_n - \alpha < \varepsilon,$$

すなわち $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ。
よって $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ となる。 □

〈単調な数列〉

定義 1.11（単調増加，単調減少）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が（広義）単調増加
$\overset{定義}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$

数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が（広義）単調減少
$\overset{定義}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \geq b_{n+1}$. ▨

定理1.8

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界かつ単調増加

$\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は$a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$に収束する。

つまり、$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$となる。 ▨

証明

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が上に有界だから$a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$となる(定理1.3)。supの定義から、$^\forall n \in \mathbb{N}$に対して$a_n \leq a$となることに注意すると$|a_n - a| = a - a_n$となる。

さて、$^\forall \varepsilon > 0$に対して、supの定義から$^\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $a - \varepsilon < a_{N_0}$とできる。$^\forall n \in \mathbb{N}$に対し、$n \geq N_0$ならば、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が単調増加より$a - \varepsilon < a_{N_0} \leq a_n$となるので

$$|a_n - a| = a - a_n < \varepsilon$$

となる。よって$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$となる。

□

例1.18 (自然対数の底)

数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$は収束する。

$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$とおき、自然対数の底という。 ▨

証明

$a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ とおく。

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であることを示す。

$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad (\because 二項定理)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\text{—}(*)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} 1\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$\left(\because \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

となるので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である。

2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示す。

$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $(*)$ より

$$0 \leq a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} \quad (\because k! \geq 2^{k-1})$$

$$= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leq 3$$

となるので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である。

1. 2. と定理1.8より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する

□

〈コンパクト性定理〉

定義1.12（部分列）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から順番をかえずに一部を抜きだした数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列といい、$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とかく。

□

例1.19

$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := (-1)^n$ とおいて数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。このとき

$\{a_1, a_3, a_5, a_7, \cdots\} = \{-1, -1, -1, -1, \cdots\}$

や

$\{a_2, a_4, a_6, a_8, \cdots\} = \{1, 1, 1, 1, \cdots\}$

は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列である

□

上記の例1.19の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないが有界である。つまり定理1.5の「収束⇒有界」は成り立つが逆の「有界⇒収束」は成り立たない。

定理1.9 (Borzano-Weierstrass)
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界
$\Longrightarrow$ ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して、$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する。

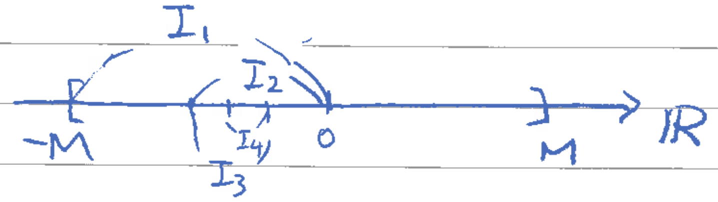
□

定理1.9は「$\mathbb{R}$上の有界集合は相対コンパクト」をいっている。詳しくは数学入門CDでやる。

証明の概略

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界なので $\exists M>0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$、すなわち $-M \leq a_n \leq M$ とできる。

1. $[-M,0]$ と $[0,M]$ の少なくともどちらか一方には無限個の a_n がある。無限個ある方の区間を I_1 とおく。ただし、両方とも無限個あるときは大きい方をとることにする。



2. I_1 を半分にした2つの区間を考えると、どちらかの区間には無限個の a_n がある。無限個ある方（両方とも無限個あるときは大きい方）を I_2 とおく。

3. I_2を半分にした2つの区間を考えると
どちらかの区間には無限個のa_nが
ある。無限個ある方をI_3とおく。以下くり
返すと、区間の列$I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots$
が作れる。

4. $a_{n_1} \in I_1, a_{n_2} \in I_2, a_{n_3} \in I_3, \ldots$
として、数列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$を作る。$I_k$が
どんどん小さくなる(I_kの幅は$\frac{M}{2^{k-1}}$)
ことから、$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$はある実数$a \in \mathbb{R}$
に収束することがわかる。 □

〈Cauchy列と完備性〉
今までの話は「収束する実数$a \in \mathbb{R}$がわかっている」
が前提にあった。そうでないと$|a_n - a|$を計算
することができない。収束先がわからないとき
に収束はどうやって示せばよいか？

定義1.13 (Cauchy列)
数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$がCauchy列。
$\underset{定義}{\Longleftrightarrow}$ $^{\forall}\varepsilon > 0$に対して、$^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}$ s.t.
$^{\forall}n, m \in \mathbb{N}$に対して
$n, m \geq N_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$
が成り立つ。 ㊋

Cauchy列は感覚的には
$|a_n - a_m| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$
と同じである。

定理1.10（実数の完備性）
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列
$\Leftrightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がCauchy列
同値 $\square$

定理1.10により、数列が収束するか調べるにはCauchy列となるかどうかを調べればよい。

定理1.10の証明

($\Rightarrow$) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a\in\mathbb{R}$ に収束すると仮定する。収束の定義から、$\forall\varepsilon>0$ に対して $\exists N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し

$$n\geq N_0 \Rightarrow |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

とできる。よって $\forall n,m\in\mathbb{N}$ に対して $n,m\geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned}|a_n-a_m| &= |(a_n-a)-(a_m-a)|\\ &\leq |a_n-a|+|a_m-a|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

となるので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はCauchy列である。

($\Leftarrow$)（こちらは難しい）

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示す。
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はCauchy列より、$\exists N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $n\geq N_0\Rightarrow |a_n-a_{N_0}|<1$ とできる。よって

$$|a_n|\leq|a_n-a_{N_0}|+|a_{N_0}|\leq 1+|a_{N_0}|$$

となるから、$M:=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N_0-1}|,1+|a_{N_0}|\}$ とおくと、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $|a_n|\leq M$ が成り立つ。

2. Borzano-Weierstrass の定理 (定理1.9) より) 部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ とできる。そこで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束することを示す。

$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列だから $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon/2$$

とできる。次に $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ より $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して

$$k \geq N_2 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる。そこで、$k_0 \in \mathbb{N}$ を $k_0 \geq N_2$ かつ $n_{k_0} \geq N_1$ をみたすようにとると、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となるので $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ が成り立つ □

注意 1.10

Borzano-Weierstrass の定理は実数の完備性 (定理1.10) を用いずに証明できる。

///

例1.20

漸化式

$$\begin{cases} \dfrac{2}{S_{n+1}} = \dfrac{1}{S_n} + \dfrac{1}{s_n} \\ s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}\, s_n} \\ s_1 = 6, \quad S_1 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

で定められる数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する

㊃

証明

$n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n \leq S_n$
$\leq S_{n-1} \leq \cdots \leq S_2 \leq S_1$
となることを帰納法で示す。

1. $n=1$ のとき、$0 < s_1 = 6 \leq 4\sqrt{3} \leq S_1$ は成り立つ

2. $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n \leq S_n \leq S_{n-1} \leq \cdots \leq S_1$ を仮定して、$s_n \leq s_{n+1} \leq S_{n+1} \leq S_n$ を示す。

まず、

$$S_{n+1} = \frac{2}{1/S_n + 1/s_n} > 0$$

より

$$s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}\, s_n} \geq 0$$

がわかる。次に帰納法の仮定 $s_n \leq S_n$ より $\frac{1}{s_n} \geq \frac{1}{S_n}$ だから

$$S_{n+1} \leq \frac{2}{\frac{1}{S_n}+\frac{1}{S_n}} = S_n$$

$$S_{n+1} \geq \frac{2}{\frac{1}{s_n}+\frac{1}{s_n}} = s_n$$

がわかる。よって

$s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}\ s_n} \geq \sqrt{s_n^2} = s_n$,

$s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}\ s_n} \leq \sqrt{S_{n+1}^2} = S_{n+1}$

となるので $s_n \leq s_{n+1} \leq S_{n+1} \leq S_n$

が示された。

3. $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq S_n \leq S_{n-1} \leq \cdots \leq S_1$

より

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$は単調増加で有界,

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$は単調減少で有界

となるから，定理1.8より収束する □

注意1.11

収束先が円周率に等しいことを示すのは別の(難しい)問題である。

〈漸化式と極限〉

$p, q, x \in \mathbb{R}$, $p \neq 1$に対し漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = p a_n + q & \text{—}(*) \\ a_0 = x \end{cases}$$

を考える。αを方程式 $y = py + q$ の解とすれば

$$a_{n+1} - a = r(a_n - a)$$
$$= \cdots = r^{n+1}(a_0 - a)$$
$$= r^{n+1}(x - a)$$

となるので $a_n = r^n(x-a) + a$ と解ける. よって

$0 < |r| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$

$|r| > 1 \Rightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束しない

がわかる。

ところで (*) で $n \to \infty$ とすれば、

$a = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すれば

$$a = ra + q$$

となるから a は $y = ry + q$ の解になるはずである。そこで $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束するかどうかを a_n を求めずに調べてみよう。

(*) より

$$a_{n+1} = ra_n + q$$
$$a_n = ra_{n-1} + q$$

だから. ひきざんすると

$$a_{n+1} - a_n = r(a_n - a_{n-1})$$

となるので

$$|a_{n+1} - a_n| = |r||a_n - a_{n-1}| \quad \text{—(**)}$$

となる。

定理1.11（縮小写像の原理）

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は，$0 \leq {}^{\exists}L < 1$ s.t. ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}|$$

をみたすとする。このとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列とする。 ☑

証明の方針

$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，$m \geq n$ ならば

$$
\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} \\
&\quad + \cdots - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \\
&\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| \\
&\quad + \cdots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \\
&\qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq (1+L)|a_{m-1} - a_{m-2}| \\
&\quad + \cdots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \\
&\qquad (\because \text{仮定}) \\
&\leq (1+L+L^2)|a_{m-2} - a_{m-3}| \\
&\quad + \cdots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \\
&\qquad (\because \text{仮定}) \\
&\leq \cdots \leq (L^{m-n} + L^{m-n-1} + \cdots + 1)|a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \cdots \leq L^n(L^{m-n} + L^{m-n-1} + \cdots + 1) \\
&\qquad \times |a_1 - a_0| \\
&\leq L^n\left(\frac{1}{1-L}\right)|a_1 - a_0|
\end{aligned}
$$

となる。$n, m \to \infty$ とすれば右辺は 0 に収束する。

ので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列になることがわかる

□

(**)に縮小写像の原理を用いると.
$|\xi| < 1 \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列
がわかる。

◎ なんでこんなメンドウなことをするのか?

理由　もっと複雑な(非線形問題)

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

に対して. a_n が求められないことがある。この方法なら. a_n が求められなくても $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するか? がわかる。

例1.2.1

漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

から定まる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する.

証明

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{1+a_n} - \sqrt{1+a_{n-1}}|$$

$$\leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}} \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$$

となるから. 縮小写像の原理(定理1.11)を使う □

第2章 関数と極限

§2.1 いろいろな関数

〈関数とは何か?〉(詳しくは数学入門)

定義 2.1 (関数)

集合 X に対して, f が X 上の関数であるとは「$\forall x \in X$ に対して実数 $f(x) \in \mathbb{R}$ が定まる規則」のことをいう。このとき $f: X \to \mathbb{R}$ とかく。

□

例 2.1 (指数関数)

$\mathbb{R}$ 上の関数 $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

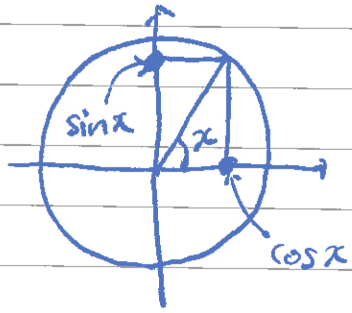
$$\exp(x) := e^x$$

で定める。

□

例 2.2 (三角関数)

$\sin$, $\cos$ は $\mathbb{R}$ 上の関数である。右図のようにして $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $\sin x$, $\cos x$ を定めるのであった。



また $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \cdots\} \to \mathbb{R}$ を $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \cdots\}$ に対して

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

と定めるのであった

□

注意 2.1

例2.1, 2.2の定義は厳密な定義ではない。

〈逆関数〉

$\forall y \in \mathbb{R}$ に対して $y=\exp(x)$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在するとは限らない($y=-1$ とすると $-1=\exp(x)=e^x$ となる $x \in \mathbb{R}$ はない)。

また、$\forall y \in \mathbb{R}$ に対して、$y=\sin(x)$ となる $x \in \mathbb{R}$ はたくさんあるかもしれない($y=0$ とすると、$y=\sin(x)$ となる $x \in \mathbb{R}$ は $x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$)。

どのように定めればよいか?

定義 2.2 (像)

集合 X と $f: X \to \mathbb{R}$ に対し、f の像 $f(X)$ を

$$f(X) := \{ f(x) : x \in X \}$$

で定義する。

注意 2.2

$f: X \to \mathbb{R}$ の像 $f(X)$ はあらっぽくいえば $y=f(x)$ としたときの y の範囲のこと

定義 2.3 (単射)

集合 X 上の関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が単射

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\forall x_1, x_2 \in X$ に対して

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

注意 2.3

$f: X \to \mathbb{R}$ が単射というのは、(対偶をとれば)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

だから異なる2点の行き先は常に違うということ

$\boxtimes$

集合 X 上の関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が単射であるとき、f の逆関数 $f^{-1}: f(A) \to X$ は、$^\forall y \in f(A)$ に対して、$f^{-1}(y) \in X$ を

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

をみたすものとして定義することができる。

例 2.3 (対数関数)

exp は単射であり、

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

だから、exp の逆関数は $(0, \infty)$ 上で定義できる。これを対数関数といい、$\log: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ とかくのであった。

$$\log(e^x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$e^{\log y} = y \qquad (y \in (0, \infty))$$

であったことに注意せよ。

$\boxtimes$

例 2.4 (逆三角関数)

sin は $\mathbb{R}$ 上で単射でないため、逆関数を作るためには(定義域に)制限をかける必要がある。

sinは $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で単射な関数になり、

$$\sin([-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]) = \{\sin x : x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\}$$

となるので、sin の逆関数は $[-1, 1]$ 上で定義できる。これを逆正弦関数といい、

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ とかく。

$$\arcsin(\sin x) = x \qquad (x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}])$$

$$\sin(\arcsin y) = y \qquad (y \in [-1, 1])$$

だが

$$\arcsin(\sin x) \neq x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

となることに注意すること。同様にして、

逆余弦関数 $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

逆正接関数 $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

を定義できる。

□

〈指数関数〉

定理2.1 (指数法則)

次の指数法則が成り立つ。

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して $(e^x)^y = e^{xy}$

□

系2.1

$\forall a, b > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $(ab)^x = a^x b^x$

□

指数法則(1)(2)を$\mathbb{C}$上に拡張しても成り立つとしよう。つまり
$\forall z, w \in \mathbb{C}$に対して $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$
$\forall z, w \in \mathbb{C}$に対して $(e^z)^w = e^{zw}$
が成り立つとする。

定理2.2 (Eulerの公式)
$\forall x \in \mathbb{R}$に対して
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
が成り立つ

□

$z \in \mathbb{C}$に対して e^zが何か?はとりあえず無視しておく。$x \in \mathbb{R}$に対し
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$$
$$= \cos x - i \sin x$$
より、$\cos x, \sin x$について解くと
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
が得られる。

系2.2
$\forall x \in \mathbb{R}$に対して
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
が成り立つ。□

これにより、指数関数がよくわかれば、三角関数もよくわかることになる。

定理 2.3（加法定理）
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$.

□

証明

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)} + e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}\right) = \cos(x+y)$$

となる。$\sin(x+y)$ についても同様である。

□

§2.2 関数の極限

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

であった

◎ $\frac{x^2-4}{x-2}$ は $x=2$ で (分母)$=0$ となる。

$x=2$ で定義できない。

◎「近づく」はどう数学でいえばよいか?

定義 2.4 (関数の極限)

$I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. $f: I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$.

・ f が $x\to x_0$ のときに $A\in\mathbb{R}$ に収束する.

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$ に対して, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$, に対して

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

このとき, $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ とか $f(x)\to A\ (x\to x_0)$ とかく.

・ f が $x\to x_0$ のときに $\infty\ (-\infty)$ に発散する.

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall K>0$ に対して, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow f(x)>K$$
$$(f(x)<-K)$$

このとき, $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty\right)$

とか $f(x)\to\infty\ (x\to x_0)$ $\left(f(x)\to-\infty\ (x\to x_0)\right)$

とかく。

例 2.5

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

証明

1. $\forall \varepsilon > 0$ に対して，定義の $\delta > 0$ をみつけるためにあとで決めることにする。$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対し，$0 < |x-0| < \delta$ を仮定すると

$$\begin{aligned} \left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| &= |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \\ &\leq |x| \quad \left(\because \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1\right) \\ &< \delta \quad (\because |x| < \delta) \end{aligned}$$

となる。よって $\boxed{\delta < \varepsilon}$ であれば

$$\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

となる。

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\delta := \varepsilon > 0$ とおく。$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して $0 < |x-0| < \delta$ ならば，

$$\begin{aligned} \left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| &= |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \\ &\leq |x| \quad \left(\because \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1\right) \\ &< \delta \quad (\because |x| < \delta) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となるので，$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ となる。

□

例2.6

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1.$$

$\square$

証明

1. $\forall \varepsilon > 0$ に対し、定義の $\delta > 0$ をみつけるために
あとで決めることにする。$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ に対し、
$0 < |x-1| < \delta$ を仮定すると、

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= |(x-1)(x+1)| \\ &= |x-1|\,|x-1+2| \\ &\leq |x-1|(|x-1|+2) \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta(\delta+2) \quad (\because |x-1|<\delta) \end{aligned}$$

となる。$\boxed{\delta \leq 1}$ を仮定すると $\delta(\delta+2) \leq 3\delta$
より $\boxed{3\delta \leq \varepsilon}$ であれば $|x^2-1| < \varepsilon$ となる。

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\}$ とおくと
$\delta \leq 1$ かつ $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ となる。$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
に対して、$0 < |x-1| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= |x-1|\,|x-1+2| \\ &\leq |x-1|(|x-1|+2) \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta(\delta+2) \quad (\because |x-1|<\delta) \\ &\leq 3\delta \quad (\because \delta \leq 1) \\ &\leq \varepsilon \quad (\because \delta \leq \tfrac{\varepsilon}{3}) \end{aligned}$$

となるので $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ となる

$\square$

上記の議論を ε-δ論法 という。

定理2.4

$I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I$, $f: I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow$ $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I\setminus\{x_0\}$ に対し
同値 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$

$\Rightarrow f(x_n)\to A\ (n\to\infty)$

証明

($\Rightarrow$) $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I\setminus\{x_0\}$ に対し $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$ を仮定する。$\forall\varepsilon>0$ に対し $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ より

$\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ —(*)

が成り立つ。$x_n\to x_0$ より $\exists N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し

$n\geq N_0 \Rightarrow |x_n-x_0|<\delta$ —(**)

となるので、(**)と(*)より $n\geq N_0$ ならば $|f(x_n)-A|<\varepsilon$ が成り立つ。従って、$f(x_n)\to A\ (n\to\infty)$ となる。

($\Leftarrow$) 背理法で示す。つまり、

$\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall\delta>0$ に対して、$\exists x_\delta\in I\setminus\{x_0\}$ s.t. $0<|x_\delta-x_0|<\delta$ かつ $|f(x_\delta)-A|\geq\varepsilon_0$

を仮定する。$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $\delta=\frac{1}{n}$ とえらぶと、$\exists x_n\in I\setminus\{x_0\}$ s.t.

$|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$

となる。

1. $n \to \infty$ とすると $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ より
$x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$ となる.

2. $n \to \infty$ とすると $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ より
$f(x_n) \to A \ (n \to \infty)$ とならない.

1. 2. は、最初の仮定
$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対して
$x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \Rightarrow f(x_n) \to A \ (n \to \infty)$
に矛盾する. $\square$

定理2.4を用いると、数列の極限と同じことはほとんどそのまま成り立つ.

定理2.5
$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,
$g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$
とすると、次が成り立つ.

(1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$

(2) $\lim_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = AB$

略

例2.7
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

略

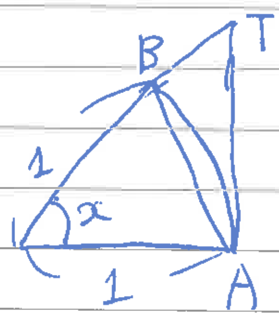
証明の方針

右図より $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

において

$\overline{AB} \leq \overset{\frown}{AB} \leq \overline{AT}$

であり



$\overline{AB} = \sqrt{2-2\cos x}$ (∵余弦定理)

$= \sqrt{2-2(1-2\sin^2\frac{x}{2})}$ (∵倍角の公式)

$= 2\sin\frac{x}{2}$

$\overset{\frown}{AB} = x$ (∵ラジアンの性質)

$\overline{AT} = \tan x$

より

$$\frac{1}{\tan x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$$

だから

$$\frac{\sin x}{\tan x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

となる.

$(\text{左辺}) = \frac{1}{\cos x}$, $(\text{右辺}) = \cos\frac{x}{2}$

(∵倍角公式)

より

$$\frac{1}{\cos x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos\frac{x}{2}$$

となる. $x \to 0$ とすると $\cos x \to 1$, $\cos\frac{x}{2} \to 1$

よりはさみうちの原理から

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ となる □

〈片側極限〉

$x \to x_0$ を + から近づけるか？ − から近づけるか？で話がかわる場合がある。

定義 2.5（片側極限）

$I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I$, $f: I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$.

① f が $x\to x_0+0$（または $x\downarrow x_0$）のとき、$A\in\mathbb{R}$ に収束する

$\underset{定義}{\iff}$ $^\forall\varepsilon>0$ に対して $^\exists\delta>0$ s.t. $^\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$$0<x-x_0<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

このとき、$\displaystyle\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A$ とか $f(x)\to A\ (x\to x_0+0)$ とかく（$x\to x_0+0$ のかわりに $x\downarrow x_0$ とかいてもよい）

② f が $x\to x_0-0$（または $x\uparrow x_0$）のとき、$A\in\mathbb{R}$ に収束する。

$\underset{定義}{\iff}$ $^\forall\varepsilon>0$ に対して $^\exists\delta>0$ s.t. $^\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$$0<x_0-x<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

このとき、$\displaystyle\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A$ とか $f(x)\to A\ (x\to x_0-0)$ とかく。（$x\to x_0-0$ のかわりに $x\uparrow x_0$ とかいてもよい）

□

〈無限大での極限〉

話をかんたんにするために、$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ についてのみ考える。

定義2.6 (無限大での極限)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする.

◎ f が $x \to \infty$ で $A \in \mathbb{R}$ に収束する.

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists K > 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$x > K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

このとき. $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ とか $f(x) \to A \ (x \to \infty)$ とかく.

◎ f が $x \to -\infty$ で $A \in \mathbb{R}$ に収束する.

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists K > 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$x < -K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

このとき. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ とか $f(x) \to A \ (x \to -\infty)$ とかく

終

注意.2.4

無限大に発散する場合の定義2.5. 2.6も同様にできる. 各自定義をかいてみよ

終

§2.3 連続関数

関数が連続であるとは. 感覚的には. グラフがつながっていることであった. これを厳密に考えることにする.

定義2.7（関数の連続性）

$I \subset \mathbb{R}$,　$f: I \to \mathbb{R}$.

◎ f が $x_0 \in I$ で 連続

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して ${}^{\exists}\delta > 0$ s.t ${}^{\forall}x \in I$ に対して

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

◎ f が I上 連続

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ ${}^{\forall}x_0 \in I$ に対して f は x_0 で 連続.

$\boxtimes$

命題 2.1

$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

f が x_0 で 連続 $\underset{\text{同値}}{\iff}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\boxtimes$

講義でやらない. →

証明

($\Rightarrow$) ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し, f は x_0 で連続より

${}^{\exists}\delta > 0$ s.t. ${}^{\forall}x \in I$ に対し

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ―(*)

とできる. ${}^{\forall}x \in I \setminus \{x_0\}$ に対し $0 < |x - x_0| < \delta$

ならば (*) より $|x - x_0| < \delta$ だから.

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となる. よって

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ となる.

($\Leftarrow$) ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

より ${}^{\exists}\delta > 0$ s.t. ${}^{\forall}x \in I \setminus \{x_0\}$ に対し

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ―(**)

とできる. ${}^{\forall}x \in I$ に対し $|x - x_0| < \delta$ と仮定する.

$|x-x_0|=0$ なら $x=x_0$ より $|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$。
$|x-x_0|\neq 0$ なら $0<|x-x_0|<\delta$ より
(＊＊)から $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ となる。
以上より $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ となるので
f は x_0 で連続となる。

□

例2.8
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対し、$f(x):=x^3-1$
で定義する。このとき、f は $x=2$ で連続となる。

四

証明
1. $\forall\varepsilon>0$ に対して定義の $\delta>0$ をみつけるために
あとで決める。$\forall x\in\mathbb{R}$ に対し $|x-2|<\delta$ を
仮定すると

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(2)| &= |(x^3-1)-(2^3-1)| \\
&= |x^3-2^3| \\
&= |(x-2)(x^2+2x+4)| \\
&= |x-2|\,|(x-2)^2+6x| \\
&= |x-2|\,|(x-2)^2+6(x-2)+12| \\
&\leq |x-2|\left(|x-2|^2+6|x-2|+12\right) \\
&\qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&< \delta(\delta^2+6\delta+12) \\
&\qquad (\because |x-2|<\delta) \\
&\leq \delta(1+6+12) \quad (\boxed{\delta\leq\square}\ \text{と仮定}) \\
&= 19\delta
\end{aligned}
$$

となる。$\boxed{19\delta \leq \varepsilon}$ であれば

$|f(x)-f(2)| < 19\delta \leq \varepsilon$

となる。$19\delta \leq \varepsilon$ を δ についてとくと

$\boxed{\delta \leq \frac{\varepsilon}{19}}$ となる。

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{19}, 1\}$ とおく。

$\delta \leq \frac{\varepsilon}{19}$, $\delta \leq 1$ となることに注意する。

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し, $|x-2| < \delta$ ならば.

$$\begin{aligned}|f(x)-f(2)| &= |(x-2)((x-2)^2+6(x-2)+12)| \\ &\leq |x-2|(|x-2|^2+6|x-2|+12) \\ &\qquad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta(\delta^2+6\delta+12) \\ &\qquad (\because |x-2|<\delta) \\ &\leq 19\delta \qquad (\because \delta \leq 1) \\ &\leq \varepsilon \qquad (\because \delta \leq \tfrac{\varepsilon}{19})\end{aligned}$$

となるので f は $x=2$ で連続となる。

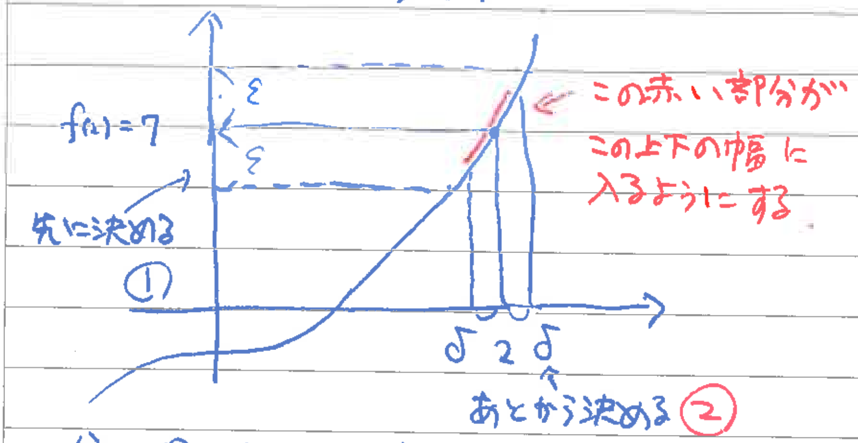
□

注意 2.5

証明をかくだけなら上の 2. のみでもよいが. δ をどうやってとったかがわかるように. 1. もかいておくとよい

☒

〈例12.8のグラフ〉



〈証明をかくときに気をつけるといいこと〉

- $\varepsilon>0$ はグラフでいうところの縦軸
  $\Rightarrow$ $f(x)$ の計算ででてくるはず
- $\delta>0$ はグラフでいうところの横軸
  $\Rightarrow$ x の計算ででてくるはず.
- ε-δ 論法では(何か条件がないと) $f(x)$ と x のまじった計算 ($f(x)+x$ とか $xf(x)$ とか) をすることは多くない。

例12.9

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x):=\begin{cases}\frac{1}{q} & (x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},\ x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N} \text{ は互いに素}) \\ 0 & (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ または } x=0)\end{cases}$$

と定義する. f は $x=0$ で連続, $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ では不連続となる $\square$

注意 2.6

例12.9はグラフでかくことが難しいので. ε-δ 論法を使わないと証明は困難。 $\square$

講義でやらない。 → 証明

1. fが $x=0$で連続となることを示す。

$^\forall \varepsilon>0$ に対し、$\delta := \min\{\varepsilon, 1\}$ とおく。

$^\forall x \in \mathbb{R}$に対し $|x|<\delta$ ならば

$$|f(x)-f(0)| = |f(x)-0|$$
$$= |f(x)|$$
$$\leq |x| < \delta = \varepsilon$$

となる。実際、$x \in \mathbb{Q}$ のとき $\delta \leq 1$より $|f(x)| \leq |x|$ となる。$x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ のときは $f(x)=0$ より $|f(x)| \leq |x|$ となる。従って fは$x=0$で連続となる。

2. fが$x_0 \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$で不連続となることを示す。$x_0 = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$は互いに素) とおく。

$\varepsilon := \frac{1}{2q}$ とおく。$^\forall \delta>0$ に対し、

$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\mathbb{Q}$ を ひとつとると、

$|x-x_0|<\delta$ かつ

$$|f(x)-f(x_0)| = |0-f(x_0)|$$
$$= \left|-\frac{1}{q}\right| = \frac{1}{q} > \frac{1}{2q} = \varepsilon$$

となるので fはx_0 で連続にならない

□

〈ε−N論法やε−δ論法：感覚と厳密〉

$(\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ の感覚.)

xがx_0に近づくと$f(x)$はAに近づく.

困ること

近づくは人によってまちまちな感覚

$(\lim_{x \to x_0} f(x) = A$の厳密な取り扱い)

「$f(x)$はAに近づく」→ 誤差 $|f(x) - A|$ が $\varepsilon > 0$ より小さくなるように先に与える.

「xがx_0に近づく」→ $0 < |x - x_0| < \delta$ なら上の(誤差) $< \varepsilon$ となるように$\delta > 0$をあとから決める.

〈連続関数の性質〉

定義 2.8 (関数の和, スカラー倍)

$I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: I \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

に対し, 和 $f+g: I \to \mathbb{R}$, スカラー倍 $\lambda f: I \to \mathbb{R}$,

積 $fg: I \to \mathbb{R}$ をそれぞれ $^\forall x \in I$ に対し

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$
$$(fg)(x) := f(x) g(x)$$

で定義する. ▨

定義 2.9 (関数の合成)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し, 関数の

合成 $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $^\forall x \in \mathbb{R}$ に対し

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

で定義する.

▨

定理 2.6

(簡単のため) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続

$\Rightarrow$ $^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対し $f+g$, λf, fg も x_0 で連続.

(2) f, g が $\mathbb{R}$ 上連続

$\Rightarrow$ $g \circ f$ も $\mathbb{R}$ 上連続

証明　(1)は省略. (2)のみ示す.
$^\forall x_0 \in \mathbb{R}$に対し, $g \circ f$がx_0で連続となることを示す. $^\forall \varepsilon > 0$に対しgが$y_0 = f(x_0)$で連続なので
$^\exists \delta_1 > 0$ s.t. $^\forall y \in \mathbb{R}$に対し
$$|y - f(x_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$
とできる. 次に, この$\delta_1 > 0$に対し, fがx_0で連続なので $^\exists \delta > 0$ s.t. $^\forall x \in \mathbb{R}$に対し
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1$$
とできる. よって, 上のyとして$y = f(x)$とすれば $|x - x_0| < \delta$ ならば
$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon,$$
つまり
$$|g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon$$
となる. 従って$g \circ f$はx_0で連続になる. $x_0 \in \mathbb{R}$は任意だったから$g \circ f$は$\mathbb{R}$上連続になる □

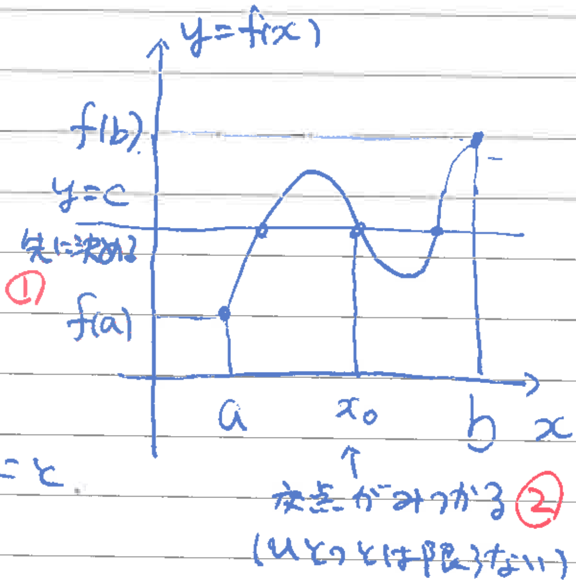
§2.4 閉区間上の連続関数

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$上の連続関数$f: I \to \mathbb{R}$には重要な性質がある. 以下$[a, b] \subset \mathbb{R}$とする.

定理 2.7 (中間値の定理)
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$が連続, $f(a) < f(b)$
$\Rightarrow$ $^\forall c \in [f(a), f(b)]$に対して$^\exists x_0 \in [a, b]$ s.t. $f(x_0) = c$. ☒

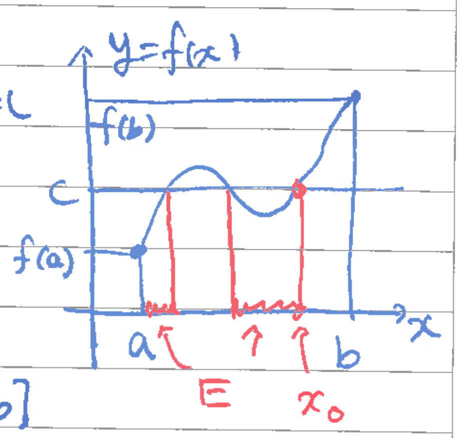
中間値の定理

グラフでいうと、
$\forall c \in [f(a), f(b)]$
に対し、
直線 $y=c$ と
グラフ $y=f(x)$
はまじわるということ。



証明

$\forall c \in [f(a), f(b)]$ に対し
$E := \{x \in [a,b] : f(x) \leq c\}$
とおく(右図参照)
$\sup E =: x_0$
とおくと $[a,b]$ が
閉区間より $x_0 \in [a,b]$
となる。以下 $f(x_0)=c$ となることを示す。

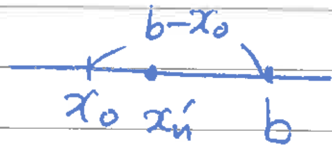


1. $f(x_0) \leq c$ を示す。$x_0 = \sup E$ より
$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ s.t. $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$
とできる。$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in E$ より
$f(x_n) \leq c$, かつ f は $[a,b]$ 上
連続だから、$n \to \infty$ とすると
$f(x_0) \leq c$ となる。

2. $f(x_0) \geq c$ を示す. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し.

$x_n' := x_0 + \dfrac{b - x_0}{n}$ とおくと.

$x_0 < x_n' \leq b$ となる



(右図) $x_0 = \sup E$

より $x_n' \notin E$ だから.

$f(x_n') \geq c$ となる.

$n \to \infty$ とすると f は I 上連続かつ

$x_n' \to x_0 \ (n \to \infty)$ だから $f(x_0) \geq c$

となる.

1. 2. より $f(x_0) = c$ となる $\square$

例 2.10

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ は連続で, 「$\forall x \in [0,1]$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$」が成り立つとする.

このとき, 方程式 $f(x) = x$ は $[0,1]$ 上に解を持つ.

例

証明

$F: [0,1] \to \mathbb{R}$ を $x \in [0,1]$ に対し

$F(x) := f(x) - x$ と定めると, F は

$[0,1]$ 上連続になり.

$F(0) = f(0) - 0 \geq 0 - 0 = 0 \quad (\because f(0) \geq 0)$

$F(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0 \quad (\because f(1) \leq 1)$,

つまり $F(0) \leq 0 \leq F(1)$ となるので中間値の定理から $\exists x_0 \in [0,1]$ s.t. $F(x_0) = 0$ となる $\square$

注意 2.7

[a,b] と閉区間でないと証明で困るところは $x_0 \in [a,b]$ となるかどうか？である。閉区間にしても似た定理は作れるが証明はかなり複雑になる。 ☒

定理 2.8 (最大値定理)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続

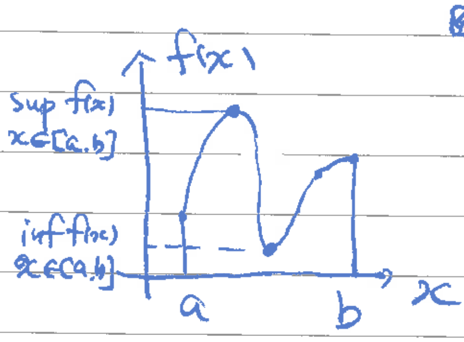
$\Longrightarrow$ f の最大値、最小値が存在する。つまり

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) := \sup\{f(x) : x\in[a,b]\} = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

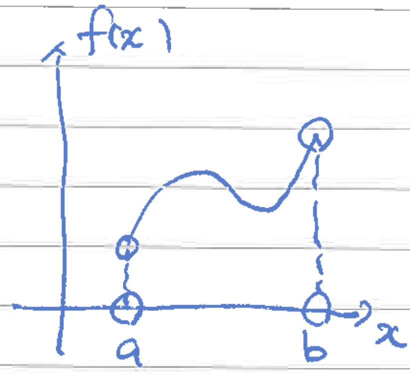
$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

が成り立つ ☒

最大値定理をグラフでいうと、グラフの一番高いところと一番低いところがあるということ。



[a,b]を(a,b)にかえると右のグラフから最大値、最小値がないことが推測できる。



証明

最大値の存在を示す.

1. 収束する近似列を作る. $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$

とおくと. $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ s.t.

$f(x_n) \to M$ $(n\to\infty)$ とできる. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

は有界列なので Borzano-Weierstrass の

定理より収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

が存在する。

2. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ とおくとき. $f(x_0)=M$

となることを示す. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset [a,b]$ より.

$x_0 \in [a,b]$ となる。f が $[a,b]$ 上

連続だから

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad (k\to\infty)$$

となる. 他方

$$f(x_{n_k}) \to M \quad (k\to\infty)$$

だったから. $M=f(x_0)$ となる. よって

$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ は最大値となる

□

〈一様連続性〉

$I \subset \mathbb{R}$ に対し $f: I \to \mathbb{R}$ が I 上連続のとき、一般に定義でとれる $\delta > 0$ は $x_0 \in I$ によって異なる。

例2.11

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) := x^2$ で定めると、f は $\mathbb{R}$ 上連続となるが $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し、ε-δ 論法の $\delta > 0$ がどうかわるかみてみよう。

$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\delta > 0$ をあとで決める。
$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$|x - x_0| < \delta$ を仮定する。

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \\
&= |(x - x_0)(x + x_0)| \\
&= |x - x_0||x - x_0 + 2x_0| \\
&\leq |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|) && (\because \text{三角不等式}) \\
&< \delta(\delta + 2|x_0|) && (\because |x - x_0| < \delta) \\
&\leq \delta(1 + 2|x_0|) && (\boxed{\delta \leq 1} \text{ を仮定})
\end{aligned}$$

となる。$\boxed{\delta(1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon}$ となれば

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta(1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon$$

となる。

$\delta(1+2|x_0|) \leq \varepsilon$ をδについて解くと

$\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$ となる. 従って

$\delta := \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}, 1\right\}$ ととれば

よいが. $|x_0|$が大きいと. δはいくらでも

小さくなってしまうことがわかる. つまり

$$\lim_{|x_0| \to \infty} \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|} = 0$$

となることがわかる ☑

例2.12

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を$^\forall x \in \mathbb{R}$ に対し. $f(x) := x$ と

定めると. fは$\mathbb{R}$上連続となるが. $x_0 \in \mathbb{R}$

に対し. ε-δ論法の$\delta > 0$がどうなるか

みてみよう。

$^\forall \varepsilon > 0$ に対し. $\delta > 0$をあとで決める.

$^\forall x \in \mathbb{R}$に対し $|x - x_0| < \delta$ を仮定する.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x - x_0| \\ &< \delta \quad (\because |x - x_0| < \delta) \end{aligned}$$

となるから. $\boxed{\delta \leq \varepsilon}$ となれば

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \leq \varepsilon$$

となる. 従って $\delta = \varepsilon$ ととればよいが

$x_0 \in \mathbb{R}$がどの値であってもδは小さく

ならないことがわかる

☑

例2.11, 2.12から. $\mathbb{R}$上連続といったときに違いがあることがわかる. 例2.12の性質を一般化してみる.

定義2.10 (一様連続)

$I \subset \mathbb{R}$に対し $f: I \to \mathbb{R}$が **I上一様連続**
$\underset{\text{定義}}{\iff}$ $^\forall \varepsilon > 0$に対して $^\exists \delta > 0$ s.t. $^\forall x, x' \in I$ に対して

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

例2.13

例2.12のfは$\mathbb{R}$上一様連続である.

証明

$^\forall \varepsilon > 0$に対し. $\delta := \varepsilon > 0$ととる.
$^\forall x, x' \in \mathbb{R}$に対し, $|x - x'| < \delta$ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |x - x'| \\ &< \delta \quad (\because |x - x'| < \delta) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となるので fは$\mathbb{R}$上一様連続である

□

注意2.8

一様連続の定義の$\delta > 0$をみつけるためには, 例2.12の計算が必要である.

一般に、一様連続かどうかを定義に従って示すのは難しい。しかし、次の強力な定理がある。

定理2.9

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続
$\Rightarrow$ f は $[a,b]$ 上一様連続。

□

注意 2.9

定理2.9は閉区間であることが重要。
開区間では成り立たない □

定理2.9の証明 (少し難しい)

背理法で示す。つまり f が $[a,b]$ 上一様連続でないと仮定する。

1. f が $[a,b]$ 上一様連続でないことを論理記号でかくと

「$^\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $^\forall\delta>0$ に対して $^\exists x_\delta, x'_\delta\in I$ s.t. $|x_\delta-x'_\delta|<\delta$ かつ $|f(x_\delta)-f(x'_\delta)|\geq\varepsilon_0$」 —(*)

が成り立つ。

否定　$\exists\to\forall$、$\forall\to\exists$
　$p\Rightarrow q$ $\longrightarrow$ p かつ「q でない」

2. $^\forall n\in\mathbb{N}$ に対し $\delta:=\frac{1}{n}$ ととり (*) に用いると $^\exists x_n, x'_n\in I$ s.t. $|x_n-x'_n|<\frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n)-f(x'_n)|\geq\varepsilon_0$ とできる。

3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ は有界列だから、
Borzano-Weierstrass の定理より、収束
部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する。
$x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ とすると、
$x_0 \in [a,b]$ である。

$$|x_{n'_k} - x_0| \leq |x_{n'_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0|$$

となるから、$k \to \infty$ とすれば $x_{n'_k} \to x_0$ となる。

4. f は I 上連続だから

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \quad f(x_{n'_k}) \to f(x_0) \quad (k \to \infty)$$

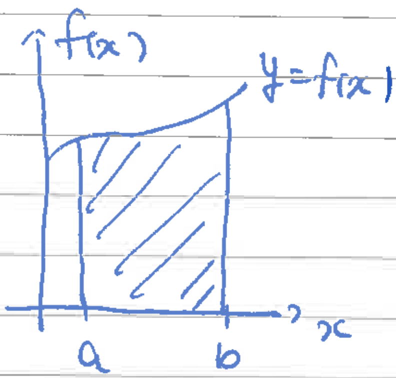
となる。他方 (*) より $|f(x_{n_k}) - f(x_{n'_k})| \geq \varepsilon_0$
となるから $k \to \infty$ とすれば

$$\varepsilon_0 \leq |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

となり $\varepsilon_0 > 0$ であったことに矛盾する。 □

注意 2.10

定理2.9は、
右図の斜線部分
の面積が(素朴な
意味で)決まる
ことを示すのに使う。
(後期でやる)



§2.5 雑多な話題

〈上極限, 下極限〉

$\{\sin(\frac{n}{4}\pi)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない数列だが, $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{n}{4}\pi)$ のようなものを考えたいときがある.

◎ 収束するかわからないが, とりあえず極限を考えたい.

定義2.11 (集積点)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $a \in \mathbb{R}$ が**集積点**

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ □

例1 2.14

$\{\sin(\frac{n}{4}\pi)\}_{n=1}^{\infty}$ の集積点は $0, \pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である □

定義2.12

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**上極限** $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と**下極限** $\liminf_{n\to\infty} a_n$ をそれぞれ

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

で定義する □

注意2.11

上極限、下極限をそれぞれ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ とかくことがある ▨

$b_n := \sup_{k\geq n} a_k$, $c_n := \inf_{k\geq n} a_k$ とおけば

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ単調減少、単調増加だから

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} a_k \right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} a_k \right)$$

とできる。とくに上極限、下極限は、$\pm\infty$ をこめて常に存在する。

定理2.10（集積点と上極限、下極限）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ最大、最小の集積点となる ▨

証明の方針

$a := \limsup_{n\to\infty} a_n$ とおく。

1.（集積点になること）

$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し $\exists N_k \in \mathbb{N}$ s.t.

$$a + \frac{1}{k} > \sup_{\ell \geq N_k} a_\ell \geq a$$

とできる。$\sup_{\ell\geq N_k} a_\ell \geq a$ より、$\exists n_k \geq N_k$ s.t. $a - \frac{1}{k} < a_{n_k}$ とできる。よって

$$|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$$

となるので $a_{n_k} \to a$ $(k\to\infty)$ となる。

2. (aが最大であること)

$\forall \varepsilon > 0$に対し $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$a + \frac{\varepsilon}{2} > \sup_{\ell \geq N_\varepsilon} a_\ell$$

より) $a + \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}\varepsilon$ をみたす

$n \in \mathbb{N}$は有限個しかない。従って

$a + \varepsilon$は集積点にならない □

定理2.10より次が成り立つ。

定理2.11

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$に対して

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束列である ☑

上極限、下極限を用いると、関数の上からの連続性、下からの連続性を議論できる。

定義2.13 (上半連続、下半連続)

$I \subset \mathbb{R}$に対し、$f: I \to \mathbb{R}$が上半連続

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$に対して

$$\limsup_{n\to\infty} f(a_n) \leq f\left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)$$

$I \subset \mathbb{R}$に対し、$f: I \to \mathbb{R}$が下半連続

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$に対して

$$f\left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} f(a_n)$$

☑

の上半連続．下半連続は変分問題(あらっぽくいうと最大値．最小値を探す問題)で重要．

〈級数〉

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を考えたい．

定義2.14（級数）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $N \in \mathbb{N}$ に対して，第 N 部分和

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \cdots + a_N$$

について $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ が収束する．

このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \to \infty} S_N$ とかく

例2.15

$0<r<1$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ は収束して

$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$ となる

証明

$N \in \mathbb{N}$ に対して，第 N 部分和 $S_N := \sum_{n=1}^{N} r^{n-1}$

は

$$S_N = 1 + \cdots + r^{N-1} = \frac{1-r^N}{1-r}$$

である．$0<r<1$ より $\lim_{N \to \infty} r^N = 0$ だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \lim_{N \to \infty} S_N = \frac{1}{1-r}$$ となる

□

定義2.14の S_N について，$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ が
Cauchy列であるとは
$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対して
$n, m \geq N_0 \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$
であった．$m \geq n$ として
$|S_n - S_m| = |(a_1 + \cdots + a_m) - (a_1 + \cdots + a_n)|$
$= |a_{n+1} + \cdots + a_m|$
だから，次がわかる．

<u>定理2.12</u>（Cauchyの判定条件）
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する
$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t.
同値 $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対して
$m \geq n \geq N_0 \Rightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$
㊙

<u>系2.3</u>
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束
$\Longrightarrow$ $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ㊙

<u>注意2.12</u>
系2.3の逆は成り立たない．たとえば
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しない ㊙

系2.3の証明

$\forall \varepsilon > 0$に対して，Cauchyの判定条件より

$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall m, n \in \mathbb{N}$に対して

$$m \geq n \geq N_0 \Rightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

とできる．$m := n+1$とおくと

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| = |a_m|$$

となるから

$$m \geq N_0 \Rightarrow |a_m| < \varepsilon$$

となる．よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる □

〈連続関数と集合論〉

$I \subset \mathbb{R}$に対し，$f: I \to \mathbb{R}$が$\forall x_0 \in I$で連続であるとは，$\forall \varepsilon > 0$に対して$\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in I$に対して

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

であった．ここで

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon))$$

だから，

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

は

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon))$$

と同じことである．このことから次がいえる．

定理2.13

閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して $f: I \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in I$ で連続

$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall J \subset \mathbb{R}$: $f(x_0) \in J$ をみたす閉区間に対し $\exists I_0 \subset I$: $x_0 \in I_0$ となる閉区間 s.t. $I_0 \subset f^{-1}(J)$ □

定理2.13の言っていることは「連続の定義で使う絶対値（正確には距離）や不等式がなくても、同値となるいいかえができる」である。そのため、不等式や絶対値のない世界でも連続性を議論することができる（詳しくは数学入門CD）

〈夏休みの推薦図書〉

易 [Ste] Ian Stewart, 芹沢正三（翻訳）現代数学の考え方, 筑摩書房, 2012.

普 [Iid] 飯高茂, 微積分と集合 そのまま使える答えの書き方 講談社, 1999.

[Uch2] 内田伏一, 位相入門, 裳華房, 1997.

しっかりとやり直したい人向け.

[Kur], [Kod], [Kob], [Tak], [HaiWan2] など…