微分積分学 A 演習問題　(2014 年 4 月 17 日)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束するとは, $|a_n - a|$ が n を大きくすると 0 に近づくことである. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と書くことにする.

例 1.1.
$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 2 に収束する.

証明.

$$\begin{aligned} \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| &= \left|\frac{2(n+1)-2}{n+1} - 2\right| \\ &= \left|2 - \frac{-2}{n+1} - 2\right| = \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

となり, n を大きくすると, $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right|$ は 0 に近づく. □

注意 1.1.
高校でやったような

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{2}{1} = 2$$

としないこと.

問題 1.1.
自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, 証明を与えよ.

問題 1.2.
自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n-2}{2n+3}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, 証明を与えよ.

問題 1.3 (講義ノート 例 1.3)**.**
$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ を証明せよ.

問題 1.4.
次の各問いに答えよ.

(1) -3 を与える有理数の切断を求めよ.
(2) $\sqrt{3}$ を与える有理数の切断を求めよ.

問題 1.5.
x, y を実数とする.

(1) $|x+y| \leq |x| + |y|$ を示せ. なお, この不等式を**三角不等式**という (ヒント: $(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2$ を考える).
(2) $||x| - |y|| \leq |x-y|$ を示せ (ヒント: $|x| = |x-y+y|$, $|y| = |y-x+x|$ を用いる).

問題 1.6.

$x > 0$ とする．すべての自然数 n について

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

問題 1.7.

自然数 n に対して，$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ とおく．このとき $h_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$ を示せ.

問題 1.8.

自然数 n に対して $a_n := \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ とおく．$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ となることの証明を与えよ.

問題 1.9.

実数 $0 < r < 1$ と自然数 n に対して $a_n := r^n$ とおく．$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることの証明を与えよ (ヒント: $x := r^{-1} - 1$, すなわち $r^{-1} = 1 + x$ とおいて, 問題 1.6 を用いる).

微分積分学 A 演習問題 (2014 年 4 月 24 日)

問題 2.1.
$\sup(-1, 2)$ を求め, その証明を与えよ. なお, 講義の例 1.14 のように, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 2.2.
$\inf(-1, 2)$ を求め, その証明を与えよ. なお, 講義の例 1.14 のように, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 2.3.
$A := \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ とおく. $\sup A$ を求め, その証明を与えよ. また, $\max A$ が存在するかどうか答えよ.

問題 2.4.
問題 2.3 の A について, $\inf A$ を求め, その証明を与えよ. また, $\min A$ が存在するかどうか答えよ.

問題 2.5 (講義ノート 注意 1.4)**.**
$A := \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 3\}$ と定める. $\sup A = \sqrt{3}$ となることの証明を与えよ. なお, 証明には, 有理数の稠密性を用いる.

問題 2.6.
$A \subset \mathbb{R}$ とする. $\alpha = \max A$ とするとき, $\alpha = \sup A$ となることを示せ.

問題 2.7.
$A \subset \mathbb{R}$, $\alpha = \sup A$ とする. このとき, $\alpha \in A$ ならば $\max A$ が存在して $\alpha = \max A$ となることを示せ.

問題 2.8.
$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := 1 - \dfrac{1}{n}$ とおく.

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加である, すなわち, 「$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$」となることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めて, 証明を与えよ.

問題 2.9.
問題 2.8 の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

と書く. $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を求めて, 証明を与えよ.

微分積分学 A 演習問題 (2014 年 5 月 1 日)

問題 3.1.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 3.2.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n-2}{2n+3}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 3.3.

自然数 n に対して $a_n := \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ となることの証明を ε-N 論法を用いて証明せよ. (ヒント: アイデアは問題 1.8)

問題 3.4.

実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = r^n$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを, ε-N 論法を用いて証明せよ. ただし, log を使わずに証明すること (ヒント: アイデアは問題 1.9)

問題 3.5.

実数 $r > 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = r^n$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ となることを, ε-N 論法を用いて証明せよ. ただし, log を使わずに証明すること (ヒント: $r = 1 + x$ と書きかえてから問題 3.4 と同じような計算をする).

問題 3.6.

自然数 n に対して $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ とおく.

(1) すべての n について, $a_n < b_n$ であることを示せ.
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ. ただし, ε-N 論法を用いなくてよい.
(3) 定理 1.5 の (3) は二つの不等号 $\leq$ を $<$ にかえてはいけないことを説明せよ.

問題 3.7 (等比級数: 収束する場合)**.**

実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$ とおく.

(1) a_n を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ を用いずに表せ (注意:わからない人は高校の復習をすること!!!)
(2) a_n が収束することを示せ. なお, ε-N 論法を用いなくてよい.

問題 3.8 (等比級数: 発散する場合)**.**

実数 $r \geq 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$ とおく.

(1) a_n を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ を用いずに表せ ($r = 1$ と $r > 1$ の二通りについて場合わけして考えよ).
(2) a_n が正の無限大に発散することを示せ. なお, ε-N 論法を用いなくてよい.

微分積分学 A 演習問題　(2014 年 5 月 8 日)

問題 4.1.

次の極限値を求めよ．ただし, ε-N 論法を用いなくてもよい．

(1) 定数 $a > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}+\sqrt{n})$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}$. (ヒント: $e = 1 + x$ とおいて, 問題 1.6 を使う)

問題 4.2.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束したとする．このとき $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$ を ε-N 論法を用いて証明せよ (ヒント: 問題 1.5 の (2) を使う).

問題 4.3.

$0 < t < 1$ とする．数学的帰納法を用いて, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $(1-t)^n \geq 1 - nt$ となることを示せ.

問題 4.4 (解析演習 p.12)**.**

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおく．このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ を示せ.

問題 4.5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a \in \mathbb{R}$ に収束するとする．すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ が成り立つとする．このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$ となることを ε-N 論法を用いて証明せよ.

問題 4.6.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界かつ単調減少となるならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

となることを示せ.

問題 4.7.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする．このとき, 数列 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a - b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 4.8 (優収束定理)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $S_n := \sum_{k=1}^{n}|a_n|$ とおく.

(1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加となることを示せ.

(2) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq b_n$ かつ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_n < \infty$ をみたすとする．このとき $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ.

微分積分学 A 演習問題　(2014 年 5 月 15 日)

今週の演習は中間小テストの対策問題を兼ねている．この程度の問題が何も見ないで出来るようになっていることが望ましい．なお, 他にも, 有界や上限, 下限, 数列の収束, 単調増加, 単調減少, 自然対数の底, Cauchy 列の定義や「実数の連続性」,「Archimedes の原理」,「有界な単調数列の収束性」,「Borzano-Weierstrass の定理」,「実数の完備性」に関する定理の主張を聞く問題も出すつもりでいるので, 準備をしておくこと.

問題 5.1.

次の極限値を求めよ．ただし, ε-N 論法を用いなくてもよい.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

問題 5.2.

$a,b>0$ に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ を求めよ.

問題 5.3.

$\inf(-1,2)$ を求め, その証明を与えよ.

問題 5.4.

$n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n := 1-\dfrac{1}{n}$ とおく．$\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を求めて, その証明を与えよ.

問題 5.5.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n+3}$ を求めて, ε-N 論法を用いて証明を与えよ.

問題 5.6.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ を求めて, ε-N 論法を用いて証明を与えよ．ただし, $x>0$, $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

は証明抜きに用いてよい.

問題 5.7.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a,b\in\mathbb{R}$ に収束するとする．このとき,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$$

を ε-N 論法を用いて示せ.

問題 5.8.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a,b\in\mathbb{R}$ に収束するとする.

(1) $(a_n-a)(b_n-b)+(a_n-a)b+a(b_n-b)$ を計算せよ.

(2) 数列 $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ab に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

微分積分学 A 演習問題　(2014 年 5 月 29 日)

問題 6.1.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ とおく.

(1) 1 に収束する $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束部分列を作れ.
(2) -1 に収束する $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束部分列を作れ.

問題 6.2.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := \sin\left(\dfrac{n}{4}\pi\right)$ とおく. 収束先の異なる収束部分列を 4 つ作れ.

問題 6.3.

$A > 1$ に対して漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n + A} \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

を考える. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ. 余裕があれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための A の十分条件を求めよ.

問題 6.4.

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

をみたすとする. このとき, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

により定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

問題 6.5.

$0 < r < 1$, $k > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := n^k r^n$ とおく.

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ.
(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ となる $n \in \mathbb{N}$ の条件を求めよ.
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ.

問題 6.6.

$r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \dfrac{r^n}{n!}$ とおく.

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ.
(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ となる $n \in \mathbb{N}$ の条件を求めよ.
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ.

問題 6.7.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $S \in \mathbb{R}$ に収束するとき, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に収束するという.

(1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を, S_n を使わずに a_n を用いて書け.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ.

問題 6.8.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ.

微分積分学 **A** 演習問題　(2014 年 6 月 5 日)

問題 7.1.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ をすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=x^2$ で定義する.

(1) 像 $f([-2,3])$ を求めよ.

(2) 任意の $x_1,x_2>0$ に対して, $f(x_1)=f(x_2)$ ならば $x_1=x_2$ となることを示せ.

問題 7.2.

次を求めよ.

(1) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\arctan(1)$

(4) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)\right)$

問題 7.3.

指数法則と逆関数の性質を用いて,「任意の $a,b>0$ に対して $\log(ab)=\log a+\log b$ を示せ.

問題 7.4.

$a>0$, $x\in\mathbb{R}$ に対して, $a^x:=\exp(x\log a)$ と定義する. 任意の $a,b>0$, $x\in\mathbb{R}$ に対して, $(ab)^x=a^xb^x$ となることを, 定義に基づいて示せ.

問題 7.5.

Euler の公式と指数法則を認めて, 次を示せ.

(1) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $\sin(-x)=-\sin x$

(2) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $\cos(-x)=\cos x$

注意.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が**奇関数**であるとは「任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(-x)=-f(x)$」, **偶関数**であるとは「任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(-x)=f(x)$」となることをいうのであった.

問題 7.6.

任意の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して, ある奇関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とある偶関数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在して, $f=g+h$ と書けることを示せ (ヒント: 書けるとしたらどうなるか？).

問題 7.7.

Euler の公式と指数法則をみとめて, 任意の $x,y\in\mathbb{R}$ に対して加法定理

$$\sin(x+y)=\cos x\sin y+\sin x\cos y$$

を示せ.

問題 7.8.

$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\cosh x}{\sinh x},$$

と定義する. $\cos(hx)$ とは違うことに注意せよ. これらの関数を**双曲線関数**という. $\cosh^2 x - \sinh^2 x$ を計算せよ.

問題 7.9.

すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, 双曲線関数に対する加法定理

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

を示せ.

微分積分学 A 演習問題　　(2014 年 6 月 12 日)

問題 8.1.

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ を求めよ.

問題 8.2.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(bx)}{\sin(ax)}$ を求めよ.

問題 8.3.

$\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}}$ を求めよ.

問題 8.4.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 8.5.

$\displaystyle\lim_{x \to -1} x^2$ を求め ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

以下の問題では $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ とおく.

問題 8.6.

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |A|$ となることを ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 8.7.

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$ となることを ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 8.8.

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = AB$ となることを ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 8.9.

$A > 0$ とする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ に対して

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > \frac{A}{2}$$

できることを示せ.

微分積分学 A 演習問題　(2014 年 6 月 19 日)

問題 9.1.

$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{x+1}$, $\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{x+1}$ を求めよ.

問題 9.2.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ の ε-δ 論法による定義を書け.

問題 9.3.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=2x^3+1$ で定義する. f が $x=-1$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 9.4.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して, $f:I\to\mathbb{R}$ が $x_0\in I$ で右連続であるとは

$$f(x)\to f(x_0)\quad(x\to x_0+0)$$

と教科書に書かれている. ε-δ 論法による定義を書け.

問題 9.5.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続ならば, $|f|:I\to\mathbb{R}$ も I 上連続であることを示せ. なお, 任意の $x\in I$ に対して, $|f|(x):=|f(x)|$ で定義する.

問題 9.6.

$a,b\in\mathbb{R}$ に対して

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2},\quad \min\{a,b\}=\frac{a+b-|a-b|}{2}$$

を示せ.

問題 9.7.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$, $g:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続であれば, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ も連続になることを示せ. なお, $x\in I$ に対して

$$\max\{f,g\}(x):=\max\{f(x),g(x)\},\quad \min\{f,g\}(x):=\min\{f(x),g(x)\}$$

と定義する.

問題 9.8.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$, $g:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続であるとする. 「すべての $x\in I\cap\mathbb{Q}$ に対して $f(x)=g(x)$」が成り立つならば, 「すべての $x\in I$ に対して $f(x)=g(x)$」となることを示せ.

問題 9.9.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が **Lipschitz 連続**, すなわち, ある定数 $L>0$ が存在して, 任意の $x,x'\in(a,b)$ に対して

$$|f(x)-f(x')|\le L|x-x'|$$

をみたすとする. このとき, f は (a,b) 上連続であることを示せ.

微分積分学 A 演習問題　(2014 年 6 月 26 日)

問題 10.1.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, $f+g$ も $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 10.2.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, 任意の $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して λf は $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 10.3.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, fg も $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 10.4.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=x^3+x-1$ とおく. このとき, $f(x)=0$ となる実数解 $x\in\mathbb{R}$ が存在することを示せ. より詳しく, どの範囲に実数解があるかを述べてみよ.

問題 10.5.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とする. $f(a)f(b)<0$ ならば, $f(x)=0$ となる実数解 $x\in[a,b]$ が存在することを示せ.

問題 10.6.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とするとき

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

となることを示せ.

問題 10.7.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とすると, f の像 $f([a,b])$ が閉区間となることを示せ.

問題 10.8.

$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x):=\frac{1}{x}$$

で定義する.

(1) f が $(0,1)$ 上連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.
(2) f の最大値が存在しないことを説明せよ.

微分積分学 A 演習問題　(2014 年 7 月 3 日)

問題 11.1.
$\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos x}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0-0}\frac{\cos x}{x}$ を求めよ.

問題 11.2.
$\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}$ を求めよ.

問題 11.3.
$a\in\mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ を求めよ.

問題 11.4.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=3x+2$ で定める. このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ.

問題 11.5.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=\sqrt{x^2+1}$ で定める. このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ (ヒント: $x,x'\in\mathbb{R}$ に対して $\dfrac{|x+x'|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x'^2+1}}\leq\dfrac{|x|+|x'|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x'^2+1}}\leq 1$ となることを使う).

問題 11.6.
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が **Lipschitz 連続**, すなわち, ある定数 $L>0$ が存在して, 任意の $x,x'\in(a,b)$ に対して

$$|f(x)-f(x')|\leq L|x-x'|$$

をみたすとする. このとき, f は (a,b) 上一様連続であることを示せ.

問題 11.7.
$0<\alpha<1$ に対して $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が α **次 Hölder 連続**, すなわち, ある定数 $C>0$ が存在して, 任意の $x,x'\in(a,b)$ に対して

$$|f(x)-f(x')|\leq C|x-x'|^\alpha$$

をみたすとする. このとき, f は (a,b) 上一様連続であることを示せ.

問題 11.8.
$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in(0,1)$ に対して $f(x):=\sin\dfrac{1}{x}$ とおく.

(1) $x\in(0,1)$ に対して, 微分 $\dfrac{df}{dx}(x)$ を求めよ.

(2) 導関数 $\dfrac{df}{dx}:(0,1)\to\mathbb{R}$ は有界とならないことを示せ.

注意.
実は「導関数が有界ならば一様連続」が示せる. 対偶を取れば「一様連続でなければ, 導関数は有界でない」が得られる. 「導関数は有界でない」からといっても, 一様連続にならないことは示せないが (導関数は有界でないが Hölder 連続となることがある), 問題 11.8 では, f が $(0,1)$ 上一様連続にならないことを実際に示すことができる.

微分積分学A 演習問題(計算問題など) (2014年7月3日)

答えを配布するつもりはない. 友人とお互いに計算を考えあい, 答えあわせをせよ.

問題 12.1.

開区間 $I = (a, \infty) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ の定義を述べよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ の定義を述べよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A$ の定義を述べよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x \to x_0-0} f(x) = A$ の定義を述べよ.

(5) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ の定義を述べよ.

問題 12.2.

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ とする.

(1) f が $x_0 \in I$ で連続であることの定義を述べよ.

(2) f が I 上連続であることの定義を述べよ.

(3) f が I 上一様連続であることの定義を述べよ.

問題 12.3.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ とする.

(1) 中間値の定理を述べよ.

(2) 最大値定理を述べよ.

問題 12.4.

次の性質を持つ関数の例をあげよ (定義域をきちんと明記すること).

(1) $x = 0$ で右連続だが, $x = 0$ で連続でない.

(2) 有界だが最小値が存在しない.

(3) 連続だが一様連続でない.

問題 12.5 (わからない問題については, 高校の教科書を復習すること)**.**

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} \frac{x^2 + x}{|x|}$

(6) $\displaystyle\lim_{x \to 0-0} \frac{x^2 + x}{|x|}$

(7) $\displaystyle\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x}$

(9) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x^2 + 5}$

(10) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5}{x + 1}$

(11) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$

(12) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$

(13) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

(14) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$