問題5.8の補足

この問題では

〈仮定〉

$$a_n \to a, \quad b_n \to b \quad (n \to \infty)$$

〈結論〉

$$a_n b_n \to ab \quad (n \to \infty)$$

なので．仮定の $a_n \to a,\ b_n \to b\ (n \to \infty)$ の定義を ε-N論法でかいたときに，「任意の $\varepsilon > 0$ の ε をこちらで選ぶことができる」がポイントです．このことに気をつけた証明をかいてみます．

証明

1. $\forall \varepsilon > 0$ に対して．$a_n \to a,\ b_n \to b$ $(n \to \infty)$ となることから．$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$$

とできる．ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ はあとで決めることにする．$N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とすると．$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $n \geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b \\ &\qquad + a(b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a||b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &\qquad + |a||b_n - b| \\ &\qquad (\because \text{三角不等式}) \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon_1\varepsilon_2 + |b|\varepsilon_2 + |a|\varepsilon_1$$

$$\left(\because\ \begin{matrix} n \geq N_0 \geq N_1 \\ n \geq N_0 \geq N_2 \end{matrix}\right)$$

$$\leq \varepsilon_1^2 + |b|\varepsilon_1 + |a|\varepsilon_1$$

($\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2}$ と仮定)

$$\leq \varepsilon_1(1+|b|+|a|)$$

($\boxed{\varepsilon_1 \leq 1}$ と仮定)

となるから、$\boxed{\varepsilon_1(1+|b|+|a|) < \varepsilon}$ であれば

$$|a_nb_n - ab| \leq \varepsilon_1(1+|a|+|b|) < \varepsilon$$

となる。$\varepsilon_1(1+|b|+|a|) < \varepsilon$ を ε_1 について解くと、

$$\boxed{\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}}$$

となる。

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$a_n \to a,\ b_n \to b\ (n \to \infty)$ より、$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}, 1\right\}$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}, 1\right\}$$

とできる。$N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば

◎ 5/22の講義での発表者は $\varepsilon_1^2 + (|a|+|b|)\varepsilon_1 = \varepsilon$ を ε_1 について解いたものを選んだので、あの項がでてきていた。

○ 証明はこちらだけかけばよいが、あとあとのために、1. のような「どのようにとるか」の計算を残しておくとよい。

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + a(b_n - b)|$$
$$\leq |a_n - a||b_n - b| + |a_n - a||b| + |a||b_n - b|$$
$$(\because \text{三角不等式})$$
$$\leq |b_n - b| + |a_n - a||b| + |a||b_n - b|$$
$$(\because |a_n - a| \leq 1)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}(1+|b|+|a|)$$
$$\left(\because \begin{array}{l} |a_n - a| \leq \dfrac{\varepsilon}{1+|a|+|b|} \\ |b_n - b| \leq \dfrac{\varepsilon}{1+|a|+|b|} \end{array}\right)$$
$$= \varepsilon$$

$N_0 \geq N_1$, $N_0 \geq N_2$ → より $n \geq N_0$ だから $|a_n - a|$, $|b_n - b|$ に関する不等式が使える。

となるので $a_n b_n \to ab \ (n \to \infty)$ が成り立つ。

□

類題 $a_n \to a$, $b_n \to b \ (n \to \infty)$ のときに $a_n + b_n \to a + b \ (n \to \infty)$
$a_n - b_n \to a - b \ (n \to \infty)$
を示せ。

類題 定理1.6の(3).(4)の証明をよくよみ、どのようにして上記の証明中の ε_1, ε_2 を選んだのか考えよ。