微分積分学 A 中間試験問題

2014 年 5 月 29 日 第 1 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降については, 3 題以上を選択して答えよ. なお, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(*) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$$

は証明抜きに用いてよい.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) A が有界であることの定義を答えよ.
  (b) $a \in \mathbb{R}$ が A の上限であること, つまり $a = \sup A$ であることの**「論理記号を用いた」**定義を答えよ.
  (c) 実数の連続性に関する定理を述べよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ の定義を答えよ.
  (b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を答えよ.
  (c) 実数の完備性に関する定理を述べよ.

(3) 次の集合の上限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.
  (a) $\left\{2 - \dfrac{3}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
  (b) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$

(4) 次の極限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.
  (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$
  (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$

問題 2.

$\sup(-1,1)$ を求め, その証明を与えよ.

問題 3.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n-2}{n-3}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 4.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする．このとき, 数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a+b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 5.

実数 $0 < r < 1$ に対して $\lim_{n\to\infty} r^n$ を求めて, ε-N 論法を用いて証明を与えよ (ヒント: $x := r^{-1} - 1$ とおいて, $r = (r^{-1})^{-1}$ に注意して $(*)$ を使う).

問題 6.

数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列となることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

微分積分学 A 中間追試験問題

2014 年 6 月 3 日 第 5 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降については, 3 題以上を選択して答えよ. なお, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(*) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$$

は証明抜きに用いてよい.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) A が有界であることの定義を答えよ.
  (b) $a \in \mathbb{R}$ が A の下限であること, つまり $a = \inf A$ であることの「論理記号を用いた」定義を答えよ.
  (c) 実数と有理数の違いを二つ述べよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ の定義を答えよ.
  (b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を答えよ.

(3) 次の集合の上限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.
  (a) $\left\{2 + \dfrac{3}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
  (b) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$

(4) 次の極限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.
  (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^n$
  (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^3}$

問題 2.

$\inf(-1, 1)$ を求め, その証明を与えよ.

問題 3.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-5}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 4.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a - b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 5.

実数 $r > 1$ に対して $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ となることを ε-N 論法を用いて証明せよ.

問題 6.

数列 $\left\{\dfrac{1}{2n-3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列となることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.