微分積分学 A 期末試験問題

2014 年 7 月 24 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降については, 3 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $\arccos(\cos(2\pi))$ を求めよ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ を求めよ.

(4) $f:(-1,1)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ とする.

(a) $A\in\mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=A$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0}f(x)=\infty$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

(5) $I\subset\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ とする.

(a) $x_0\in I$ に対して, f が $x=x_0$ で連続であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

(b) f が I 上一様連続であることの定義を答えよ.

(6) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を連続な関数とする.

(a) $f(0)<f(1)$ とする. 中間値の定理を述べよ.

(b) 最大値の定理で, 最大値に関する主張をを sup を用いて述べよ.

(7) $(0,1)$ 上の連続な関数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ で, $(0,1)$ 上連続かつ有界だが, 最小値が存在しない例をあげよ.

問題 2.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x}\right)$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 3.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=2x^2-5x$ で定義する. f が $x=1$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 4.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, $f+g$ も $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 5.

$f : (0, 2) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ に対して, $\lim_{x \to 1} f(x) = A$ と仮定する. このとき, $\lim_{x \to 1} |f(x)| = |A|$ となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 6.

$f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ は, ある定数 $L > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (0, 1)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

をみたすとする. このとき, f は $(0, 1)$ 上一様連続であることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.