ε-N 論法についての補足

例

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

〈数学科以外では…〉

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

□

〈数学科では…〉

${}^\forall\varepsilon>0$ に対し、$N_0 := \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ とおく。

(このとき、$N_0 > \frac{2}{\varepsilon} > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ となることに注意する。)

ここは書いていなくてもよい

${}^\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$n \geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| &= \left|\frac{-2}{n+1}\right| \\
&= \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{2}{N_0+1} && (\because n \geq N_0) \\
&< \frac{2}{2/\varepsilon} && (\because N_0 > \tfrac{2}{\varepsilon} > \tfrac{2}{\varepsilon} - 1) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

すなわち $\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ が成り立つ。

□

⑪ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を示すには、$|a_n - a|$ を評価することがとても大切。つまり、$|a_n - a|$ が 0 に収束することがわかるような不等式を作ることが大切。

〈論理記号と証明〉

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$ を示すには定義に戻ってみると

$\underbrace{{}^{\forall}\varepsilon>0 \text{ に対して}}_{①}$, $\underbrace{{}^{\exists}N_0\in\mathbb{N} \text{ s.t.}}_{②}$ $\underbrace{{}^{\forall}n\in\mathbb{N} \text{ に対して}}_{③}$

$\underbrace{n\geq N_0}_{\boxed{4}} \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon}_{\boxed{5}}$

を示せばよい。だから、基本的な証明の書き方は次のようになる。

証明

$\underbrace{{}^{\forall}\varepsilon>0 \text{ に対して}}_{①}$ $\underbrace{N_0:=\boxed{A}\in\mathbb{N}}_{②}$ とおく。

このとき、$\underbrace{{}^{\forall}n\in\mathbb{N} \text{ に対して}}_{③}$ $\underbrace{n\geq N_0 \text{ ならば}}_{\boxed{4}}$

B（5を示すための理由をかく）

だから $\underbrace{\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon}_{\boxed{5}}$ が成り立つ。□

※ $\boxed{A}$ を暗算でみつけるのは難しいので、みつけ方、どんな条件がいるか？を講義ではやっていた（考察に対応する部分）。

問題 $\boxed{A}$ と $\boxed{B}$ を埋めて、証明を完成させよ。

問題

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+3}=\frac{3}{2}$ の証明を，次の $\boxed{A}$，$\boxed{B}$ を

うめることで完成させよ。

示せばよいこと

$\underbrace{\forall \varepsilon>0 \text{ に対して}}_{①}$，$\underbrace{\exists N_0\in\mathbb{N}}_{②}$ s.t. $\underbrace{\forall n\in\mathbb{N} \text{ に対して}}_{③}$

$\underbrace{n\geq N_0}_{\boxed{4}} \Longrightarrow \underbrace{\left|\frac{3n-2}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon}_{\boxed{5}}$

証明

$\underbrace{\forall \varepsilon>0 \text{ に対して}}_{①}$，$\underbrace{N_0 := \boxed{\ A\ } \in\mathbb{N}}_{②}$ とおく。

$\underbrace{\forall n\in\mathbb{N} \text{ に対して}}_{③}$，$\underbrace{n\geq N_0}_{\boxed{4}}$ ならば

$$\boxed{\qquad B \qquad}$$

だから $\underbrace{\left|\frac{3n-2}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon}_{\boxed{5}}$ が成り立つ。

□

㊟ 上記証明が何もみなくてもかけるようになることが前期中間までの目標です。

$\boxed{3.4}$ $0<r<1$ に対して $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ を ε-N論法で証明せよ.

〈数学科以外では…〉

$\boxed{1.6}$ より $x := r^{-1}-1$ とおくと $x>0$ であり

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \geq nx$$

となる。すなわち

$$r^{-n} \geq n(r^{-1}-1)$$

となるので

$$r^n \leq \frac{1}{n(r^{-1}-1)}$$

となる。従って

$$|r^n-0| \leq \frac{1}{n(r^{-1}-1)} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

となるので $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ となる.

◎ r^n を $\frac{1}{n(r^{-1}-1)}$ で評価したことが証明のポイントである. このアイデアをどうやって ε-N論法に生かせばよいかを考えよ.