微分積分学 A 中間試験問題

2015 年 6 月 4 日 第 1 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降については, 2 題以上を選択して答えよ. なお, 必要におうじて $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(*)\qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$$

を用いてよい.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) A が有界であることの定義を答えよ.
  (b) $a \in \mathbb{R}$ が A の下限であること, つまり $a = \inf A$ であることの「論理記号を用いた」定義を答えよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ の ε-N 論法による定義を答えよ.
  (b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $-\infty$ に発散すること, すなわち, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の ε-N 論法による定義を答えよ.
  (c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調増加であることの定義を答えよ.
  (d) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの ε-N 論法による定義を答えよ.

(3) 有理数と実数の違いに関係する次の定理の主張をそれぞれ答えよ.
  (a) 実数の連続性
  (b) Borzano-Weierstrass の定理
  (c) 実数の完備性
  (d) アルキメデスの原理

(4) 次の集合の上限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.
  (a) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
  (b) $\left\{2 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
  (c) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 0$ かつ $x \leq 0\}$
  (d) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < x + 1\}$

(5) 次の性質 (A), (B) をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例をあげよ.

(A) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n < b_n$

(B) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はどちらも 1 に収束する.

(6) 次の極限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, ただし, $a, b > 0$ は定数

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+3}\right)^n$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}$

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$\sup(-2,3)$ を求め, その証明を与えよ.

問題 3.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n+5}{2n-3}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 4.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a+b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, $a \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, $k \in \mathbb{R}$ に対して数列 $\{ka_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ka に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

微分積分学A 中間試験 解答例

$\boxed{1}$ (1) (a) $^{\exists}M>0$ s.t. $^{\forall}a\in A$ に対して $|a|\leq M$

(b) 1. $^{\forall}\alpha\in A$ に対して $a\leq\alpha$

2. $^{\forall}\varepsilon>0$ に対して $^{\exists}\alpha_0\in A$ s.t. $a+\varepsilon>\alpha_0$

(2) (a) $^{\forall}\varepsilon>0$ に対して $^{\exists}N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n\in\mathbb{N}$ に対して

$n\geq N_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

(b) $^{\forall}K>0$ に対して $^{\exists}N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n\in\mathbb{N}$ に対して

$n\geq N_0 \Rightarrow a_n<-K$

(c) $^{\forall}n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n\leq a_{n+1}$

(d) $^{\forall}\varepsilon>0$ に対して $^{\exists}N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n,m\in\mathbb{N}$ に対して

$n,m\geq N_0 \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$

(3) (a) 空でない有界な部分集合 $A\subset\mathbb{R}$ には

上限 $\sup A$ が存在する.

(b) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界列ならば

収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する.

(c) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であることと

Cauchy列であることは同値である.

(d) $^{\forall}\varepsilon>0$ に対して $^{\exists}N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\varepsilon N_0>1$

(4) (a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(5) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$

(6) (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\begin{cases} 1 & (a>b) \\ -1 & (a<b) \\ 0 & (a=b) \end{cases}$

(d) $e^{-\frac{3}{2}}$ (e) 0