微分積分学 A 期末試験問題

2015 年 7 月 23 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降については, 2 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $\arcsin(\sin(3\pi))$ を求めよ.

(2) $\arccos(\cos(-\pi))$ を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$ を求めよ.

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ を求めよ.

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$ を求めよ.

(6) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ を求めよ.

(7) 関数 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ で, 左極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0-0}f(x)$ と右極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}f(x)$ は存在するが, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ が存在しない例をあげよ.

(8) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a\in\mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ の ε-N 論法による定義を答えよ.

(9) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $-\infty$ に発散すること, すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ の ε-N 論法による定義を答えよ.

(10) $f:(-1,\infty)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ とする.

　(a) $A\in\mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=A$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

　(b) $A\in\mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to \infty}f(x)=A$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0}f(x)=\infty$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

(11) $I\subset\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ とする.

　(a) $x_0\in I$ に対して, f が $x=x_0$ で連続であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

　(b) f が I 上連続であることの定義を ε-δ 論法を用いて答えよ.

　(c) f が I 上一様連続であることの定義を答えよ.

(12) $(0,1)$ 上の連続な関数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ で, $(0,1)$ 上連続かつ有界だが, 最小値が存在しない例をあげよ.

(13) $\mathbb{R}$ 上の連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で, $\mathbb{R}$ 上一様連続となる例をあげよ.

(14) $\mathbb{R}$ 上の連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で, $\mathbb{R}$ 上一様連続にならない例をあげよ.

(15) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を連続な関数とする.

- (a) $f(0)<f(1)$ とする. 中間値の定理を述べよ.
- (b) Weierstrass の定理で, 最大値に関する主張を sup を用いて述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の略解

(1) 0

(2) π

(3) $\dfrac{3}{4}$

(4) $\dfrac{1}{6}$

(5) $\dfrac{4}{3}$

(6) 2

(7) $f(x)=\begin{cases}1 & x\le 0\\ -1 & x>0\end{cases}$

(12) $f(x)=x \quad (x\in(0,1))$

(13) $f(x)=x \quad (x\in\mathbb{R})$

(14) $f(x)=x^2 \quad (x\in\mathbb{R})$

(8), (9), (10), (11), (15) は講義ノート等を参考にすること.

問題 2.

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $x\to 0$ のときに $A\in\mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, $\lim_{x\to 0}|f(x)|=|A|$ となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 3.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=3x^2-2x-7$ で定義する. $\lim_{x\to -1}f(x)$ を求めて, ε-δ 論法による証明を与えよ.

問題 4.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, $f+g$ も $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 5.

$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ は, ある定数 $L>0$ が存在して, 任意の $x,x'\in(0,1)$ に対して

$$|f(x)-f(x')|\le L|x-x'|^{\frac{1}{2}}$$

をみたすとする (このとき, f は $(0,1)$ 上 $\frac{1}{2}$-Hölder 連続であるという). このとき, f は $(0,1)$ 上一様連続であることを示せ. なお, どこで Hölder 連続であることを用いたのかをわかるように証明を書くこと.

以下余白 計算用紙として使ってよい.