第1章 実数と数列の極限

§1.1. イントロダクション ―円周率を求めてみよう―

$\pi = 3.1415926535\cdots$ はどうやって求める?

← 言葉の意味を定めること。

定義 1.1 (円周率)

すべての円について、円周率πを

$$\pi := \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$$

で定める。 ☒

注意 1.1

どの円についても $\dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ は等しい。 ☒

注意 1.2

A=Bは「AとBが等しい」と

「AをBで定める」の2つの意味がある。

この違いを明確にするため、この講義では、

$A = B$　　AとBが等しい

$A := B$　　AをBで定める

と書きわけることにする。 ☒

半径1の円の円周の長さを求めて，2でわれば，πは求まるはず

<~~ どうやって円周の長さを求めるか？

〈Archimedes (アルキメデス) のアイデア〉

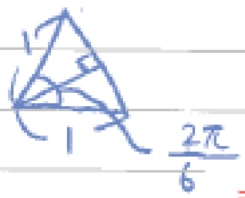
s_1：半径1の円に内接する正6角形の周の長さ

S_1：　〃　　外接する　〃

$\Rightarrow$　　$s_1 \leqq 2\pi \leqq S_1$

ならば，の意味　　円周の長さ　　≦と同じ

1. s_1を求める。



左図より，一辺の長さは

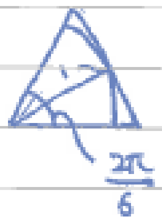
$$2\times1\times\sin\left(\frac{2\pi}{6\times2}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$$

二等辺三角形の斜辺　円の半径　角の二等分線

となる。よって $s_1 = 6\times1 = 6$ となる。

辺の数

2. S_1を求める。



左図より，一辺の長さは

$$2\times1\times\tan\left(\frac{2\pi}{6\times2}\right)=2\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる。よって $S_1=6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ となる。

3.

s_2：半径1の円に内接する正12角形の周の長さ
S_2：　〃　　外接する　〃
$\Longrightarrow \quad s_2 \le 2\pi \le S_2$.
s_3：半径1の円に内接する正24角形の周の長さ
S_3：　〃　　外接する　〃
$\Longrightarrow \quad s_3 \le 2\pi \le S_3$.
この操作を続けると，自然数nに対して
s_n：半径1の円に内接する正$6\times2^{n-1}$角形の周の長さ
S_n：　〃　　外接する　〃

← 証明できる主張で重要なもの

定理1.1 (Archimedes)
すべての自然数nに対して

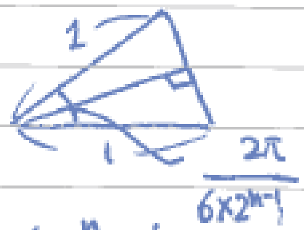
$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n} \qquad (1)$$

$$s_{n+1}^2 = S_{n+1}\, s_n \qquad (2)$$

が成り立つ。 $\square$

証明
1. s_nを求める。内接する正$6\times2^{n-1}$角形の一辺の長さは，右図より

$$2\times1\times\sin\left(\frac{\pi}{6\times2^{n-1}}\right)$$



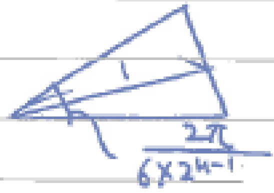
となるので

$$s_n = \underbrace{6\times2^{n-1}}_{\text{辺の数}}\times\underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{6\times2^{n-1}}\right)}_{\text{一辺の長さ}} = 6\times2^n\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)$$

となる。

2. S_n を求める. 外接する正 $6\times2^{n-1}$ 角形の一辺の長さは. 右図より

$$2\times1\times\tan\left(\frac{\pi}{6\times2^{n-1}}\right)$$



となるので

$$S_n=\underbrace{6\times2^{n-1}}_{\text{辺の数}}\times\underbrace{2\tan\left(\frac{\pi}{6\times2^{n-1}}\right)}_{\text{一辺の長さ.}}=6\times2^n\tan\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)$$

となる.

3. (1) を示す. 倍角の公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)-1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)$$

より

$$\frac{1}{S_n}+\frac{1}{s_n}=\frac{1}{6\times2^n\tan\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)}+\frac{1}{6\times2^n\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)+1}{6\times2^n\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^n}\right)}$$

$$=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)}{6\times2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)}\quad(\because\ \text{倍角公式})$$

$$=\frac{2}{6\times2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{3\times2^{n+1}}\right)}=\frac{2}{S_{n+1}}$$

が得られる.

4. (2)を示す．倍角の公式より

$$S_{n+1} s_n = \left(6\times 2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\right)\left(6\times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)\right)$$

$$= \left(6\times 2^{n+1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)}\right)$$

$$\times\left(6\times 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\right)$$

(∵倍角公式)

$$= \left(6\times 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\right)^2 = s_{n+1}^2$$

が得られる。 □

証明終了の意味

定理 1.1 より

$$\begin{cases} 2/S_{n+1} = 1/S_n + 1/s_n, \\ s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n, \\ s_1 = 6, \quad S_1 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

だから．

$$\begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{2}{1/S_n + 1/s_n}, \\ s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1} s_n}, \\ s_1 = 6, \quad S_1 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

となる．

例1.1

$n=2$ のとき、s_2 と S_2 を求める。

$$S_2 = \frac{2}{1/S_1 + 1/s_1} = \frac{2}{1/4\sqrt{3} + 1/6}$$

$$= 2 \div (1 \div 4\sqrt{3} + 1 \div 6) \simeq 6.4310,$$

近似

$$s_2 = \sqrt{S_2 s_1} \simeq \sqrt{6.4310 \times 6} \simeq 6.2117$$

となる。

n	s_n	S_n	πの評価
1	6.0000	6.9282	$6.0000 \leq 2\pi \leq 6.9282$
2	6.2117	6.4310	$6.2117 \leq 2\pi \leq 6.4310$
3	6.2654	6.3197	$6.2654 \leq 2\pi \leq 6.3197$
4	6.2789	6.2926	$6.2789 \leq 2\pi \leq 6.2926$
5	6.2830	6.2873	$6.2830 \leq 2\pi \leq 6.2873$

$n=5$ で $3.1415 \leq 2\pi \leq 3.1436$ だから、

$\pi \simeq 3.14$ がわかる。

〈問題点〉

- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は円周率の2倍に近づいているのか?

1. $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ が存在すれば

定理1.1の(2)で $n\to\infty$ として

$$s^2 = S s$$

だから($s \neq 0$ を示せば) $s = S$ がわかる。

しかし、この「存在する」はどうやって示すのか？

2. そもそも円周の長さのような曲線の長さはどうやって定めるのか？
（答：極限と積分）

3. では、極限とは何か？
（答：実数）

4. 実数とは何か？
有理数とはどこが違うのか？

〈微分積分学ABの目標〉

◎高校で学んだ数学（数Ⅲ）を厳密にくみたて直す。

◎実数とは何か？からはじめて、微分積分学の基本定理，たとえば

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3\right)' dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

面積 ← なぜ関係あるの？ → 速さ。

がなぜ正しいか？を眺める（すべてを厳密に示すのはとても大変なので，まずは雰囲気をつかむこと）

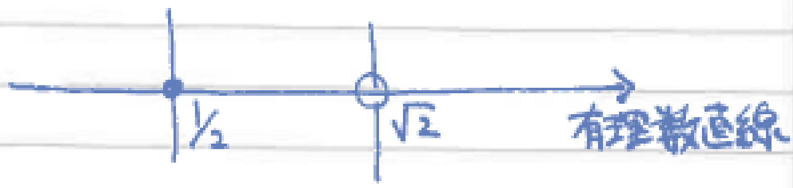
◎高校までで学んだ計算手法は，すらすら出来ることが前提である。自信のない学生は，配布の補助資料等でよく復習すること。なお，中高教員採用試験では，主に大学入試標準問題相当の問題がでると思ってよい。高校数学の教科書例題レベルの問題は，何もみなくても自信を持って説明できるようになることが望ましい。

§1.2 実数の構成

	+	−	×	÷(0除く)	不等号
自然数	○	×	○	×	○
整数	○	○	○	×	○
有理数	○	○	○	○	○
実数	○	○	○	○	○
複素数	○	○	○	○	×

実数と有理数はどう違う？
実数＝有理数＋無理数
無理数：有理数でないもの
⇝ $i=\sqrt{-1}$ は無理数？
◎ 実数とは何か？を考える必要がある。

〈Dedekind（デデキント）のアイデア〉
有理数直線を切ってみる。



ぶつかる　　　　ぶつからない
↓　　　　　　　↓
有理数　　　　　無理数

これをどのように数学の言葉でいえばよいか？

〈集合論の基礎〉

ものの集まりを集合といい，そのもの一つ一つを要素，元という。

例1.2

$\mathbb{N}$：自然数全体の集合

$\mathbb{Z}$：整数全体の集合

$\mathbb{Q}$：有理数全体の集合

$\mathbb{R}$：実数全体の集合

$\mathbb{C}$：複素数全体の集合

ϕ：要素，元が一つもない集合（空集合という）

∎

aが集合Aの要素，元であるとき，$a \in A$とかく。

例1.3

$$-3 \in \mathbb{Z},\ -3 \notin \mathbb{N},\ \frac{9}{4} \in \mathbb{Q},\ \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}.$$

∎

集合は，ふつう$\{\cdots\}$と中かっこを用いて書くことが多い。

例1.4

$a, b \in \mathbb{R}$に対して

$$(a,b) := \{\underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{元が何か?をかく}} : \underbrace{a < x < b}_{\text{条件をかく.}}\}$$

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

とかく。(a,b)を開区間，$[a,b]$を閉区間という。 ∎

集合 A が集合 X の部分集合であるとは，
「すべての $a\in A$ に対して $a\in X$」が成り立つ
ことをいう。このとき，$A\subset X$ とかく．

例1.5

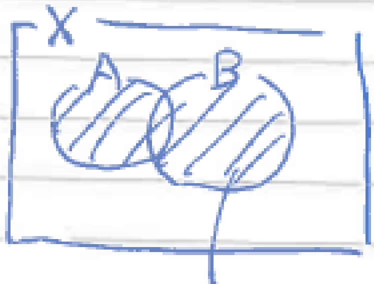
$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z},\quad \mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}.$$

◪

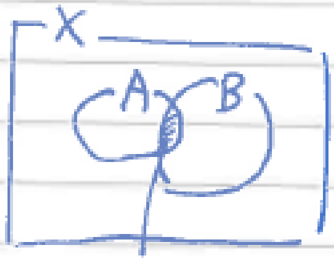
集合 X の部分集合 A, B に対して，
和集合 $A\cup B$ と共通部分 $A\cap B$ を

$$A\cup B := \{x\in X : x\in A \text{ または } x\in B\}$$
$$A\cap B := \{x\in X : x\in A \text{ かつ } x\in B\}$$

と定める．



$A\cup B$



$A\cap B$

〈Dedekindの切断〉

定義1.2（有理数の切断）

$\mathbb{Q}$ の部分集合 A, B が 有理数の切断

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ 1. $A\cup B=\mathbb{Q}$

2. $A\cap B=\phi$

3. すべての $a\in A, b\in B$ に対して $a<b$

4. A に最大値はない．すなわち，すべての $a\in A$ に対して $a'\in A$ が存在して $a<a'$.

左を右で定めるのイミ

このとき，$\langle A, B\rangle$ とかくことにする．◪

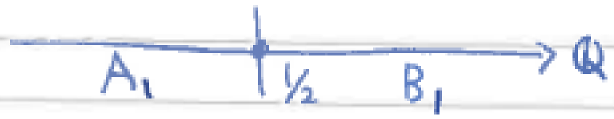
<u>例1.6</u>

$A_1 := \{a \in \mathbb{Q} : a < \frac{1}{2}\}$

$B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b \geq \frac{1}{2}\}$

とすると，$\langle A_1, B_1 \rangle$ は有理数の切断になる。このとき，B_1 に最小値 $\frac{1}{2}$ がある。

そこで $\langle A_1, B_1 \rangle = \frac{1}{2}$ とみなすことにする。



□

<u>例1.7</u>

$A_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0 \text{ または } a^2 < 2\}$

$B_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a > 0 \text{ かつ } a^2 > 2\}$

とすると $\langle A_2, B_2 \rangle$ は有理数の切断になる。このとき，B_2 に最小値はなく，A_2 と B_2 の境目は $\sqrt{2}$ になっている。

そこで $\langle A_2, B_2 \rangle = \sqrt{2}$ とみなすことにする。 □

$\langle A, B \rangle$ を有理数の切断としたとき，

B に最小値がある：有理数直線を切ったときにぶつかる（有理数）

B に最小値がない：有理数直線を切ったときにぶつからない（無理数）

に対応する。

定義1.3（実数）

有理数の切断を実数という。 □

次に有理数の切断を用いて、実数の四則演算、絶対値を定義しなければいけない。このことは小平邦彦,「解析入門I」岩波書店, 2003 を参照せよ。

定義1.4（順序関係）

$x, y \in \mathbb{R}$を有理数の切断を用いて、

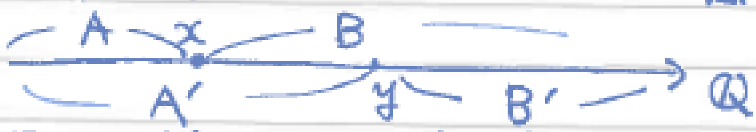
$x = \langle A, B\rangle$, $y = \langle A', B'\rangle$ とかく。

$x = y \overset{定義}{\iff} A = A'$ ($A \subset A'$ かつ $A' \subset A$)

$x \leq y \overset{定義}{\iff} A \subset A'$

$x < y \overset{定義}{\iff} x \leq y$ かつ $x \neq y$.

と定義する。 □



定理1.2（有理数の稠密性）

すべての$x, y \in \mathbb{R}$に対して$x < y$ならば、ある$q \in \mathbb{Q}$が存在して$x < q < y$とできる。 □

証明は、Webの講義ノートを参照せよ。

例1.8

$x := \sqrt{2}$, $y := \sqrt{3}$とするとき、$q := 1.6 \in \mathbb{Q}$とすれば$x < q < y$とできる。定理1.2は、この場合ではyが$\sqrt{2}$より少しでも大きければ、いつでも$x < q < y$となる$q \in \mathbb{Q}$をみつけることができることを主張している □

§1.3 実数の性質と上限・下限

§1.2で実数とは何か？を考えた．実数と有理数は何がちがうか？を考える．

〈上限〉

$$(0,1)=\{x\in\mathbb{R}:0<x<1\}$$

には最大値はないが，1が「最大値に似た性質」を持っている．このことをどうやって数学の言葉で表現するか？を考える．

〈論理の基礎〉〈わしくは数学入門A

集合 A に対し

$\forall a\in A$：すべての(任意の) $a\in A$ に対して

$\exists a\in A$：ある $a\in A$ が存在して

とかく．∀は「for all」,「for any」のAをひっくり返したもの，∃は「exist」のEをひっくり返したものである．

定義1.5（有界）

$A\subset\mathbb{R}$ に対して，Aが上に有界であるとは「ある $M\in\mathbb{R}$ が存在して，すべての $a\in A$ に対して $a\leq M$ が成り立つ」ことをいう．これを

$\exists M\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall a\in A$ に対して $a\leq M$

s.t. ← such that の略

とかく．このときの M を A の上界という．

Aが下に有界であるとは，「ある $m\in\mathbb{R}$ が存在して，すべての $a\in A$ に対して $a\geq m$ が成り立つ」ことをいう．これを

$\exists m\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall a\in A$ に対して $a\geq m$

とかく。このときの m を A の下界という。

A が有界であるとは、「ある $M>0$ が存在してすべての $a \in A$ に対して $|a| \leq M$ が成り立つ」ことをいう。これを

$\exists M>0$ s.t. $\forall a \in A$ に対して $|a| \leq M$

とかく。 ◪

例1.9

$A:=(0,1)$ は有界である ◪

証明

$M:=2>0$ とおく。すると $\forall a \in (0,1)$ に対して $|a| \leq 1 \leq M$ が成り立つ。 □

例1.10

$B:=(0,\infty)$ は上に有界ではない ◪

例1.11

$C:=(-\infty,3)$ は下に有界ではない ◪

定義1.6

$A \subset \mathbb{R}$ に対して、A の上界の集合 A_u と下界の集合 A_ℓ をそれぞれ

$A_u := \{M \in \mathbb{R} : \forall a \in A$ に対して $a \leq M\}$

$A_\ell := \{m \in \mathbb{R} : \forall a \in A$ に対して $a \geq m\}$

と定める。 ◪

注意1.3

定義1.6の記号は一般的ではないので、使うときは上界の集合、下界の集合と明記すること。

例1.12

$A:=[0,1)$ とするとき，Aの上界の集合 A_u，下界の集合 A_ℓ は

$$A_u := \{M \in \mathbb{R} : {}^\forall a \in [0,1) \text{ に対して } a \leq M\}$$
$$= [1, \infty)$$
$$A_\ell := \{m \in \mathbb{R} : {}^\forall a \in [0,1) \text{ に対して } a \geq m\}$$
$$= (-\infty, 0]$$

となる。 $\square$

定義1.7（最大・最小）

$A \subset \mathbb{R}$ に対して，Aの一番大きい数と一番小さい数をそれぞれAの最大値，最小値といい，$\max A$，$\min A$ とかく。 $\square$

例1.13

$A:=[0,1)$ に対して，$\max A$ は存在しない。$\min A = 0$ となる。 $\square$

定義1.8（上限，下限）

$A \subset \mathbb{R}$ に対して，Aの上限 $\sup A$，下限 $\inf A$ を，Aの上界の集合 A_u，下界の集合 A_ℓ を用いて

$$\sup A := \min A_u$$
$$\inf A := \max A_\ell$$

により定義する。 $\square$

・ $\sup A$ は「Aよりも大きい数で最も小さい数」ということである。

〈論理記号と上限，下限〉

$A \subset \mathbb{R}$ に対して，$\alpha := \sup A$ を論理記号でかくと

1. $\forall a \in A$ に対して $a \leq \alpha$
   (α は A の上界である)
2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists a_0 \in A$ s.t. $\alpha - \varepsilon < a_0$
   (α より) 少しでも小さいと，A の上界にならない)
   $-\varepsilon$ のこと

となる。

定理1.3 (実数の連続性)

上に有界な空でない実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は，実数の上限 $\sup A$ が存在する。 ☒

注意1.4

定理1.3の「実数」を「有理数」にかえることはできない (反例：$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$)。つまり定理1.3は実数と有理数の違いを表している ☒

実数の連続性から，次の重要な定理が得られる。

定理 1.4 (Archimedes の原理)

$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\varepsilon N_0 > 1$

が成り立つ。すなわち，(どんな小さな)すべての正の実数 $\varepsilon > 0$ に対しても，(十分大きな) 自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ をうまく決めれば $\varepsilon N_0 > 1$ とできる。 ☒

定理1.3, 1.4 の証明は講義ノートを参照せよ。

例1.14

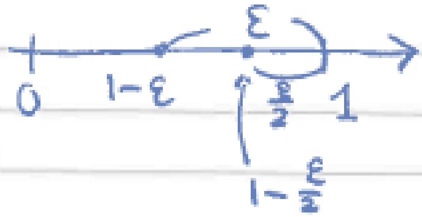
$A:=[0,1)$ に対して，$\sup A=1$ となる．

証明

1. $\forall a\in A$ に対して，$a\le 1$ を示す．
$A=[0,1)$ より $0\le a<1$ となるから
$a\le 1$ も成り立つ．

2. $\forall \varepsilon>0$ に対して，$\exists a_0\in A$ s.t. $1-\varepsilon<a_0$
を示す。つまり $\varepsilon>0$ を先に与えて，
$1-\varepsilon<a_0$ となる $a_0\in A$ を探す．

右図より



$a_0:=\max\left\{\frac{1}{2}, 1-\frac{\varepsilon}{2}\right\}$

とおくと $\frac{1}{2}\le a_0<1$ だから，$a_0\in A$ となり

$$1-\varepsilon<1-\frac{\varepsilon}{2}\le a_0$$

となるので，$1-\varepsilon<a_0$ が成り立つ．

1. 2. より $\sup A=1$ となることが示された．

注意1.5

存在を示すということは「成り立つものをみつける」と同じことである．例1.14の証明では，
$1-\varepsilon<a_0$ となる $a_0\in A$ をみつければよい．
$a_0\in A$ という条件から，$0\le a_0<1$ をみたして
$1-\varepsilon<a_0$ となる a_0 をみつければよい

注意 1.6

例1.14の証明で，$a_0 = 1-\frac{\varepsilon}{2}$ とすると，$\varepsilon>0$ が大きいときに，$1-\frac{\varepsilon}{2}<0$ となってしまうことがある。すると $a_0 \notin A$ となってしまうので，これを防ぐために，

$$a_0 := \max\left\{\frac{1}{2},\ 1-\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

としてある。 ∎

§1.4 数列の極限

〈数列の極限; ε-N論法〉

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が$a\in\mathbb{R}$に収束するとは
「$|a_n-a|$がnを大きくすると0に近づくこと」
であった。この nを大きく や 0に近づく
をどう厳密に表現すればよいか?

定義1.9(数列の極限, ε-N論法)
数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が$a\in\mathbb{R}$に収束するとは、
「任意の正の数$\varepsilon>0$に対して、ある自然数
$N_0\in\mathbb{N}$が存在して、すべての$n\in\mathbb{N}$に対して
$n\geq N_0$ならば $|a_n-a|<\varepsilon$ が成り立つ」
ことをいう。これを論理記号でかくと
$\forall\varepsilon>0$に対して, $\exists N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$に対して

$$n\geq N_0 \Longrightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

となる。このとき、$\lim_{n\to\infty}a_n=a$とか、
$a_n\to a\ (n\to\infty)$ とかく。 $\boxed{\text{図}}$

〈定義1.9の意味〉
$|a_n-a|$が0に近づく

εはいくら小さくてもよい

先に$\varepsilon>0$を任意に与えて, nを大きくしたとき
$|a_n-a|<\varepsilon$になるようにできる。

εより後に与える$N_0\in\mathbb{N}$より先の
すべての$n\in\mathbb{N}$.

εに対応してN_0を決めればよい。

・定義をいくら書いても、これはわかりにくい。
(定義した人が天才なのだから、わからなくて当然)
例を眺めて、感覚をつかもう。

例1.15

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ

証明

1. 定義の $N_0\in\mathbb{N}$ をみつけるために、$\forall\varepsilon>0$ に対して、$N_0\in\mathbb{N}$ をあとできめることにする。
$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して、$n\geq N_0$ を仮定すると
$$\left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0}$$
となる。$\boxed{\frac{1}{N_0}<\varepsilon}$ となる $N_0\in\mathbb{N}$ をえらべば
$$\left|\frac{1}{n}-0\right| \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$
が成り立つ。$\frac{1}{N_0}<\varepsilon$ を N_0 について解いてみると、$\boxed{N_0>\frac{1}{\varepsilon}}$ となる。

2. $\forall\varepsilon>0$ に対して、$N_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\in\mathbb{N}$ とおく。ただし $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ は $\frac{1}{\varepsilon}$ を越えない最大の整数であり
$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1 = N_0$$
が成り立つことに注意しておく。すると、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して、$n\geq N_0$ ならば
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}-0\right| &= \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} && (\because n\geq N_0)\\ &< \frac{1}{1/\varepsilon} && \left(\because N_0>\frac{1}{\varepsilon}\right)\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$
となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ が成り立つ。□

例1.16

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ が成り立つ。 図

証明

1. 定義の $N_0 \in \mathbb{N}$ をみつけるために、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$N_0 \in \mathbb{N}$ をあとで決めることにする。$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$n \geq N_0$ を仮定すると

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2(n+1)-2}{n+1} - 2\right|$$
$$= \left|2 - \frac{2}{n+1} - 2\right|$$
$$= \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N_0+1}$$

となる。$\boxed{\frac{2}{N_0+1} < \varepsilon}$ となる $N_0 \in \mathbb{N}$ をえらべば

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| \leq \frac{2}{N_0+1} < \varepsilon$$

が成り立つ。$\frac{2}{N_0+1} < \varepsilon$ を N_0 についてとくと $\boxed{N_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1}$ となる。

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$N_0 := [\frac{2}{\varepsilon}] + 1 \in \mathbb{N}$ とおく。このとき、

$$N_0 > \frac{2}{\varepsilon} > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

となることに注意する。$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n \geq N_0$ を仮定すると

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2(n+1)-2}{n+1} - 2\right|$$
$$= \frac{2}{n+1}$$
$$\leq \frac{2}{N_0+1} \quad (\because n \geq N_0)$$
$$< \frac{2}{2/\varepsilon} \quad (\because N_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1)$$
$$= \varepsilon$$

となるので $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+2} = 2$ が成り立つ。 □

注意 1.17

例1.15, 1.16 の証明中の $N_0 \in \mathbb{N}$ の条件を調べる計算は、実は証明でかかなくてもよい。しかし、微分積分学や解析学における「評価する」という観点では非常に重要である。 ◩

例1.15, 1.16の証明論法を ε-N論法 という。

例1.17

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$$ が成り立つ。 ◩

これは、ε-N論法を用いないと、証明が困難である。証明は講義ノートにまわす。

定義 1.10 (数列の発散)

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するという。

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が(正の)無限大に発散するとは、「$\forall M \in \mathbb{R}$ に対して、$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_0 \Rightarrow a_n > M$$

が成り立つ」ことをいう。このとき、

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とか $a_n \to \infty\ (n\to\infty)$ とかく。

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が負の無限大に発散するとは、「$\forall m \in \mathbb{R}$ に対して、$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_0 \Rightarrow a_n < -m$$

が成り立つ」ことをいう。このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とか $a_n \to -\infty \ (n\to\infty)$ とかく

$\boxtimes$

注意 1.8

定義 1.10 の $M \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ は $M>0$, $m>0$ におきかえてもよい。 $\boxtimes$

定理 1.5

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、次が成り立つ。

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow a = b$.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$, $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, $b := \lim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow a \leq b$ $\boxtimes$

証明

(1) 講義ノート参照

(2) $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ として、$\varepsilon = 1 > 0$ とる。すると、$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $n \geq N_0$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ が成り立つ。三角不等式 $|a_n| - |a| \leq |a_n - a|$ に注意すると、$n \geq N_0$ ならば

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad (*)$$

が成り立つ。そこで

$$M := \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N_0-1}|,\ 1+|a|\}$$

とおく。$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$1 \leq n < N_0$ のときは $|a_n| \leq M$

$n \geq N_0$ のときは(*)より $|a_n| \leq 1+|a| \leq M$

となるので $|a_n| \leq M$ が成り立つ。

(3) 背理法で示す。$a > b$ と仮定する。

$\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b)$ とおく。$\lim_{n\to\infty} a_n = a$,

$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ より、$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$

が成り立つ。そこで $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$

とおくと、$N_0 \geq N_1$ より

$$|a_{N_0} - a| < \frac{1}{2}(a-b)$$

だから $a_{N_0} - a > -\frac{1}{2}(a-b)$ より

$$a_{N_0} > \frac{1}{2}(a+b) \qquad \text{---} (*)$$

が成り立つ。他方 $N_0 \geq N_2$ より

$$|b_{N_0} - b| < \frac{1}{2}(a-b)$$

だから $b_{N_0} - b < \frac{1}{2}(a-b)$ より

$$b_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b) \qquad \text{---} (**)$$

が成り立つ。従って、(*)と(**)より

$$b_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b) < a_{N_0}$$

となり「$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$」に矛盾する。□

注意1.9

定理1.5(3)の不等式"$\leq$"を"$<$"に

かえることはできない。 ▨

定理1.6

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$が, $a, b \in \mathbb{R}$に対し

$$a_n \to a \quad (n \to \infty)$$
$$b_n \to b \quad (n \to \infty)$$

をみたすとき, 次が成り立つ.

(1) $a_n + b_n \to a + b \quad (n \to \infty)$

(2) $a_n - b_n \to a - b \quad (n \to \infty)$

(3) $a_n b_n \to ab \quad (n \to \infty)$

(4) $^\forall n \in \mathbb{N}$に対し, $b_n \neq 0$, $b \neq 0$

$$\Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \quad (n \to \infty)$$

図

証明

(1) 1. $^\forall \varepsilon > 0$に対して, $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ となることから, $^\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して. $^\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1,$$
$$n \geq N_2 \Longrightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$$

とできる. ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ はあとで決めることにし. $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とすると. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, $n \geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\quad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2) \end{aligned}$$

となるから、$\boxed{\varepsilon_1+\varepsilon_2 \leq \varepsilon}$ であれば
$|(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon$
となる。$\boxed{\varepsilon_1=\varepsilon_2}$ を仮定して、ε_1 について
解くと $\boxed{\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}}$ となる。この推論
をもとに証明をかく。

2. $^\forall\varepsilon>0$ に対し、$a_n \to a$, $b_n \to b$
$(n\to\infty)$ より、$^\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t.
$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる。$N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ と
とると、$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $n \geq N_0$
ならば

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(a+b)| &= |(a_n-a)+(b_n-b)| \\ &\leq |a_n-a|+|b_n-b| \\ &\quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &\quad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2) \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち $|(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon$ となる。

(2) 各自考えよ。

(3) 1. $^\forall\varepsilon>0$ に対し、$a_n \to a$, $b_n \to b$
$(n\to\infty)$ より、$^\forall\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$ に対し、
$^\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n-a| < \varepsilon_1$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n-b| < \varepsilon_2$$

とできる。ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ はあとで決めることにする。$N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とし、
$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $n \geq N_0$ ならば

$$|a_nb_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b|$$
$$\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|$$
$$(\because 三角不等式)$$
$$\leq \varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b|$$
$$(\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2)$$

となる。ここで $\varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b| < \varepsilon$ としたいが まだ n が残っているので n を用いずに $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を決めるように、次のことを行う。
定理1.5 の (2) より、

$\exists M > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$

であった。従って

$$|a_nb_n - ab| < \varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b|$$
$$\leq \varepsilon_2 M + \varepsilon_1(|b| + 1)$$
$$= \varepsilon_1(M + |b| + 1)$$
$$(\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2} と仮定)$$

とできるので $\boxed{\varepsilon_1(M + |b| + 1) < \varepsilon}$ をみたすように ε_1 を決めればよい。
この推論をもとに証明をかく。

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列より
$\exists M > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $|a_n| \leq M$
とできるので、$a_n \to a,\ b_n \to b\ (n \to \infty)$ より $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{1+|b|+M}$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{1+|b|+M}$$

とできる。そこで $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $n \geq N_0$ ならば

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&\qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq M|b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&\qquad (\because \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{は有界}) \\
&< \frac{M+|b|}{M+|b|+1}\varepsilon \\
&\qquad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

すなわち $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ となる。

(4) Webのノート参照 □

<u>注意 1.10</u>

定理1.6の証明の 1. の議論は、全く必要のない部分である。そのため、教科書にもかいていない。しかし、自分でかけるようにするには、この 1. の部分を理解する必要がある。教科書を自分で読むときには、この 1. の部分を考えるとより深く勉強できる。

定理1.7 (はさみうちの原理)

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$が$^{\forall}n\in\mathbb{N}$に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ をみたすとする。

〈仮定〉

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束して

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n .$$

〈結論〉

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束して $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ となる　図

証明

$^{\forall}\varepsilon>0$に対し, $a_n \to \alpha\ (n\to\infty)$ より, $^{\exists}N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n\in\mathbb{N}$に対して

$$n \geq N_1 \implies \alpha - a_n \leq |\alpha - a_n| < \varepsilon$$

とできる. 次に $b_n \to \alpha\ (n\to\infty)$ より $^{\exists}N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n\in\mathbb{N}$に対して

$$n \geq N_2 \implies b_n - \alpha \leq |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

とできる。よって $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ととれば. $^{\forall}n\in\mathbb{N}$に対し. $n \geq N_0$ ならば $a_n \leq c_n \leq b_n$ より

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< a_n - \alpha \quad (\because n \geq N_0 \geq N_1) \\ &\leq c_n - \alpha \\ &\leq b_n - \alpha \\ &< \varepsilon , \quad (\because n \geq N_0 \geq N_2) \end{aligned}$$

すなわち. $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ となる　□

〈単調数列〉

定義1.11（単調増加, 単調減少）

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が（広義）単調増加

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall n\in\mathbb{N}$に対して $a_n\leq a_{n+1}$

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が（広義）単調減少

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n\geq a_{n+1}$

定理1.8

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界かつ単調増加

$\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a:=\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$に収束する。

つまり $\lim_{n\to\infty} a_n=\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ となる ■

証明

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が上に有界だから, $a:=\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n<\infty$

となる（定理1.3）。上限の定義から

$^\forall n\in\mathbb{N}$に対して $a_n\leq a$ となることに注意

すると $|a_n-a|=a-a_n$ となる。

さて, $^\forall\varepsilon>0$ に対し, 上限の定義から,

$^\exists N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $a-\varepsilon<a_{N_0}$

とできる。$^\forall n\in\mathbb{N}$ に対し $n\geq N_0$ ならば

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が単調増加より $a-\varepsilon<a_{N_0}\leq a_n$

となるので

$$|a_n-a|=a-a_n<\varepsilon$$

つまり $|a_n-a|<\varepsilon$ となる。 □

例1.18（自然対数の底）

数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

$e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ とおき，自然対数の底

という

証明

$a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ とおく。

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であることを示す。

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad (\because \text{二項定理})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} n(n-1)\cdots(n-k+1)\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \quad \text{―}(*)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} 1\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$\left(\because \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

となるので，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である。

2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界であることを示す.
$\forall n \in \mathbb{N}$に対し, (*)より

$$0 \leq a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\because k! \geq 2^{k-1})$$
$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} < 3$$

となるので$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は有界である.
1. 2. と定理1.8より$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束する.

□

〈コンパクト性定理〉

定義1.12 (部分列)

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$から順番をかえずに一部を抜きだした数列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$を$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の部分列といい, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$とかく

㊡

例1.19

$n \in \mathbb{N}$に対し, $a_n := (-1)^n$とおく.
このとき

$$\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, a_8, \cdots\} = \{1, 1, 1, \cdots\}$$

や

$$\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_3, a_5, \cdots\} = \{-1, -1, -1, \cdots\}$$

は$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の部分列である. ㊡

上記の例1.19の数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束しないが有界である．つまり，定理1.5の「収束⇒有界」の逆「有界⇒収束」は成り立たない．

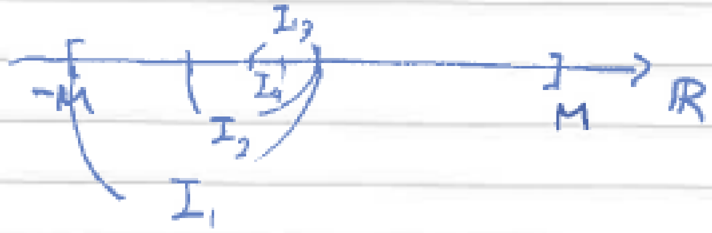
定理1.9 (Borzano-Weierstrass)
数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界
$\Rightarrow$ ある部分列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が存在して$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$は収束する ▨

定理1.9は「$\mathbb{R}$上の有界集合は相対コンパクト」と主張している．詳しくは数学入門CDでやる．

証明の概略

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界なので
$\exists M>0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$に対して$|a_n| \leq M$，
すなわち$-M \leq a_n \leq M$とできる．

1. $[-M, 0]$と$[0, M]$の少なくとも一方には無限個のa_nがある．無限個ある方の区間をI_1とおく（両方ある場合はどちらをとってもよい）
2. I_1を半分にした2つの区間を考えるとどちらかの区間には無限個のa_nがある．無限個ある方をI_2とおく．
3. I_2を半分にした2つの区間を考えるとどちらかの区間には無限個のa_nがある．無限個ある方をI_3とおく．以下くり返すことで区間の列$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$が作れる．



4. $a_{n_1}\in I_1,\ a_{n_2}\in I_2,\ a_{n_3}\in I_3,\ \cdots$ として数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を作る. I_k がどんどん小さくなる (区間の幅は $\frac{M}{2^{k-1}}$) ことから, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ はある実数 $a\in\mathbb{R}$ に収束することがわかる. □

〈集積点と上極限, 下極限 (難)〉

定義 1.13 (集積点)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $a\in\mathbb{R}$ が集積点

定義: $\exists\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a$ ☒

定義 1.14 (上極限, 下極限)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ をそれぞれ

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} a_k\right),$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n} a_k\right)$$

で定義する. ☒

定理 1.10 (上極限, 下極限と集積点)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ最大, 最小の集積点になる

☒

定理1.10 より次がわかる.

定理1.11

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である $\blacksquare$

極限は存在するか否かわからないが,上極限,下極限は常に存在するので,(専門的な)極限の議論を行うときに,よく用いられる.

〈Cauchy列と完備性〉

今までの話は，「収束する実数 $a \in \mathbb{R}$ がわかっている」が前提にあった．そうでないと $|a_n - a|$ を計算できない。収束先がわからないときに，収束はどうやって示せばよいか？

定義1.15（Cauchy列）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy列

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つ ▨

◎ Cauchy列は感覚的には

$$|a_n - a_m| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

と同じである．

定理1.12（実数の完備性）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列 $\overset{}{\underset{\text{同値}}{\Leftrightarrow}}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がCauchy列 ▨

定理1.12により，数列が収束するかどうかは，Cauchy列になるかどうかを調べればよい。

定理1.12の証明

(⇒) (こちらはできるようになって欲しい)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すると仮定して、

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列になることを示す。

${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より

${}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{—} (*)$$

とできる。よって ${}^{\forall}n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$n, m \geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) - (a_m - a)| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\ &\qquad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\because n, m \geq N_0 \text{ と} (*)) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となるので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である。

(⇐) (こちらは難しい)

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示す。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列より ${}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}$ s.t.

${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - a_{N_0}| < 1$$

とできる。よって

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N_0}| + |a_{N_0}| \leq 1 + |a_{N_0}|$$

となるから $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_0 - 1}|,$

$1 + |a_{N_0}|\}$ とおくと、${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$|a_n| \leq M$ が成り立つ。

2. Borzano-Weierstrassの定理(定理1.9)より)部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ とできる。そこで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束することを示す。

$\forall \varepsilon > 0$ に対して。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がCauchy列だから。$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad —(*)$$

とできる。次に $a_{n_k} \to a \ (k \to \infty)$ より。$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して

$$k \geq N_2 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad —(**)$$

とできる。そこで $k_0 \in \mathbb{N}$ を $k_0 \geq N_2$ かつ $N_{k_0} \geq N_1$ をみたすようにとると $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_{k_0}$ ならば

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{N_{k_0}}| + |a_{N_{k_0}} - a| \quad (\because 三角不等式)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \because n \geq N_{k_0} \geq N_1 \text{ と } (*) \\ n \geq N_{k_0},\ k_0 \geq N_2 \text{ と } (**) \end{array}\right)$$

$$= \varepsilon$$

となるので $a_n \to a \ (n \to \infty)$ が成り立つ

□

注意1.11

Borzano-Weierstrassの定理は、実数の完備性(定理1.12)を用いずに示すことができる。 ▨

注意1.12

注意1.4にもあるように、実数の連続性は実数と有理数の違いを表している。実は、実数と有理数の違いは次の4つの性質であり、さらにそれら4つの性質はすべて同値である。すなわち、どれを実数と有理数の違いとしてもよいことが知られている。

(1) 定理1.3 (実数の連続性)
(2) 定理1.8 (単調数列の収束性)
(3) 定理1.9 (Borzano-Weierstrassの定理)
(4) 定理1.12と定理1.4
(実数の完備性とArchimedesの原理)

$\square$

〈漸化式と極限〉

例1.20

漸化式

$$\begin{cases} \dfrac{2}{S_{n+1}} = \dfrac{1}{S_n} + \dfrac{1}{s_n} \\ s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1} s_n} \\ s_1 = 6, \quad S_1 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

で定められる数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

$\square$

証明

$n \in \mathbb{N}$ に対して、$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n \leq S_n \leq S_{n-1} \leq \cdots \leq S_2 \leq S_1$ となることを帰納法で示す。

1. $n=1$ のとき, $0 < s_1 = 6 \leq 4\sqrt{3} \leq S_1$ より
成り立つ.

2. $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n \leq S_n \leq S_{n-1} \leq \cdots \leq S_1$
を仮定して $s_n \leq s_{n+1} \leq S_{n+1} \leq S_n$ を示す.
まず

$$S_{n+1} = \frac{2}{1/s_n + 1/S_n} > 0$$

より

$$s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}\, s_n} > 0$$

がわかる。次に帰納法の仮定 $s_n \leq S_n$
より

$$S_{n+1} \leq \frac{2}{\frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_n}} = S_n.$$

$$S_{n+1} \geq \frac{2}{\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_n}} = s_n$$

がわかる. よって

$$s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}\, s_n} \geq \sqrt{s_n^2} = s_n,$$

$$s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}\, s_n} \leq \sqrt{S_{n+1}^2} = S_{n+1}$$

となるので $s_1 \leq \cdots \leq s_{n+1} \leq S_{n+1} \leq \cdots \leq S_1$
が示された.

3. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加で有界
$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少で有界
となるから定理 1.8 より収束する □

注意 1.13
収束先が円周率に等しいことを示すのは,
別の(難しい)問題である.

例1.21

$r, q, x \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$ に対し

$$(*) \quad \begin{cases} a_{n+1} = r a_n + q \\ a_0 = x \end{cases}$$

で定められる $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $0 \leq |r| < 1$ のとき収束する。 ☒

証明

$(*)$ で $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すれば $n \to \infty$ として

$a = ra + q$ となる。収束するかどうかを調べる。

$$a_{n+1} - a_n = r(a_n - a_{n-1})$$

に注意すると

$$|a_{n+1} - a_n| = |r| \, |a_n - a_{n-1}| \quad -(**)$$

が得られる。次の縮小写像の原理を用いると

$$|r| < 1 \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は収束列}$$

がわかる。 □

定理1.13（縮小写像の原理）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $0 \leq {}^{\exists}L < 1$ s.t. ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L \, |a_n - a_{n-1}|$$

をみたすとする。このとき、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列 ☒

注意1.14

例1.21の方法は、もっと複雑な（非線形問題）

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

に対して一般項 a_n が求められなくても、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するか調べることができる。 ☒

第2章　関数と極限

§2.1　いろいろな関数

〈関数とは何か?〉

定義2.1（関数）

集合 X に対して，f が X上の関数であるとは
「$\forall x \in X$ に対して実数 $f(x) \in \mathbb{R}$ が定まる規則」
のことをいう。このとき $f: X \to \mathbb{R}$ とかく。 ▨

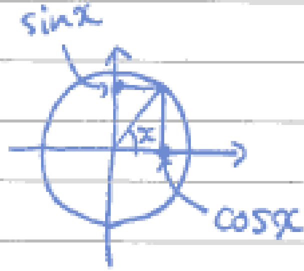
例2.1（指数関数）

$\mathbb{R}$ 上の関数 $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp(x) := e^x$$

で定める。 ▨

例2.2（三角関数）



sin，cos は $\mathbb{R}$ 上の関数である。
右図のように単位円を用いて $x \in \mathbb{R}$ に対して
$\sin x$，$\cos x$ を定めるのであった。
また $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \cdots\} \to \mathbb{R}$
を $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \cdots\}$ に対し

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

と定めるのであった。 ▨

注意2.1

例2.1, 2.2は厳密な定義ではない ☒

〈逆関数〉

$^\forall y \in \mathbb{R}$に対し $y=\exp(x)$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在するとは限らない (例: $y=-1$ に対し, $-1=\exp(x)=e^x$ となる $x \in \mathbb{R}$ はない).

また, $^\forall y \in \mathbb{R}$に対して, $y=\sin x$ となる $x \in \mathbb{R}$ はたくさんある (例: $y=0$ に対して, $0=\sin(x)$ となる $x \in \mathbb{R}$ は $x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$)

定義2.2 (像)

集合 X と $f: X \to \mathbb{R}$ に対し, f の像 $f(X)$ を

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}$$

で定義する. ☒

注意2.2

$f: X \to \mathbb{R}$ の像 $f(X)$ は, あらっぽくいえば $y=f(x)$ としたときの y の範囲のこと ☒

定義2.3 (単射)

集合 X 上の関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が単射

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall x_1, x_2 \in X$ に対して

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$ ☒

ここの f(A) は f(X) の間違い

注意2.3

$f: X \to \mathbb{R}$ が単射というのは対偶をとれば

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

だから、異なる2点の行き先は常にちがうということ ☒

集合 X 上の関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が単射であるとき、

f の逆関数 $f^{-1}: f(A) \to X$ は

$y \in f(A)$ に対して $f^{-1}(y) \in X$ を

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

をみたすものとして定義することができる。

例2.3 (対数関数)

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単射であり

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

だから、exp の逆関数は $(0, \infty)$ 上で定義できる。これを対数関数といい、

$\log: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ とかくのであった。

$$\log(\exp x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\exp(\log y) = y \qquad (y \in (0, \infty))$$

となることに注意せよ。 ☒

例2.4 (逆三角関数)

sin は $\mathbb{R}$ 上で単射でないため、逆関数を作るためには (定義域に) 制限をかける必要がある。

sin は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で単射な関数になり，

$\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \{\sin x : x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\} = [-1, 1]$

となるので．sin の逆関数は $[-1,1]$ 上で定義できる．これを逆正弦関数といい，

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ とかく。

$$\arcsin(\sin x) = x \qquad (x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}])$$

$$\sin(\arcsin y) = y \qquad (y \in [-1, 1])$$

だが

$$\arcsin(\sin x) \neq x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

となることに注意すること．同様にして

逆余弦関数 $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

逆正接関数 $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

も定義できる ㊃

〈指数法則〉

定理2.1 (指数法則)

次の指数法則が成り立つ

(1) $^\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

(2) $^\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して $(e^x)^y = e^{xy}$

㊃

系2.1

$^\forall a, b > 0$, $^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $(ab)^x = a^x b^x$

㊃

〈複素関数への拡張〉

指数法則(1), (2) を $\mathbb{C}$ 上に拡張しても成り立つとしよう。つまり

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対して $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対して $(e^z)^w = e^{zw}$

が成り立つとする。

<u>定理2.2</u> (Eulerの公式)

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つ ∎

$x \in \mathbb{R}$ に対して e^{ix} が何か？はとりあえず無視すると

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

より、$\cos x$, $\sin x$ について解くと

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

が得られる。

<u>系2.2</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

が成り立つ ∎

これにより、指数関数がわかれば、三角関数もよくわかることになる。

定理2.3（加法定理）

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

証明

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

$$= \frac{1}{4}\Big(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}$$

$$+ e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}\right) = \cos(x+y)$$

となる。$\sin(x+y)$ についても同様である。□

§2.2 関数の極限

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

であった。

① $\frac{x^2-4}{x-2}$ は $x=2$ で (分母) $=0$ となる.

$x=2$ で定義できない。

② 「近づく」は数学でどういえばよいか？

定義 2.4 (関数の極限)

$I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$

① f が $x\to x_0$ のときに $A\in\mathbb{R}$ に収束する.

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$ に対して $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

このとき. $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ とか $f(x)\to A$ $(x\to x_0)$

とかく。

② f が $x\to x_0$ のときに ∞ $(-\infty)$ に発散する.

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $\forall K>0$ に対し, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>K$

$(f(x)<-K)$

このとき. $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ $\left(\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty\right)$

とか $f(x)\to\infty$ $(x\to x_0)$ $\left(f(x)\to-\infty\ (x\to x_0)\right)$

とかく. 図

例2.5

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

証明

1. ∀$\varepsilon>0$に対して, 定義の$\delta>0$ をみつけるために あとで決めることにする. ∀$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$に対し $0<|x-0|<\delta$ を仮定すると

$$\begin{aligned}\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right| &= |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \\ &\le |x| \qquad (\because \left|\sin\tfrac{1}{x}\right|\le 1) \\ &< \delta \qquad (\because |x|<\delta)\end{aligned}$$

となる. よって $\boxed{\delta\le\varepsilon}$ であれば

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$

となる. この考察をもとに証明をかく.

2. ①∀$\varepsilon>0$に対して $\delta:=\varepsilon>0$ ② とおく.
③ ∀$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$に対して $0<|x-0|<\delta$ ④ ならば

$$\begin{aligned}\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right| &= |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \\ &\le |x| \qquad (\because \left|\sin\tfrac{1}{x}\right|\le 1) \\ &< \delta \qquad (\because |x|<\delta) \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ となるので $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ となる. ⑤ □

例2.6

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1$$

例

証明

1. $\forall \varepsilon > 0$ に対して、定義の $\delta > 0$ をみつけるために あとで決めることにする。$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ に対し $0 < |x-1| < \delta$ を仮定すると

$$\begin{aligned}|x^2-1| &= |(x-1)(x+1)| \\ &= |x-1||x-1+2| \\ &\leq |x-1|(|x-1|+2) \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta(\delta+2) \quad (\because |x-1| < \delta)\end{aligned}$$

となる。$\boxed{\delta \leq 1}$ を仮定すると $\delta(\delta+2) \leq 3\delta$ より $\boxed{3\delta \leq \varepsilon}$ であれば $|x^2-1| < \varepsilon$ となる。この考察をもとに証明をかく。

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\} > 0$ とおくと、$\delta \leq 1$ かつ $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ となる。
① ②
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ に対し、$0 < |x-1| < \delta$ ならば
③ ④

$$\begin{aligned}|x^2-1| &= |(x-1)(x+1)| \\ &\leq |x-1|(|x-1|+2) \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta(\delta+2) \quad (\because |x-1| < \delta) \\ &\leq 3\delta \quad (\because \delta \leq 1) \\ &\leq \varepsilon, \quad (\because \delta \leq \frac{\varepsilon}{3})\end{aligned}$$

すなわち $|x^2-1| < \varepsilon$ となるので $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ となる
⑤

□

上記の議論を ε-δ 論法 という。

定理2.4

$I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow$ $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I\setminus\{x_0\}$ に対し

同値　$x_n\to x_0\quad(n\to\infty)$

$\Longrightarrow f(x_n)\to A\quad(n\to\infty)$ ∎

証明

($\Rightarrow$) $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I\setminus\{x_0\}$ に対し $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$ を仮定する. $\forall\varepsilon>0$ に対し $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ より $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$$0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\quad\text{—}(*)$$

が成り立つ。$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$ より $\exists N_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n\geq N_0\Rightarrow|x_n-x_0|<\delta\quad\text{—}(**)$$

となるので、$(**)$ と $(*)$ より $n\geq N_0$ ならば $|f(x_n)-A|<\varepsilon$ が成り立つ. 従って $f(x_n)\to A$ $(n\to\infty)$ が成り立つ.

($\Leftarrow$) 背理法で示す.

$\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall\delta>0$ に対し, $\exists x_\delta\in I\setminus\{x_0\}$ s.t. $0<|x_\delta-x_0|<\delta$ かつ $|f(x_\delta)-A|\geq\varepsilon_0$ を仮定する. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $\delta=\frac{1}{n}$ とえらぶと $\exists x_n\in I\setminus\{x_0\}$ s.t.

$$|x_n-x_0|<\frac{1}{n}\ \text{かつ}\ |f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$$

となる.

$n \to \infty$ とすると

$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ より $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$.

$|f(x_n) - A| \geqq \varepsilon_0$ より $f(x_n) \to A$ $(n\to\infty)$ とならない。

これは最初の仮定 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対し

$x_n \to x_0$ $(n\to\infty) \Rightarrow f(x_n) \to A$ $(n\to\infty)$

に矛盾する $\square$

定理2.4を用いると、数列の極限と同じことはほとんどそのまま成り立つ。

定理2.5

$I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,

$g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$

とすると次が成り立つ

(1) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$

(2) $\lim_{x\to x_0} (f(x) g(x)) = AB$ 略

定理2.6 (Cauchyの判定条件)

$I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ が存在

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x, x' \in I \setminus \{x_0\}$

同値 に対して

$0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |x' - x_0| < \delta$

$\Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

略

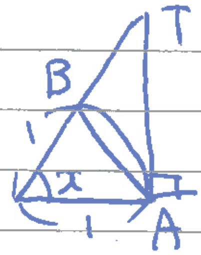
例2.7

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

略

証明の方針

右図より $0<x<\frac{\pi}{4}$,



において

$$\overline{AB} \leq \overset{\frown}{AB} \leq \overline{AT}$$

であり

$$\overline{AB} = \sqrt{2-2\cos x} \quad (\because \text{余弦定理})$$

$$= \sqrt{2-2(1-2\sin^2\frac{x}{2})} \quad (\because \text{倍角公式})$$

$$= 2\sin\frac{x}{2},$$

$$\overset{\frown}{AB} = x \quad (\because \text{ラジアンの性質})$$

$$\overline{AT} = \tan x$$

より

$$\frac{1}{\tan x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$$

だから

$$\frac{\sin x}{\tan x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

となる。従って倍角公式より

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos\frac{x}{2} \quad \text{―} (*)$$

が得られる。同様に $-\frac{\pi}{4}<x<0$ のときも $(*)$ が得られるので $x \to 0$ とすると、$\cos x \to 1$, $\cos\frac{x}{2} \to 1$ からはさみうちの原理より

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{となる} \quad \square$$

〈片側極限〉

$x \to x_0$ を + から近づけるか? − から近づけるか?
で話がかわることがあった。どう定式化するか?

定義2.5 (片側極限)

$I=(a,b)\subset \mathbb{R}$, $x_0\in I$, $f: I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$,

(i) f が $x\to x_0+0$ (または $x\downarrow x_0$) のとき、
$A\in\mathbb{R}$ に収束する。

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall\varepsilon>0$ に対して $^\exists\delta>0$ s.t. $^\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$$0<x-x_0<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

このとき、$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A$ とか $f(x)\to A\ (x\to x_0+0)$
とかく ($x\to x_0+0$ のかわりに $x\downarrow x_0$ とかいてもよい)

(ii) f が $x\to x_0-0$ (または $x\uparrow x_0$) のとき、
$A\in\mathbb{R}$ に収束する。

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall\varepsilon>0$ に対して $^\exists\delta>0$ s.t. $^\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$$0<x_0-x<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

このとき、$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A$ とか $f(x)\to A\ (x\to x_0-0)$
とかく ($x\to x_0-0$ のかわりに $x\uparrow x_0$ とかいてもよい)

□

〈無限大での極限〉

話をかんたんにするために、$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について
のみ考えよう。

定義2.6 (無限大での極限)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする.

◎ f が $x \to \infty$ で $A \in \mathbb{R}$ に収束する

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists K > 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$x > K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

このとき $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ とか $f(x) \to A \ (x \to \infty)$ とかく.

◎ f が $x \to -\infty$ で $A \in \mathbb{R}$ に収束する

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists K > 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$x < -K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

このとき $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ とか $f(x) \to A \ (x \to -\infty)$ とかく.

注意2.4

無限大に発散する場合の定義も同様にできる。各自考えよ.

§2.3 連続関数

関数が連続であるとは、感覚的には、グラフがつながっていることであった。これをどう定式化すればよいか考える.

定義2.7 (関数の連続性)

$I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$.

◎ f が $x_0 \in I$ で 連続

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in I$ に対して

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

・ fが I 上連続

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall x_0 \in I$ に対して f は x_0 で連続

$\boxed{/\!/}$

命題2.1

$I=(a.b)\subset\mathbb{R}$, $f: I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$.

fが x_0 で連続 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\boxed{/\!/}$

証明はwebのノート.

例2.8

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対し $f(x):=x^3-1$

で定義する。このとき. fは$x=2$で連続となる.

$\boxed{/\!/}$

証明

1. $^\forall\varepsilon>0$ に対して. 定義の $\delta>0$ をみつける

ために あとで決める. $^\forall x\in\mathbb{R}$ に対して

$|x-2|<\delta$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(2)| &= |(x^3-1)-(2^3-1)| \\
&= |x^3-8| \\
&= |(x-2)(x^2+2x+4)| \\
&= |x-2||(x-2)^2+6x| \\
&= |x-2||(x-2)^2+6(x-2)+12| \\
&\leq |x-2|(|x-2|^2+6|x-2|+12) \\
&\qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&< \delta(\delta^2+6\delta+12) \quad (\because |x-2|<\delta) \\
&\leq \delta(1+6+12) \quad (\boxed{\delta\leq 1}\text{と仮定}) \\
&= 19\delta
\end{aligned}
$$

となる. $\boxed{19\delta \leq \varepsilon}$ であれば

$|f(x)-f(2)| < 19\delta \leq \varepsilon$

となる. $19\delta \leq \varepsilon$ を δ について解くと

$\delta \leq \frac{\varepsilon}{19}$ となる. この考察をもとに

証明をかく.

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{19}, 1\} > 0$ と

おく. $\delta \leq \frac{\varepsilon}{19}$, $\delta \leq 1$ となることに注意する.

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して. $|x-2| < \delta$ ならば

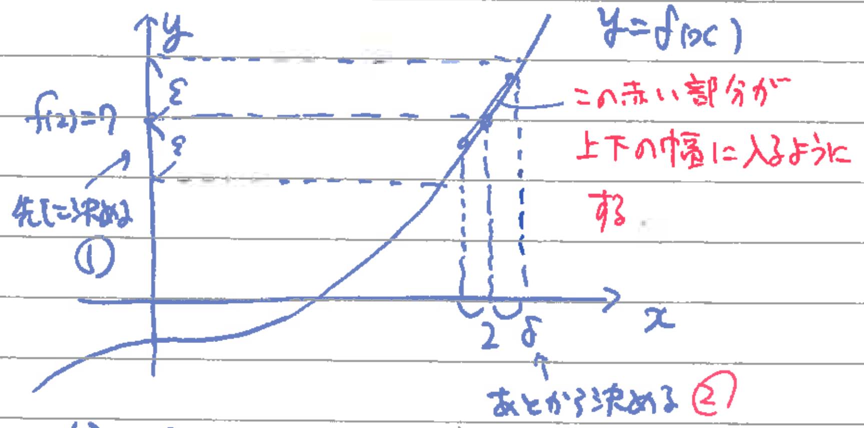
$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(2)| &= |x-2|\,|(x-2)^2+6(x-2)+12| \\
&\leq |x-2|(|x-2|^2+6|x-2|+12) \\
&\qquad (\because 三角不等式) \\
&< \delta(\delta^2+6\delta+12) \quad (\because |x-2|<\delta) \\
&\leq 19\delta \quad (\because \delta \leq 1) \\
&\leq \varepsilon \quad (\because \delta \leq \tfrac{\varepsilon}{19})
\end{aligned}
$$

となるので f は $x=2$ で連続となる.

注意2.5

証明をかくだけなら上の 2. のみでよいが,
δ をどうやってとったかがわかるように 1. も
書いた方がわかりやすい ▣

〈例2.8のグラフ〉



〈証明をかくときに気をつけること〉

- $\varepsilon>0$ はグラフでは縦軸
  $\Longrightarrow$ $f(x)$ の計算ででてくるはず.
- $\delta>0$ はグラフでは横軸
  $\Longrightarrow$ x の計算ででてくるはず.
- ε-δ 論法では(何か条件がないと) $f(x)$ と x のまじった計算($f(x)+x$ とか $xf(x)$ とか)をすることは多くない.

<u>例2.9</u>

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x):=\begin{cases}\frac{1}{q} & (x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},\ x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}\ \text{は互いに素})\\ 0 & (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \text{または}\ x=0)\end{cases}$$

と定める. f は $x=0$ で連続, $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ で不連続となる. □

<u>注意2.6</u>

例2.9はグラフをかくことが難しいので ε-δ 論法を使わないと証明は困難 □

〈ε-N論法やε-δ論法：感覚と厳密〉

（$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$の感覚）

xがx_0に近づくと$f(x)$がAに近づく。

困ること

「近づく」は人によってまちまちな感覚

（$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$の厳密な取り扱い）

「$f(x)$はAに近づく」

→ 誤差$|f(x)-A|$が$\varepsilon>0$より小さくなるように先に与える

「xがx_0に近づく」

→ $0<|x-x_0|<\delta$ ならよの（誤差）$<\varepsilon$となるように$\delta>0$をあとから決める。

〈連続関数の性質〉

定義2.8 (関数の和, スカラー倍)

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し 和 $f+g : I \to \mathbb{R}$, スカラー倍 $\lambda f : I \to \mathbb{R}$, 積 $fg : I \to \mathbb{R}$ を それぞれ $x \in I$ に対し

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$
$$(fg)(x) := f(x)\,g(x)$$

で定義する。 □

定義2.9 (関数の合成)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し, 関数の合成 $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

で定義する。 □

定理2.7

(簡単のため) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする。

(1) f, g が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続

$\Rightarrow {}^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対し, $f+g$, λf, fg も x_0 で連続

(2) f, g が $\mathbb{R}$ 上連続

$\Longrightarrow g \circ f$ も $\mathbb{R}$ 上連続

<u>証明</u>　(1)は演習. (2)を示す.
$\forall x_0 \in \mathbb{R}$に対し, $g\circ f$がx_0で連続となることを示す. $\forall \varepsilon>0$に対し, gが$y_0=f(x_0)$で連続なので
$\exists \delta_1>0$ s.t. $\forall y\in\mathbb{R}$に対し

$$|y-f(x_0)|<\delta_1 \Rightarrow |g(y)-g(f(x_0))|<\varepsilon$$

とできる. 次に, この$\delta_1>0$に対し, fがx_0で連続なので $\exists \delta>0$ s.t.
$\forall x\in\mathbb{R}$に対し

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\delta_1$$

とできる. よって, 上のyとして$y=f(x)$とすれば$\forall x\in\mathbb{R}$に対し$|x-x_0|<\delta$ならば

$$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\varepsilon,$$

つまり

$$|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)|<\varepsilon$$

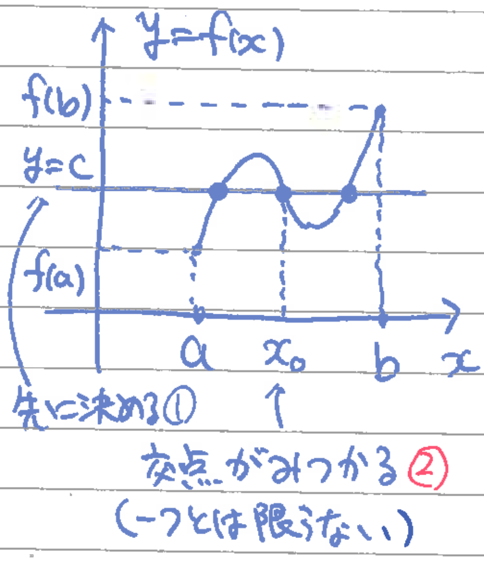
となる。従って$g\circ f$はx_0で連続となる. $x_0\in\mathbb{R}$は任意だったから, $g\circ f$は$\mathbb{R}$上連続となる. □

§§2.4　閉区間上の連続関数

$I=[a,b]\subset\mathbb{R}$上の連続関数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$には重要な性質がある.

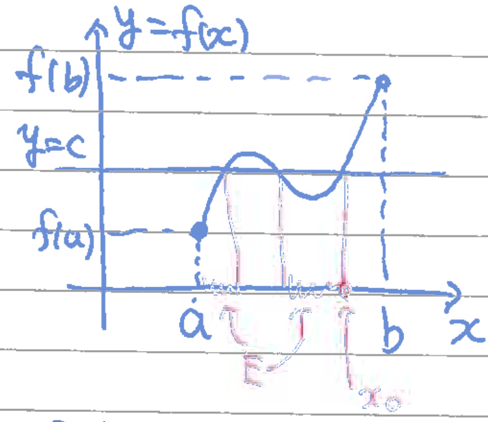
<u>定理2.8</u> (中間値の定理)
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$は連続, $f(a)<f(b)$
$\Rightarrow \forall c\in[f(a),f(b)]$に対して$\exists x_0\in[a,b]$
s.t. $f(x_0)=c$ 証

中間値の定理をグラフでいうと、
$\forall c \in [f(a), f(b)]$ に対して直線 $y=c$ とグラフ $y=f(x)$ はまじわるということ。



証明

$\forall c \in [f(a), f(b)]$ に対し、
$E := \{x \in [a,b] : f(x) \le c\}$ とおく（右図参照）。
$x_0 := \sup E$ とおくと、$[a,b]$ が閉区間より $x_0 \in [a,b]$ となる。



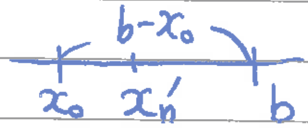
以下、$f(x_0)=c$ となることを示す。

1. $f(x_0) \le c$ を示す。$x_0 = \sup E$ より
$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ s.t. $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$
とできる。「$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in E$」より $f(x_n) \le c$ であり、f は $[a,b]$ 上連続だから、$n \to \infty$ とすると
$f(x_0) \le c$ となる。

2. $f(x_0) \geq c$ を示す。$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$x_n' := x_0 + \frac{b - x_0}{n}$$ とおくと

$x_0 < x_n' \leq b$ となる。



(右図)。$x_0 = \sup E$ より $x_n' \notin E$ だから

$f(x_n') > c$ となる。

$n \to \infty$ とすると f は I 上連続 かつ、

$x_n' \to x_0$ $(n \to \infty)$ だから $f(x_0) \geq c$

となる。

1. 2. より $f(x_0) = c$ となる。 $\square$

例2.10

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は連続で「$\forall x \in [0,1]$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$」をみたすとする。

このとき、方程式 $f(x) = x$ は $[0,1]$ 上に解を持つ $\boxtimes$

証明

$F : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $x \in [0,1]$ に対し

$$F(x) := f(x) - x$$

と定めると、F は $[0,1]$ 上連続であり、

$F(0) = f(0) - 0 \geq 0 - 0 = 0$ $(\because f(0) \geq 0)$

$F(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$ $(\because f(1) \leq 1)$,

つまり $F(0) \leq 0 \leq F(1)$ となるので中間値の定理から $\exists x_0 \in [0,1]$ s.t. $F(x_0) = 0$ となる $\square$

注意 2.7

$[a,b]$ を閉区間にしないと証明で困ること
は、$x_0 \in [a,b]$ となるかどうか？である。$\boxtimes$

定理 2.9（Weierstrassの定理）

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ が連続

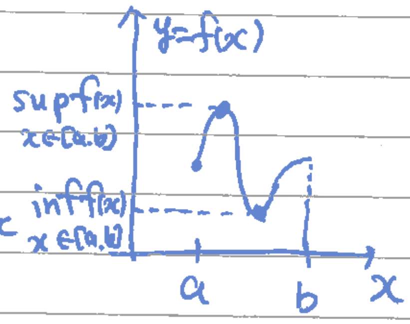
$\Rightarrow f$ は最大値，最小値をもつ。つまり

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) := \sup\{f(x) : x\in[a,b]\} = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

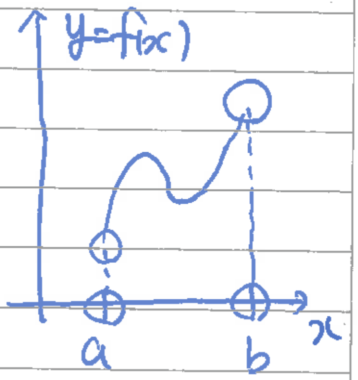
$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

が成り立つ $\boxtimes$

Weierstrassの定理を
グラフでいうと、
グラフの一番高いところと
一番低いところがあるということ



$[a,b]$ を (a,b) にかえると
右のグラフから最大値，
最小値がないことが
推測できる。



証明

最大値の存在を示す.

1. 収束する近似列を作る. $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$

とおくと, $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ s.t.
$f(x_n) \to M \quad (n\to\infty)$ とできる. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
は有界列なので Bolzano-Weierstrass の
定理より収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
が存在する。

2. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ とおくとき $f(x_0) = M$
となることを示す. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset [a,b]$
より, $x_0 \in [a,b]$ となる. f が $[a,b]$
上連続だから

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad (k\to\infty)$$

となる。他方

$$f(x_{n_k}) \to M \quad (k\to\infty)$$

だったから, $M = f(x_0)$ となる。よって
$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ は最大値となる。

□

〈一様連続性〉

$I \subset \mathbb{R}$ に対し $f: I \to \mathbb{R}$ が連続のとき、一般に定義でとれる $\delta > 0$ は $x_0 \in I$ で異なる.

例12.11

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) := x^2$ で定めると f は $\mathbb{R}$ 上連続となる.

$x_0 \in \mathbb{R}$ に対し, ε-δ 論法の $\delta > 0$ がどうかわるかみてみよう.

$^\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ をあとで決める.

$^\forall x \in \mathbb{R}$ に対し $|x - x_0| < \delta$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \\
&= |(x - x_0)(x + x_0)| \\
&= |x - x_0||x - x_0 + 2x_0| \\
&\leq |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|) \\
&\qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&< \delta(\delta + 2|x_0|) \\
&\qquad (\because |x - x_0| < \delta) \\
&\leq \delta(1 + 2|x_0|) \\
&\qquad (\boxed{\delta \leq 1} \text{ を仮定})
\end{aligned}
$$

となる. $\boxed{\delta(1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon}$ となれば

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta(1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon$$

となる.

$\delta(1+2|x_0|) \leq \varepsilon$ を δ について解くと

$\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$ となる。従って

$\delta := \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}, 1\right\}$ ととれば

よいが $|x_0|$ が大きいと δ はいくらでも小さくなってしまうことがわかる。つまり

$$\lim_{|x_0|\to\infty} \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|} = 0$$

がわかる。 □

例12.12

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対し $f(x) := x$ と定めると、f は $\mathbb{R}$ 上連続となる。$x_0\in\mathbb{R}$ に対し、ε-δ 論法の $\delta>0$ がどうなるかみてみよう。

${}^\forall\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ をあとで決める。

${}^\forall x\in\mathbb{R}$ に対し、$|x-x_0|<\delta$ を仮定すると

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &= |x-x_0| \\ &< \delta \quad (\because |x-x_0|<\delta) \end{aligned}$$

となるから、$\boxed{\delta\leq\varepsilon}$ となれば

$$|f(x)-f(x_0)| < \delta \leq \varepsilon$$

となる。従って $\delta=\varepsilon$ ととればよいが $x_0\in\mathbb{R}$ がどの値であっても δ は小さくならないことがわかる。 □

例2.11, 例2.12から$\mathbb{R}$上連続といったときに違いがあることがわかる。例2.12の性質を定式化してみる

定義2.10 (一様連続)

$I \subset \mathbb{R}$に対し, $f: I \to \mathbb{R}$がI上一様連続

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $^{\forall}\varepsilon > 0$に対し, $^{\exists}\delta > 0$ s.t.

$^{\forall}x, x' \in I$に対して

$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ ▨

例2.13

例2.12のfは$\mathbb{R}$上一様連続である。 ▨

証明

$^{\forall}\varepsilon > 0$に対し, $\delta := \varepsilon > 0$ととる。

$^{\forall}x, x' \in \mathbb{R}$に対し $|x - x'| < \delta$ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |x - x'| \\ &< \delta \quad (\because |x - x'| < \delta) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となるのでfは$\mathbb{R}$上一様連続である。 □

注意2.8

一様連続の定義の$\delta > 0$をみつけるためには例2.12の計算が必要である ▨

一般に、一様連続かどうかを定義に従って示すのは難しい。しかし、次の強力な定理がある。

定理2.10

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続
$\Longrightarrow$ f は $[a,b]$ 上一様連続 □

注意2.9

定理2.10は有界、閉区間であることが重要。開区間では成り立たない □

定理2.10の証明(やや難)

背理法で示す。つまり、f が $[a,b]$ 上で一様連続でないと仮定する。

1. f が $[a,b]$ 上一様連続でないことを論理記号でかくと

「$\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall\delta>0$ に対して $\exists x_\delta, x_\delta'\in[a,b]$ s.t. $|x_\delta-x_\delta'|<\delta$ かつ $|f(x_\delta)-f(x_\delta')|\geq\varepsilon_0$」 —(*)

が成り立つ。

否定	$\exists\to\forall$, $\forall\to\exists$
	$p\Rightarrow q$ $\longrightarrow$ p かつ「q でない」

2. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$\delta:=\frac{1}{n}$ととり(*)を用いると $\exists x_n, x_n'\in[a,b]$ s.t. $|x_n-x_n'|<\frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n)-f(x_n')|\geq\varepsilon_0$ とできる。

3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$は有界列だから
Bolzano-Weierstrassの定理より収束部分列
$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$が存在する。
$x_{n_k} \to x_0 \ (k\to\infty)$とすると、$x_0 \in [a,b]$
である。

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0|$$
$$\leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0|$$
$$\to 0 \quad (k\to\infty)$$

となるから、$x'_{n_k} \to x_0 \ (k\to\infty)$がわかる。

4. fは$[a,b]$上連続だから
$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, $f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$
$(k\to\infty)$
となる。他方(*)より$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0$
となるから、$k\to\infty$とすれば
$$\varepsilon_0 \leq |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$
となり、$\varepsilon_0 > 0$であったことに矛盾する □

注意2.10
定理2.9は
右図の斜線部分
の面積が(素朴な
意味で)決まること
を示すのに使う
(後期でやる)