第1章 実数と数列の極限	
定義1.1 (円周率) すべての円について、円周率元を 円周の長さ 直径	
て実める。	
注意 1.1 どの円についても 直径 は答し	۱۱. 🛭
注意1.2 A=Bは「AとBが写い、」と 「AもBで定ぬ」の2つの意味がで この違いを明確におため、この謎	胡。
では、 A=B AとBが等しい A:=B AをBで定める と書きわけることにする。	
70024110 C (- 40.	<u> </u>

半径1の円の円周の長立を求めて,2で
われば、 Tは彰記はず
へーどうけ、て円周の長さを求めるか?
(Archimedes (PILXTZ) OP17P)
S, S,
0. XX21 00. 44 72- (AN - E-E+
5: 半径1の円に内接する正6角形の周の長さ 5: 外接な
⇒ SI S ZT S SI S E E E E E E E E E E E E E E E E
でがは」の意味 円目の長さ
1. Si E \$ \$ \$ \$ 3.
大図よ),一旦の長さは
$2 \times 1 \times \sin(\frac{2\pi}{6 \times 2}) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$
三角形の神像 円の報子 海市三等分類
となる。よって 51=6×1=6 となる。
2. 5、を非める。
左回より、一世の長さは
$\frac{2\pi}{2\pi} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$
6
となる。よって Si=6×等=43となる。

3.	
Sz: 半径1の円に内接移正12角	形の周の長さ
S2: 外梅醇	
\Rightarrow $S_2 \leq 2\pi \leq S_2$	
Sa: 半径10円に内接打至24年	形の周の長さ
Sa: 从 外接 33	N.
\Rightarrow $s_3 \leq 2\pi \leq S_3$	
この操作を続けると、自然影	スカに対して
Sn: 半径1の円に内持移正6×2	い一角形の月の昼せ
Snow 外接する	Mr.
二 証明できる主張で重要なも	ก
定理1.1 (Archimedes)	
すべての自然教のに対して	
2 _ 1 , 1	(I. N
$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_n}$	(1)
Smil = Snti Sn	(2)
が成り立つ。	(3)
管正日 月	
1. Sh Eticks, 内接移正6x2	2"- 角形の
一辺の長さは、右回に)	
$2 \times 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n-1}}\right)$ 1	
1012	7
2 to 302	1 27
$s_n = 6 \times 2^{n-1} \times 2 \sin\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n-1}}\right) = 6 \times 2^{n-1}$	6x2h-1
(6k2m-1) - 0 k2	SIN (3x2h)
となる。 しの数 へしゅんさ	

2. Sn Exxx3. 外接限正6x2 ⁿ⁻¹ 角形の
一世の長さは、右図より
2x1xtan (The standard)
24302° (x24-1)
$S_n = 6 \times 2^{n-1} \times 2 + an \left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n-1}} \right) = 6 \times 2^n + an \left(\frac{\pi}{3 \times 2^n} \right)$
5月の教 ~上の長さ.
となる。
3. (1) を示す、俗角の公式
$\cos\left(\frac{\pi}{3\chi 2^{n}}\right) = 2\cos^{2}\left(\frac{\pi}{3\chi 2^{n+1}}\right) - 1$
$\sin\left(\frac{\pi}{3\chi 2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3\chi 2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\chi 2^{n+1}}\right)$
尹)
1,1,1
$\frac{1}{\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{\cos $
$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3x^{2n}}\right)+1}{\cos\left(\frac{\pi}{3x^{2n}}\right)}$
$6 \times 2^n \sin \left(\frac{\pi}{3 \times 2^n} \right)$
$=2\cos^2\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)$ /:
$\frac{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right)}{6 \times 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right)} (常的)$
_ 2
- 2 - 2 - 6X2mti tan (元 3x2mti) - 5mti
かる書いれる
7 11 1 4 2 4

	4. (2)を示す、信角の公式より	
	$S_{M1}S_{n} = \left(6 \times 2^{nH} + an \left(\frac{\pi}{8 \times 2^{nH}}\right)\right) \left(6 \times 2^{nH} + an \left(\frac{\pi}{8 \times 2^{nH}}\right)\right)$	$2^n \sin\left(\frac{\pi}{3\kappa 2^n}\right)$
	$= \left(6 \times 2^{\text{MH}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{\text{MH}}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{\text{MH}}}\right)}\right)$	$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)$
	$\times \left(6 \times 2^{\frac{1}{1}} \right) \sin \left(\frac{7c}{3 \times 2^{\frac{1}{1}}}\right) = 0$	05 (3 x2 ht)
	(二倍)	4公式)
	$= \left(6 \times 2^{N+1} \sin \left(\frac{\pi}{3 \times 2^{N+1}}\right)\right)^2$	= S _{N+1}
	が得られる。	Ď
		在明经了0倍味
	定理 1.1 岁)	
	2/5mm = /sn + /sm	
	$\frac{ 2/S_{n+1} }{ S_{n+1} } = \frac{ S_{n+1} }{ $	
	た"から、	
	$\int_{N+1}^{\infty} = \frac{2}{1/\sin + 1/\sin x}$	
-	$S_{n+1} = \sqrt{S_{n+1} S_n}$, $S_1 = 6$, $S_1 = 4\sqrt{3}$	
-	(Si=6, Si=4/3 ~43.	
-	C 49.	

例1.				
n=2のとき、52と52を主める。				
3	$=\frac{2}{\sqrt{s}}$		2	
	3,+	/s,	43 + 1/6	
	=2+(1+	43+(+6)	~ 6.4310	
			近似。	
		~√6.43lox	6 2 6.2117	
٤	\$3.			
n	Sn	3n	ての評価	
	6.0000	6.9282	6.0000 € 2 ₹ ≤ 6 9282	
3	6.2117	6.4310	6.211752R = 6.4310	
3	6. 2654	6.3197	6.2654521 € 6.3197	
4	6. 2789	6.2926	6.2789 527 € 6.2926	
5	6 2830	6.2873	6.2830 ≤ 27 € 6.2873	
			1436 もから	
_ て ≏	3.19がわ	かる。		
4.00	m7.			
〈問題点〉				
● fsnfner, fsnfnerは円周率の2倍に				
近づいているのか?				
1. s= lim sn S= lim Snが存在すれば				
定理1.1のは1でN→のとして				
$s^{\lambda} = S_{S}$				
だから(stoを示せば) s=らがわかる。				

しかし。この存在する」はどうちて示すのか?

2. そそそも円周の長さのような曲線の長さはどうちって定めるのか?

(窓:極限と積分)

3. では. 極限とは何か? (答:実数)

4. 実数とは何か? 有理数とはどこが違うのか?

〈微分積分学ABの目標〉

●高校で学人だ教学(教工)を厳密にくみたて 直す。

の実数とは何か?からはじめて、微分積分

 $\int_{0}^{1} x^{2} dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{3}x^{3}\right)' dx = \left[\frac{1}{3}x^{3}\right]_{0}^{1}$

で面積となど関係的の改建さ、

がなぜ正しいか?を眺める(すべてを厳密に示すのはとても大変なので、まずは雰囲気をつかむこと)
の高校までできんだ計算チ法は、するが出来ることが前提である。自信のない学生は、西己布の補助資料等でよく復習ないと、なか、格数量・特別試験では、主に大学入試標準問題相当の問題がでると思、てよい、高校教学の数判者例題がいの問題は、何もみなくても自信を持て説明で記ようになることが望ましい。

31	.2 5	と数の	構成		
	+	-	X	÷ (08年9)	不等号
创数	0	×	0	X	0
整數	0	0	0	×	0
有理數	0	0	9	Q	0
实教	0	0	0	0	0
複素数	0	0	0	Q	X
思理 の 実 で く De	数: 和 No	· 有的 · = , · of	教かり	サ無理数でないもの は無理数 と考えが等 ドア〉 てみる。	.? ₩\$3.
		1/2		√2 有	→ 理數直統
3:	J47.3	}	3.	つかうない	
	レ			しからない	
	甜	弘	ħ	黑理数.	
int	どのお	かに背	好の	言葉でいない	ぎょいかっ

〈集合論の基本費〉 ものの集制を集合といい、そのもの一つ 一つを要素、元という。 例1.2 N:自然数全体の集合 ℤ:整數全体の集合 Q: 有理数全体の集合 R: 実数全体の集合 ○:複素数全体の集合 中: 動元がつつもない集合(空輪という) aが集合Aの事業、元であとき、Q∈Aとかく。 例 1.3 -3 EZ, -3 &N, 7 EQ, 13 &Q. 集合は、るいうしいしと中かっこを用いて 者にとが多い。 13/1.4 a, beR is対して (a,b):= {x = R : a < x < b } 元が何か?をかく 条件をかく. [a,b]:= {文eR: asxsb} とかく。(a,b)を開立間、[a,b]を 閉区間という。 0

集会Aが集会Xの部分集合であるとは、 すべてのQeAに対してQeX」が成り立つ ことをいう。このとき、ACX とかく。 例1.5 NCZ, ZCQ 集会Xの部分集会 A,B に文字して 和集会AUB と共通部分AOBを AUB = {xeX: xeA # to to xeB AnB := {xex: xeA to xeB} と定める. AAB AUB (Dedekind ntn 1897) 定義12 (在理数の切断) Qの部分集をA.Bが有理教の切断 1. AUB= Q Esser) 3. ATTORAGA, DEBISHIZA Y D TENSO. 4. Aに最大値はない。すなわち、すべての a eAbottl Ta'eAt 存在LT a < a'. このとき、〈A,B〉とかにとにする。

例1.6 A1 := {a = Q: a < 1} B, := {be@: b= 1} とすると、〈A、B、〉は有理数の切断に taloこのとき、Biに最小値立がある。 そこで〈A,B,>=主とみなすことにする 例1.7 B = {aea : a>0 50 02>2} とおと〈Az, Bs〉は有理数の切断に なる。このは、Baに最小値はなく、 AzとBo境目は区になている。 A2 IN B2 えニで(A、B)=12とみなすことに移。 四 (AIB) を有理数の切断としたとき、 Bに最い値があい有理数直線を切ったときに ぶつかる (有理教) Bに最小値がない:有理数直線を切ったときに るいかない (無理教)

定義1.3 (実教) 有理数の切断を実験という。 次に有理教の切断を用いて、実教の四則造質 絶対値を定義しなければいけない、このことは 小平 邦彦,「解析入門」」岩波書座、2003 を終醒せま 定義1.4 (順序 関係) X, yelkを有理数の切断を用いて x=(A,B), }=(A',B') EAC. x=4 (ACA' +> A'CA) x=4 (ACA' Xくり (素、Xがかの火キリ. と定義 好。 定理1.2(有理数の細密性) すべてのス.yeRに対してなくなからば、 ある そのが存在して 2くをくなとできる。 面 証明は、Webの講義トトを参照せよ、 1371.8 x:= 12, 4:= 13 2 t3 2 t. 8:= 1.6 EQ とすればなくなくなとできる。定理1.2は、 この場合ではよが「こより少しでも大きければ、 いつでも メくなくなとなる まとの きみつける ことができることを主張している

§1.3 実数の性質と上限,下限 §1.2で実数とは何か?を考えた。実数と 有理敬は何がちがうか?を考える。 〈上限〉 $(0,1)=\{x\in\mathbb{R}:0<x<1\}$ には最大値はないが、1が電大値に 似た性質」を持っている。このことをどうだって 教学の言葉で表現するか?、と考える。 〈論理哆遊〉〈husia教教門A 焦白A に対し ∀a∈A:すべての(任意の) aeAに対して ∃ a EA: ある a EA が存在して Et <. VIt foralls, for any an AEUCO) 近したもの、3は「exit」のEをいくり近したもの である。 定義1.5 (有界) A CIRに対して、Aが上に有界であるとは TazMERが存在して、すべてのaeAb対して USMが成りつことさいけ、これを =MER s.t. VaeA 1=X+LZ a ≤M とかく、このときのMをAの上界という。 Aが下に有界であるとは、「あるMERが存在 して、すべてのae Al文はして Qzmが成位つ」 ことをいう。これを FIMER s.t. FACA ICHICT QZM

とかく。このと生のかをみの下界という。	
Aが有界であるとは、「あるM>Oが存在	17
すべてのQEAに対して lalsMが成り立つ」:	35
をいう。これを	
■M70 s.t. YaeA に対して lalsM	
とかく。	1
1311.9	
A:=(0.1) は有界である	70
REIS	Stand
M=2 >0 とおく、すると ae(0.1)に	対な
て IQISISM が成り立つ。	
1311.10	
B:=(0.00)は上に有界ではない	120
何1.11	QL3
C:=(-00,3)は下に有果ではない	122
定義 1.6	
ACRE対して、Aの上界の集合Au	٤
下界の集合 Aleをそれごれ	
Au := {MER: VaeA1= xx+LZ as M}	
Ae := IMER: YaeA 1= XXXII azmi	
と定める.	122
漨.1.3	1000
定義1.6の記号は一般的ではないので	₹.
使うときは上界の集合、下界の集合と	- 10
明章2730℃	
	-

何儿2
A:=[0.1)となどき、Aの上界の集をAu,
下界の集合Aeは
Au := {M ∈ R : Ya∈[o.1) 1= x=12 a≤M}
=[1, \infty]
Ae = {m = R: \ae[0.1) 10 total 2 azm}
$=(-\infty,0]$
243. W
定義 1.7 (最大·最小)
ACRに対して、Aの一番だい数と
一番かさい勢をそれぞれAの最大値、最か値
Elll, MaxA, minA Est.
何1.13
A:=[01] 1つ対して、max Aは存在しない。
min A=0 2 723.
定套1.8 (上限,下限)
AOR は文字して、Aの上限 sup A, 下限infA
き、Aの上界の集合Au,下界の集合AuをAniで
sup A := min Au
inf A := max Ae
(二十)定義 招。
● Sup Aは「Aよりも大きい数で最も小ない数」
ということである。

〈論理記号と上限,下限〉 ACRIC女(て、 X := SUPA を論理記号で かくと 1. taeAに対けて asd (XはAの上界である) 2. ¥8>01=\$\$L7. = Q. € A s.t. a-E. C.Q. (みよ)少してもかさいと、人の上界になうない)となる。 べーをのこと 定理1.3 (実数の連続性) 上に有界な空でない実数の部分集合 ACR は、実数の上限SupAが存在する。 谜(4 定理1.3の実数を有理数」にかないとは できない(反例: 2000:202~2()つまり 定理1.3は実験と有理数の置いは表している面 実数の連続性から、次の重要な定理が得られる。 定理 1.4 (Archimedes の原理) YEZO 1-女+ CT, 3No EN s.t. ENO>1 が成り立つ。すなわち、(どんなりはな)すべての 正の字数 を>のに対しても、(けかなる) 自然教 No EINをうまく決めれば EN071 とできる. 10 定理1.3,14の証明は講義1一トさ 為四せよ。

何114 A:= Co.1) に対すして、SupA=1となる。 証明 1. Yae Aに対して、 asiを示す。 A=[0.1) \$1) 0=a<1 2 73 55 ひらし も成り立つ。 2. \$ 870 1=\$\$1(7 300 CA s.t. 1-8<90 を示す。つまりをかを先によれて、 1- E < Q。となる Q。EAを探す 右图より 0 1-2 1 $Q_0 := \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ となくとすらのくしだから、CoEAとなり 1-E < 1- = = a0 となるので、一とくなっか成り立つ。 1. 2. より supA=1となることが示された。 注意(5 存在を示すということは一成りなっちのもつける」 と同じことである。例に14の証明では、 1- E<a。となるのとみをみつけれずまい。 QoEAという条件から、OSQoCIをみもに 1-2<んのとかるのをみつければより

注意1.6 1311.14の就的で、Qo=1-至とすると、 とつのが大きいときに、1-至くのとなって しまうことがある。すると Qo 各 A となって しまうので、これをP方ぐために、 Qo:=max {1/2, 1-至{2} としてもる。

多1.4 数列の核眼 く数列の極限、EN論法) 数列「anliedが a∈Rに収束なとは 「lan-al がいを大きくするとのに近づくこと」 であった。このりを大きくそのに近づく をどう厳窓に表現すればよいか?

定義 1.9 (教列の極限, E-N論法) 数列 fantienが aERに収束なとは、 「任意の正の数をつのはけて、ある金数 No EINが存在して、がこのnENに対して nzNoなるば lan-al <をが成功つ」 ことをいう。これを論理記号でかくと ¥E>Oに対して、3NoEN S.t. MENINETUR nz No => 1an-a1< 8 となる。このとき、lim an=acか、 an + a (n+00) En<. 12

〈院養19の意味〉 |ロハー の | かの しばかく (とはいらけてはない

先にと>0を仕境に対して、nを大きくしたとき 1Qn-Q1<81=tx3ようにできる。

EFI)後にえらぶ、No EIN より失の T Transin.

Eに対応してNoを決めればよい、

○皮義をいくう者いても、これはわかりにくい (定義した人が天才なのだから、わかなくつ当然) 例を財産的て 感覚をつかもう 例1.15 lim 1=0 が成り立つ 0 註四月 上 定義のNo €IN をみつけるために、その0 に対して、No EN をあとできめることにする。 YneNi対して、NZNoを仮定すると 11-01= 1= No 243. No < E 2 63 No ENE えるべば が成性つ、病<EE Noについて解いてみると、No>亡となる。 2、 YE >0 に対すして、 No:= [+]+1 EN とかく、ただし〔一〕はよび成えない 最大の整数であり が成り立つことに注意しておく。弱と、 ¥neNに対い、nzNoな引ぎ $\left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N0} \quad \left(:: n \geq N_0\right)$ $< \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \quad \left(:: |V_0| \geq \frac{1}{\epsilon}\right)$ となるのではいかこのが成り立つ。

lim 2n = 2 が成1位つ. 面 部1
होस्विन
1、定義のNo EINE>かけなために、VE>OIS
対して、No EN をあとで決めることにする。
女n ∈INに対して、NZNoを仮定すると
$\left \frac{2n}{n+1} - 2 \right = \left \frac{2(n+1)-2}{n+1} - 2 \right $
$\left \frac{2n}{n+1} - 2 \right = \left \frac{2(n+1)-2}{n+1} - 2 \right $ $= \left 2 - \frac{2}{n+1} - 2 \right $
$=\frac{2}{N+1}\leq \frac{2}{N-1}$
Eti3. Noti < E) CTIS NO EN EZ3
1°(±"
$ \frac{2n}{n+1}-2 \leq \frac{2}{N_0+1} < \varepsilon$ が成功力。 $\frac{2}{N_0+1} < \varepsilon \in N_0 = 2$ いて
100-1
とくと Noフェーー となる。
2. ∀e>01===== (=)+1 AN
となく。このとき、
No>き>を-1 となることに注意する。 YneNi対し、
nzNoを仮定すると
$\frac{2\eta}{2} = \frac{2(h+1)-2}{2}$
_ 2
$\leq \frac{N+1}{N_0+1}$ (: $N \geq N_0$)
< 2/2 (-! No > 2/2 - 1:)
. = £
となるので 1im 2n =2が成1座つ。ロ

注意1.17 1311.15, 1.16 の証明中のNoeNの 条件を記べる計算は実は証明でかかなく てもよい。しかし、彼女分種分学や解析学におけ る「評価弱」という観点では非常に季 である。 例1.15,1.16の証明論法を 8-1部法 という。 15111.17 教列 fanla in対し lim an=a なるは lim ait -- + an = a tox 1/2? これは、E-N論法を用いないと、証明が 困難である 証明は構義 トートにまかす [基1.10 (教列の発散) UR末しない数列 fange は変散なという。 Y又末しない数列 Jangのかでの)無限たに楽散 おとは、「VMERに対して、 NOEN s.t. *nen に対して nzNo => an>M が成り立つ」ことをいう、このとき、 lim an=00 km an +00 (n-100) kmc.

Uxましない教列 fanhonが負の無限力に発散 するとは、「VmeIR に文文して、NoENs.t. YneNに対して nzNo => an <-m が成り立つ」ことをいう。このとき lim an=-00 20 an -- 00 (mo) 200 选1.8 定義1.10のMER, MERIS M>0, M>OIS 本立かえてもよい 定理1.5 数到 自りにより、しかいに、に対して、次が成り立つ、 (1) lim an=a liman=b => a=b (2) fan(か以末な > =M>O s.t +new = x+cz lan | ≤ M (3) thein into an ≤ bn, a=liman b := lim bn => a < b 京田司 (1)講義1一十多昭 (2) a:= liman Ell, 8=170 E13. おと、ヨNoENが存在して、YneNi対し N2No ならば | an-a | < 8=1が成治し 三角下雪式 |an|-|a| < |an-a| 10 う境で、NZNoならば lant = lan-altial = Itial (*) が成り立つ。そこで

M == max { a, ,, a, + a }	
となく。サnelNに女くして	
ISN< No oretit Ian SM	
NZNO AK=13(*) H) an 5 + 19 5 M	
となるので「anlをMが成り立つ、	
(3) 沓理法で示す。Q>bと仮定する。	
E = 1 (a - b) ctr <, lim an=a,	
lim bn=b より、ヨN, NzEMが存在して	
¥neNに対して.	
$n=N_1 \Rightarrow \alpha_n-\alpha < \varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha-b)$	
$N=N_2 \Rightarrow b_n-b < \epsilon = \frac{1}{2}(a-b)$	
が成り立つ、そこで No:=maxfN, N2	-
とおくと, No> N, より	
1 ano- al < 1 (a-b)	
だから ano-a > - = (a-b) より	
ano > 1 (a+b) - (*)	
が成り立つ、他方 NozNz より	
bno-bl < 1 (a-b)	
だから bno-b < 1(a-b) もり	
bNo < = (a+b) - (K*)	
が成り立つ、従って、(*)と(**)より	
bNo < 1 (a+b) < ano	
となり「それられ」対してansbyに矛盾な。「	۵.
達1.9	
定理1.5(3)の不嘗式"≤" も"< "に	
か込ことはできない。	

定理 1.6
数列fanling, I buling, o.beRicht
an → a (n+m)
bn→b (n→∞)
をみたすとき、次が成り立つ。
(1) antbn - atb (n+00)
(2) an-bn → a-b (n→∞)
(3) anbn → ab (n→∞)
(4) Nell 10 10 bn + 0, b + 0
$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} (n \to \infty)$
DN D CTT
ROJE
(1) 1. ¥€>0 1=\$\$+17, an+a, bn+b
(n+00) 243=245, VE1, E2>0 15
対い、PN, N2EIN st. YneIN
(८ देव (
$n=N_1 \Rightarrow a_n-a < \epsilon_i$
N2 N2 ⇒ bn-b < €2
とできる。ここで と、とと はあとで
32003=21=C. No=max (N, N2)
とおと、YnelNに対し、NZNoな対
1(antbn) - (a+b) = 1(an-a) + (bn-b) 1
$\leq a_n-a + b_n-b $
(ご言角不等式)
< E1 + E2
(=: N=No=N, N=No=Nb)

となるから、 ミナモンショ であれば
1(antbn)-(a+b) < E
となる. ミューミュ を仮定して、 ミュニハロマ
AFくて (E1≤量) となる この推論
ともとに言語をかく、
2. ∀E>O 1= \$=1. an + a, bn +b
(n→∞) ≠1), ∃N1, N2 €/N s.t.
Yn∈IN 1= total
$n \ge N_1 \Rightarrow q_n - q < \frac{\varepsilon}{2}$
N2N2 ⇒ 1bn-b1< €
22=3. No:=max [N, N2] E
と3と、 YneN に女し NNo
在3年"
(antbn)-(a+b)=(an-a)+(bn-b)
$\leq a_n-a + b_n-b $
(江三角不等式)
< \\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\
("nzNo=N, n=No=N)
= 8,
7tsht 1(autbn)-(atb) 1 < 8 & to2.
(2) 名自考之よ。
(3).1 4€>0 1=\$=1. an=a, bn=b
(N-100) &1). AEI (5220 15#1("
PNINZEN S.t. YNENEXAL
$n = Q_1 \Rightarrow Q_2 = Q_1 = $
NZ N2 => 16n-61 < 82
11/2 -> 101 - 101 - 85

とできるここでを、いたつのはなどできない = Ye 12 98 No := MOXINU No Y YL. Then iskte nano tisti lanbn-abl = \ an(bn-b) + (an-a) bl ≤ |an | |bn-b| + |an-a| 161 (ご三解害式) < Ezlant E, lb1 (" n= No=N, n=No=N2) 4th. == = 8219ml+8, 16/ < 8 4(ton) が まがりが残れいるので かを取いずに と、、とこをまためるように、次のことを行う。 京理1.5の(2)より. 3M70 s.t. FNEN 10 HCZ lan1≤M であた。従って |anbn-ab| < Ez lan + Eilb| < 2 M+ E; (161+1) = E, (M+161+1) (ミニミンと作定) LTIBOT E, CM+161+1) < E | E みたすように と、を決めればよい。 この推論をもてに証明をかく、 2. ∀を>0 に対すし、10の(10の が収報はり) 3M>0 s.t. YNGNISKIL LanISM vite3 ori, an→a, bn→b (n→∞) 51) BN, N2 EN S.t. FNEN に対けて

谁。1.10

定理1.6の証明の1.の議論は悪く ※専のない引分であるこのため、教経 にもかいていない。しかし、自分でかおよう に打には、この1.の部分を理解する必要 がおり、教料書を自分で読むと生には、 この1.の部分を考えるとより深く勉強 できる。

定理1.り (はさみうちの原理)
報列 faulus, 1 bulus, 1 Culus, が theiN
1= XXICZ an s Cn s bn Extravas.
〈仮定〉
anln=1, fbnln=1 は収束して
d:= lim an = lim bn
〈名言論〉
1 Culiner to UR# LZ lim ca=d 2 to 3 10
FIRE
YE>O1=X+C, an →d (n→0) F), =N, EN
S.t Ynein 1= to (2
NZN, => d= an≤1d-an1< €
とできる、シタにbn→d(n→m)より3N2 EN
s.t. YneN に対すして
$N \ge N_2 \implies b_n - d \le b_n - d < \varepsilon$
(2 ±3, 5,7 No == max fN1, N2/2
とれば、 ¥nelN に女は、nzNo
な3は 9n = (n = bn より)
- E < an- d (-: n= N. = N.)
S Cn-d
≤ bn-d
< & , (": nzNozNz)
14ht. cn- x1 < E x to 3

〈漢調 数到〉 定數1.11 (英調增加,至調料小) 数到了のいでが(広義) 準調増加 Q. Yn∈IN 15対して an ≤ ant 1 教到 (のたらかで太美) 単調減少 京 YneN 10女ナレて anzanti 定理1.8 教列 fanlis か有果かつ単調増かい => 1 an line it a == sup an 1=42+73. Tim an = Supan tto FREDA {an(not か上に有界だから、a:= supan < 00 となる(定理1.3)。上院の定義から YNENに対けて Quisa となることに注意 732 |an-a1 = a-an 2/23. さて、サモンロロ女は、上中見の定事から、 PNOEIN s.t Q-E < QNO とできる、 Yn EIN に対し NZNO ならば 1anlan が単液性かより a-E<anosan となるので 1an-a1 = a -an < € つまり lan-alceとなる。

例1.18 (自然対數の值)
数列(けかりからかりは以来する。
e:= lim (1+力)かとあき自然対数の症
۷115 Ø
(Ae)
an== (H+)" Exc.
1. そのにに、が季調増加でもことを示す
Ynelly 1= X=1 CZ
$a_n = \sum_{k=0}^{n} n C_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(-:= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)$
$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{k}$
= = n 1 n(n-1) (n-1) (n) k
$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} 1 \times \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{N}\right) - (k)$
5 = 0 k! 1x(1-1/n+1)(1-2/n+1) (1-1/n+1)
$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{N} \geq \frac{1}{N+1}\right)$
= 1 nti Ca (1) k = (H nti) nti = Quti となるので、 { an line は 単記 地方で
となるので、くないには単意同様かって
\$3.

2. 「anlies が有界であることを示す。
Yn EIN に対し、(*) より
$0 \le \alpha_n \le \frac{n}{\beta} \frac{1}{\beta!}$
=1+\frac{5}{821}\frac{1}{81}
< / the state of t
$= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{M+1}}{1 - \frac{1}{2}} < 3$
となるので(anlianは有界である。
1. 2.と定理しるより「an(いこ)は4次末する。
〈コンハ・クト小生定理〉
定義1.12 (部分列)
数すいfange,からい原番をかえずに一部を
抜きだに表列 { angleの を f angles の
部分可以以以, Jang (C) C fan (10) とかく
(31) 1. 19
neかに対し、an:=(-1)nとかく。
このとき
faznin=1 = faz, a4, a6, a8, }=[1, 1, 1,}
†
[a2n-1 (no) = fa, a, a, = f-1,-1,-1,}
はいいいの部分がである。

上記の何1.19の数列(a、l為は必ましないが 有界である、つま)、定理 1.5の「収末⇒有別 の臣「有界⇒以末」は成り立たない。

定理1.9 (Borzano-Weierstrass) 数別「9~1~10~1が有界 一 ある部分が「6melsan Columnen が

存在して「Challes は収集了 面定理」、9は下上の有果集合は本政サコムルがり、と主張している、詳しくは教堂入門CDでする。

証明の根明

1 aulia が有果なので

PMフロs.t. YnelNitter lanl=M, すなわち-MSansMとできる。

- 1. [-M.o]と [o.M]の少なぐと一方には 無限個の anがあ、無限値もおうの 区間をI、となく(両方知場会は どろうをとってもよい)
- 2. I、を半分にした2つの区間を考入まとどすらかの区間には無限個の如が弱。 無限個なる方をIンとかく、

4. an eI, an eI, an eI, として 歌かり Caston Eths. Ipが ピベビムルエCが (区間の幅は M) ことから、familionはある実数 a EIR に収束することがわかる。 〈集積点と上極限,下極限(難)〉 定義 1.13 (集積点) 数到 lank 1次れ aeRが 佳積点 = 31 anglas Cfaulus s.t. lim ang = a m 定義 1.14 (上梅限,下梅限) 教列 (anho) 1文付し (anlon の上極限 limsup an と下極限 liming an Ezhzin limsup an = lim (sup ar), liminf an = lim (inf ar) で定義する D 定理 1.10 (上極限,下極限上集積点) 歌河 (an(no 10女人 limsupan, liminfan はるれぞれ最大、最小の集積点になる M

定理しいよりたかれかる。
定理1.11
A THE PARTY
数有11 19m1 10000000000000000000000000000000
lim sup an = liminf an
n-no n-no
ならは、そのにいは 収車列である
ゆうは かいいき はんまかりである 図
極限は存在するか否からかないが、上程限
下極限は第二存在するので、(専門的な)
本動限の言義論を行うときによく用いられる。

(Cauchy がして実備性) をきでの話は、「収末な実験のERがわかっ ている」が前提にあった。ろうでないと lan-alを計覧できない。収ま先がわかな いときに、収束はどうだって示せばよいか? 定義1.15 (Cauchy 到1) 勢多り {an {non か Caudny る) (=) YEDO 1= XALL 3NO EN S.T. Ynim ENIC 炮暴 ねして n, m z No => lan-am / < & が成り立つ E) @ Candry 3111 感觉的1017 Ian-anl-0 (n,m-00) と同じてある。 定理1.12 (客敷の完備性) 数引 30の1のこ 12対して Qualingが収末引(=) langingがCoudy到 10 定理したにより、数列が収まるかどうかは Couchy ずりになるかどうかを意同べればよい。

定理1.12の証明
(ラ) (こうろけできるようになって公かしい)
fanting がaeRに収束すると何定して
Janines to Couchy Tile to = ZE F. 7.
¥ € >0 (= \$ = 1) lim an = a = 1)
3N°EN S.t. ANEWICKACS
$n \ge N_o \Rightarrow \alpha_n - \alpha < \frac{\varepsilon}{2} - (*)$
とできる. ま、2 ¥n,m EIN にますして
n, m2 No tag12"
an-am = (an-a)-(am-a)
≤ lan-al+lam-al
(::=為不等式)
< = + = (:'n, m2No 'c(*))
= 8
25302 1an (n=, 17 Couchy 517 to 3.
(一) (こちらは難しい)
1. 10~(のか有思であることを示す。
anlas It Condy 51(F1) = No FN s.t.
YNEIN 102+C7
n=No => an-ano </td
とてきる。よって
1an1 = an-anol+ anol ≤ 1+ anol
~ tist's M = mex { a,1, a,1,, a,6-1],
Itlanoll & tick. YNEN ICHTLE
an ミ州が成り立つ。



2. Boreano-Weierstross n定理(定理1.9)
H) 部分引 1 ang 180 Cfam 100 が在本17
lim an = a & z=3. == 2" an 100 10"
4520 1= \$2762. 10m (no. 15" Couchy 3")
だがら、 BNIEN St. FNIMEINISTACS
n, m=N, => an-an <= - +1
とできる - 次に ane- a (b-100) b1).
PNZEN St. FREN 15 X+C7
12 N2 => 1 ane- a1 <= -(++)
とごきる. そ=で たo EN を Ro Z N2
かっ かんこと ひにをみたすようにとると
YNEW I X+LZ NZNES TOSIE
(an-a1 ≤ 1an-ana)+ (ana-a)
くきゃを
< ½ + 2
(-: n=Ng, ZN, E(*)
NZNRO, ROZNZ Z(*F)
= C
とてよるので (い)の (い)の)かではりまつ
> 1.11
Borzano-Weierstrass の定理は
実数の完備)生(定理1.12)を用いずに
示すことができる。

達1.12
注電1.4にきあるように、実数の連続はは
実数と有理数の違いを表している。実は、
字数と有理数の査いは次の4つの性質で
あり、さろにろれらそつのは楚はすべて同値で
ある。すなわち、どれを実数と有理数の違い
としてもよいことが矢のられている。
(1) 定理1.3(実数の連続性)
(2)定理1.8 (単限数列の収束性)
(3)定理1.9 (Borzano-Weierstrass の定理)
(チ)定理1.12と定理1.4
(実勢の完備1生と Archimedes の原理)
〈連介化式と本本限〉
1311,20
渐化式
2 - 1 + 1
July 3n Sh
Snoc = V Snow Sn
$S_1 = 6$, $S_1 = 4\sqrt{3}$
Si=6, Si=4J3 でをかられる数引 Sniner, Sniner は
收末13.
FIRE
NEIN 10 \$4L7, USS, 5525-55 missn 55
る Sn-1 ミー・ころっころ、となることを得到地流です



1. N=10K= 0<8,=6=4[355,21)
成门之了。
2. 0 55,5 5 Sn 5 Sn 5 Sn = 5 5 5,
を仮定して Su Sunti Sunti SSh をす.す.
3-9"
$S_{n+1} = \frac{2}{n}$
$S_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{S_n + \sqrt{S_n}}} > 0$
7-1
Suti = Suti Su >0
がわかる。一次に帰納法の「験 sussh
71)
$S_{n+1} \leq \frac{1}{S_n} = S_n$
5 - 3 - 4
Sux 2 2 = Su
がわかる。よっと
$S_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}} S_n \geq \sqrt{S_n^2} = S_n$
Sur = VSun Su \ Sur = Sut
となりの。 とこことがるこれでここ ここ
が示さんた。
3. fs.(no) 体革章图·楚加之有界
おんに 伊華風域少で有界
となるかり定理 1.8 より収まる ロ
造1.13
し欠末失が、円周率に等しいこと Eデオのは、
別の(難しい)問題である。
77



11.21 1.2, xeR, x + ±1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	
(米) Qnn = ran+ g. Qo = 2 で定められる。 Qan Man は O 5 上 < 1 のとき いなする。 公文 Q =	何1,21
できめられる。「Quanting は O S I E < のとき いまする。	hg,xeR,上も土1に対すし
できめられる。「Quanting は O S I E < のとき いまする。	(w) I any = rant 8.
(*) z : Q := ling an が存在すれば ハラのとし? Q = 上 a + 字 となる。 収まなかどうかを意思へる。 Qu+1 - an = 上 (an - an - 1) (こ注意 すると an - an = 上 an - an - 1 - (**) が 得 3 か 1 . 次の 経 い 子像の原理工の いと 上 < 1 ⇒ an n = 1 は 収まず が 出かる。 定理 1. 13 (経 小子像の原理) 教子 an n = は 0 ≤ 3 L < 1 s + * N ∈ N 文字 して an - an ≤ L an - an - 1 を またす とする。 このとき cu n = 1 は 収まか を 1 1. 21 の 方法は、も、と 複雑な (非緑形 門) an - an = チ (an) 二対して 一般及 のか よのうれなくても、 「な n = 1 に な 1 に カース ・ の な の か ま か られなくても、 「な n = 1 に な 1 に カース ・ の か ま の ら な に く ま ら な に に な に し な に し に な 1 に カース ・ の か ま の ら な に し な に に し な に に し な に に し に に に に し に に に に	
(*) z : Q := ling an が存在すれば ハラのとし? Q = 上 a + 字 となる。 収まなかどうかを意思へる。 Qu+1 - an = 上 (an - an - 1) (こ注意 すると an - an = 上 an - an - 1 - (**) が 得 3 か 1 . 次の 経 い 子像の原理工の いと 上 < 1 ⇒ an n = 1 は 収まず が 出かる。 定理 1. 13 (経 小子像の原理) 教子 an n = は 0 ≤ 3 L < 1 s + * N ∈ N 文字 して an - an ≤ L an - an - 1 を またす とする。 このとき cu n = 1 は 収まか を 1 1. 21 の 方法は、も、と 複雑な (非緑形 門) an - an = チ (an) 二対して 一般及 のか よのうれなくても、 「な n = 1 に な 1 に カース ・ の な の か ま か られなくても、 「な n = 1 に な 1 に カース ・ の か ま の ら な に く ま ら な に に な に し な に し に な 1 に カース ・ の か ま の ら な に し な に に し な に に し な に に し に に に に し に に に に	で定めるれる。 anling は osle 1 くしのとき
(*) 2	Und व द
Q=上Q+分となる。収ますかとうかと言問へる。 Qn+1-Qn=上(Qn-Qn-1) (二注意すると Qn-Qn-1 -(**) が得るかる。次の解か 宇傷への原理工用には 上(<1 ⇒) Qu(n=1 は収束すり があかる。 ではしる (*** ・ 宇傷の原理) かずして	
Q=上Q+分となる。収ますかとうかと言問へる。 Qn+1-Qn=上(Qn-Qn-1) (二注意すると Qn-Qn-1 -(**) が得るかる。次の解か 宇傷への原理工用には 上(<1 ⇒) Qu(n=1 は収束すり があかる。 ではしる (*** ・ 宇傷の原理) かずして	(*) 2" Q == lim an or Attalus" hanker
Qu+1 - Qn = E(Qn - Qn-1) 1 注意 すると	
「注意 すると	
が得了れる。次の縮小子像の原理工のには 1上/<1 ⇒ Qualing は以来到 が出かる。 定理には (縮小子像の原理) 数到 Qualing は 0 ≤ 3 L < 1 s.t. を N ENN 1 文 + L 7	
が得了れる。次の縮小子像の原理工のには 1上/<1 ⇒ Qualing は以来到 が出かる。 定理には (縮小子像の原理) 数到 Qualing は 0 ≤ 3 L < 1 s.t. を N ENN 1 文 + L 7	an -an = Lr an -an - (**)
1上/<1 ⇒ au(ne) は収まず」 がわかる。 定理には (縮小字像の原理) 数ずい au(ne) は 0 ≤ 3 L < 1 s.t. を N ∈ N 1文はして	が得了か了。次の経い字像の原理工のいまと
がられる。 定理には (橋小字像の原理) 数引 (1 au lu	
数す 1 (an line) は 0 5 1 (1 st. * h eN 1) 1 2 1 (2 n - an - 1) 1 2 1 2 1 2 1 3 2 1 3 2 1 3 2 1 2 1 2 1	451 452
数す 1 (an line) は 0 5 1 (1 st. * h eN 1) 1 2 1 (2 n - an - 1) 1 2 1 2 1 2 1 3 2 1 3 2 1 3 2 1 2 1 2 1	定理1.13(縮小字像の原理)
12年17 12mm-anl ミレ (an-an-1) を対して とする。このとき、 {an line は 収定する。 12度、1.19 121の方法は、も、と複雑な(非緑形門町) Anti = fran) 1-女サレフー般項のがずめられなくても、「an line」	
Ext たすとする。このとき、{Cum line は収ます。 注意: 1.19 151/1.21の方法は、も、と複雑な(非緑形問題) Cuti = f(an) 二大サレフー般項: anが 本められなくても、「an line」	
きませまとする。このとき、{Culing は収ます。 注意:1.19 15:1.21のおはは、も、と複雑な(非緑形問題) Cuti = f(an) 二対して一般項: aがずめられなくても、「an」に、	1ann-9n1 ≤ L (an-an-1)
三支して 一般項のかずめられなくても、「anlies」	
何1.21の方法は、も、と複雑な(非線形問題) Quel = f(an) 1-女+して一般項·Qがずめられなくても、「an」のこれがする	
何1.21の方法は、も、と複雑な(非線形問題) Quel = f(an) 1-女+して一般項·Qがずめられなくても、「an」 (2)	
Quei = fian) 1-女+して一般項のが事められなくても、「の」のこ	
に対して一般項のがずめられなくても、「の」に、	anti = fran)
かりかまないこのかっていたかいよう	
2 - 1 - 2 - 2 - 1 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 -	が収束なかを固べることができる。

第2章 関数と極限
§2.1 い3い3な関数
〈関数とは何か?〉
定義2.) (関数)
集会Xに対して、子がX上の関数であるとは
「Vx eXに対して実教fx) ERが定ま規則」
のことをいう。このとき f: X→ R とがく。 Ø
例2.1 (指數園數)
R上の関数 exp: R→REXER1=対して
$\exp(x) := e^x$
で定める。
何(2.2 (三角関数) sinx
sin, cos (+REO
関製である.
右国のように単位Aを
用いて XelPに対して
sinx, cusx を定ぬのであった。
また ton: R \ はき, ±まれ, ± 示, → R
と文を限しは立、ままれ、ままれ、・・・~ 10女化
tan x := sin x
と定めるのであった。

(1)
注意2.1
1312.1,2.2 は厳密な定義ではない の
〈逆 関教〉
*yeRに対し y=exp(x) となる x ER は存在
おとはり起うない(かり: チュートに女子し、
-1= exp(x)= ex 443 x + R (+ to 1.).
また. by eRic対して、 y= sinx となる
スERはたけんなり(イツ: 4=0に女すして、
$O = \sin(x) \times t \cup x \in \mathbb{R} \mid \exists x = 0, \pm x, \pm 2\pi, \dots)$
定義2.2 (像人)
集成Xとf:X→Rに対し、fの像f(X)を
$f(X) := \{f(x) : x \in X\}$
_*'rb`* th
C 产款 95.
注意-22
f: X→ Rの像f(x)はなら、ほぐいれば
y=fox)とにたときのyの範囲のこと 面
定義2.3 (単新)
集会X上の関数十:X→Rが単射
は サダレスIEXIE対して
$f(x) = f(x) \Rightarrow x_1 = x_2$



	注 2.3
	f:X→Rが単新というのは対像をとれば、
	$x_1 + x_2 \Rightarrow f(x_1) + f(x_2)$
	だかり、異なる2点の行生生は草にちがうということの
	集会X上の関数子:X一Rが革射であるとき
ここの f(A) は f(X) の間違い	fの逆関数 f-1: f(A)→ X は
	4ef(A) 1= x+1(7 f-1(4) e X &
	f(-(1)) = 4
	をみたすものとして定義すれたができる。
	coupy to concept after a cas
	12112 2 (trutte bate)
	例2.3 (対數関數)
	exp: R→Rは革動される
	$\exp(R) = \{e^{x} : x \in R\} = (0, \infty)$
	だから、expの逆関数は(o.00)上で定義
	できる。これを対数関数といい、
	log: (0.00) → R corat, to
	$\log(\exp x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$
	exp (log y) = y (y \((\dold \) (\dold \)
	exp (logy)=y (ye(0.60)) となることに注意せま、 四
	例2.4 (逆海関數)
	Sin はR上で単純でないため、正関数
	を作るためには(定義域に)制限でかける
	头栗がある



sinは[-子 到で再射な関数にな)。	
Sin ([-=, =]) = sin x : x ∈ [-=, =] } = [-1, 1	
となるで、Sin の 園教は[-1,1]上で	**
定義できる。これを並正弦関数といい、	
arcsin: [-1,1]→ [-* *) とかく。	
$\operatorname{arcsin}\left(\operatorname{sin}x\right) = x \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$)
sin (are siny) = y (y = [-1.1]	ŕ
だが	_
$arcsin(sinx) \neq x$ $(x \in \mathbb{R})$	
となることに注意すること、同様にして	
匠余弦関数 drccos:[-1,1]→[0,下]	
単正接関数 arctan: R→ (-3,5)	-
	P)
C 7 7 C C C C C C C C C C C C C C C C C	2)
(指數法則)	
定理2.1 (指數法則.)	
次の指数法則が成り立つ	
(1) Hx, y elk 1= x + 1 = ex + 8	
(2) \x, y GR 1= t2 (ex) y = exy	_
2	'n
系2.)	-
Yab>o, YaeRis対して (ab)x=axbx	(
	7



〈複素関戦への拡張〉
指數法則(1),(2)を企上に拡強しても
成1位つとしよう、つまり
¥2, w ∈ € 1-2412 e2.ew = e2+w
A5'MEC (=\$4(5 (65)M = 68M
が成り立つとする。
定理2.2 (Eulerの公式)
YxeR に対して
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
が成り立つ
10 11K 12 7
XERに対してeixが行か?はといあえず無利
すると
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$
$= \cos \alpha - i \sin \alpha$
まり、cosoc、sinスについて解くと
$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
が得られる。
<u>\$2.2</u>
Axeric X+CZ
$\cos x = e^{cx} + e^{-cx} = \sin x = e^{cx} - e^{-cx}$
2 , 20
第2.2 $\forall x \in \mathbb{R}$ に 文 $\forall c$ c c c c c c c c c

これにより、主意数関数がわかれば、三角関数 もよくわかることになる。 定理2-3 (力の法定理) サス、タモルになすして cos(x+y) = cosx cosy - sinx sin y sin(x+y) = sinx cosy + cosx sin y sin(x+y) = sinx cosy + cosx sin y $e^{ix} + e^{-ix} e^{ix} + e^{ix} - e^{-ix} e^{ix} - e^{-ix}$ $e^{ix} + e^{-ix} e^{ix} + e^{-ix} + e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)}$ $= \frac{1}{2} (e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)}) = cos(x+y)$ $x = \frac{1}{2} (e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}) = cos(x+y)$ $x = \frac{1}{2} (e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}) = cos(x+y)$
定理2-3 (加速定理) $\forall x, y \in \mathbb{R} \mapsto \forall 1$ $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\cos x \cos y - \sin x \sin y$ $e^{ix} + e^{-ix} e^{ix} + e^{-ix} e^{-ix} e^{-ix} + e^{-ix}$ $= \frac{1}{4} \left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)} + e^{$
$ \frac{\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ in } x \neq 1?}{\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y} $ $ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial x} \cos y - \sin x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \cos y - \sin x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \cos y - \sin x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \cos y - \sin x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \sin y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x \cos y $ $ \frac{\partial x}{\partial y} = \cos $
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\cos x \cos y - \sin x \sin y$ $e^{ix} + e^{-ix} e^{iy} + e^{ix} - e^{-ix} e^{iy} - e^{-ix}$ $= \frac{1}{4} \left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right)$ $= \frac{1}{4} \left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right)$ $= \frac{1}{4} \left(e^{i(x+y)} + e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right) = \cos(x+y)$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\cos x \cos y - \sin x \sin y$ $e^{ix} + e^{-ix} e^{iy} + e^{ix} - e^{-ix} e^{iy} - e^{-ix}$ $= \frac{1}{4} (e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}$ $+ e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}$ $= \frac{1}{4} (e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} - e^{-i(x+y)}) = \cos(x+y)$
$sin (x+y) = sin x cos y + cos x sin y.$ $= cos x cos y - sin x sin y$ $= e^{ix} + e^{-ix} e^{iy} + e^{ix} - e^{-ix} e^{iy} - e^{-ix}$ $= \frac{1}{4} \left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} - e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right) = cos (x+y)$
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$ \frac{e^{ix} + e^{-ix} e^{ix} + e^{-ix} e^{ix} - e^{-ix} e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{2i}{4} (e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)}) $ $ = \frac{1}{2} (e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}) = \cos(x+y) $
$ \frac{e^{ix} + e^{-ix} e^{ix} + e^{-ix} e^{ix} - e^{-ix} e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{2i}{4} (e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x+y)} + e^{-i(x+y)}) $ $ = \frac{1}{2} (e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}) = \cos(x+y) $
$= \frac{1}{2} \left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right) = \cos(x+y)$
$= \frac{1}{2} \left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right) = \cos(x+y)$
$= \frac{1}{2} \left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} \right) = \cos(x+y)$
= 1 (ec(x+4) + e-c(x+4)) = cos(x+4)
= 1 (ec(x+4) + e-c(x+4)) = cos(x+4)
となる。Sin(xty)についても日本である。[



D 100 100
§ 2.2 関数の極限
$\lim_{\chi \to 2} \frac{\chi^2 - 4}{\chi - 2} = \lim_{\chi \to 2} \frac{(\chi + 1)(\chi - 1)}{\chi - 2} = \lim_{\chi \to 2} \frac{(\chi + 1)}{\chi - 2} = 4$
であた。
の x1-4 は x=2で(分の)=0 となる.
X=2で定義できない。
の「近からは毒気学でどういえばよいか?
E / 1/4 / 2/4 - 1
定義2.4 (関数の極限)
$I=(a.b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a.b)$, $f:I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$
の fがx→xuのときに AeRに収束する.
(>) ∀E>0 1=\$412 35>0 S.t. 4x€I 1/20 1=\$412
3> A-(x-1<5=) fx)-A < €
= art lim f(x) = Art f(x) - A (x -> x0)
とかて。
のチがスコス。のときにの(一の)に楽散形。
(=> ¥K>01=\$#1. 36>05.7. 4x€INfx(1=\$#17
羅 O< x-x0 < f⇒ f∞)>k
$ \begin{array}{ccc} (fx) < -K \\ \hline $
$\forall h' fac) \rightarrow \infty (x \rightarrow x_0) (fac) \rightarrow -\infty (x \rightarrow x_0)$
とかく。

lim z sin =	= 0	
TITE PA		
1. 1570年第	して、定義のよう	>0 E2+71+3 to
		CERNIO 12-41
0< x-0 <		
20 別人之一	0 = 1x siv	
		(1 sin = = 1)
1.40 1.0 1	THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NOT THE OWNER.	(5 /x1 <2)
K \$3 82		ania"
xsin ≥		- 10-44
となり、このき		
2. 48>01=x=	100 9:=8	50 ET.
4x = 18/10	(1-94 (र ०	ck-0108
17.212	- 0[=[x] s	11
(X 210 \$	- 01 - [X] [S	(m)
	2 20	(= xin = <
	10	(- 1210
Tatuba los	3-10-6	2 4 7 2 07"
1647 5 1X	ツレン トナン	ことなるので
7C-90	-0 543	

$\frac{131/2.6}{100}$ $\frac{131/2.6}{200}$
lim 22= 1
2-)
FEBA
1. ♥をつのに対して、定義のようのをみりけなな
にあとてきれることにする、YXER111に対し
0<1x-11<5を仮定力と
$ x^2 - 1 = (x-1)(x+1) $
= x-1 x-1+2
≤ x-1 (x-1 +2) (~= 解電()
<5(6+2) (= 1x-11<6)
となる。 (5 三) を作定するとる(5+2) =36
81) 35=8 2 ANIX 12-11< E SES
この考察をもとに征の行をかく、
2. 4E>O(= \$ + LT, 5 := min (= , 1 > 0
となって、るろしかっちょうとなる。
4x∈R1911=2+1, 0<100-11<8 tisti
$ x^2-1 = (x-1)(x+1) $
≤ x-1 (x-1 +2)("= 許響式)
< \(\int (\int +2) \) (\(\tau \) (\(\int -1 \) < \(\int \)
$ \begin{array}{ccc} & & & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & $
1 that les 1 < 8 × 702 or 1 mg 1 × 60
また。 (できる) すなわす x²-1 < をなるので im x²= 1 となる なると ここのではなる このではなる ここのではなる こ
上記の議論をとる論法という。
The Car Carlotter

定理2.4
I=(a.b) CR, xo∈(a.b), f: I\(x_0) → R.
lim fox = A
(2) 4 1xn 1 non CI 1 1x0 1 1= x41
同値 2n→2(o (n→∞)
\Rightarrow $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$
FEBA A
(ラ) サイスのいこころの(に対してカースの(いつの)
を仮定する、サモンの1つ女+し lim fox)=Aより
38>0 s.t. 4x€I1126/10x4CZ
0<×-x01<5=> 1+60)-A1<€-(*)
が放けて、エーコンの(n→の)より3NoEN s.t.
ANEIN ICATICS
N2No => 12m-x0/ <2 -(xx)
となるので、 (キャ) と(*)より N2No なうは
fexu)-A < をが成り立つ、後,て
f(xn) -> A (mo) or Axitz).
(今) 背理法で示す。
3 €0 >0 S.t. \$5 >0 (0\$\$1, 3x5€I\{X0}
5.t. 0< x5-x0 <5+10 f(x5)-A ≥€0
を仮定する. ∀neIN 1つ女はして 5= 計と
2335 ℃ = xn ∈ I \ {xo{ 3. T.
xn-x0 < 1 50 f(xn)-A > 80
となる。

1 つのとすると xn-xo < n が		
fxm)-A > E。 よ) f(xm) → A (n→∞) となない。 これは最年のの人成定、 * xm n C N xm c c c c c c c c c	カラのとすると	
これは最本のの仮定、* x_(n=1 C I \ x o 1 = 対 c x o	xn-x0/< 1 +1) xn+x0 (n+00)	
ストラマの (ハラの) =>: fan)=A (ハラの) 1=3億す]	1focm)-A1 ≥ €0 &) f(ocm)-1 A (n+00) & Test	241
ストラマの (ハラの) =>: fan)=A (ハラの) 1=3億す]	これは最初の何定 * 12~(からて)いないしま	176
「二角度す」 「定理2.4を用いると、数すりが基件をと同じことは 「まとんど、そのまま成いたり、 「=(a,b) CR, X, EI, f: I\ (x_6) → R, g: I\ (x_0) → R, lim fax=A, lim g(x)=B とおとったががたり (1) lim (fax) g(x)) = A+B (2) lim (fax) g(x)) = AB m 定理2.6 (Cauchyの料定条件) I=(a,b) CR, X, EI, f: I\ (x_6) → R, [im fax) が、存在 (ウ) そこっに対けて、うちっの、たが、次(をI\ (x_6) ーを対して のくしなー x_6(< を, のくしなー x_6) ーをがり <を 1 f(x) - f(x') <を	Xn-1xo (n-100) => fan)-A (n-10	o)
まとんど、そのまま成いはつ。 定理2.5 I = (a.b) CR, x. EI, f: I\(x_0 \rightarrow R, g: I\(x_0 \rightarrow		5
まとんど、そのまま成いはつ。 定理2.5 I = (a.b) CR, x. EI, f: I\(x_0 \rightarrow R, g: I\(x_0 \rightarrow		
注理2.5 I = (a.b) CR, x. ∈ I, f: I\ (x.o) → R,	定理2.4を用いると、教列の極限と同じことは	
I=(a,b) CR, x ₆ ∈ I, f: I\fx ₆ {→ R, g: I\fx ₆ [→ R, lim f(x)=A, lim g(x)=B とおとったが前はっ (1) lim (f(x)+g(x)) = A+B (2) lim (f(x) g(x)) = AB (2) lim (f(x) g(x)) = AB (3) lim (f(x) g(x)) = AB (4) lim (f(x) g(x)) = AB (5) lim (f(x) g(x)) = AB (6) lim (f(x) g(x)) = AB (7) lim (f(x) g(x)) = AB (8) lim (f(x) g(x)) = AB (9) lim (f(x) g(x)) = AB (1) lim (f(x) g(x)) = AB (2) lim (f(x) g(x)) = AB (3) lim (f(x) g(x)) = AB (4) lim (f(x) g(x)) = AB (5) lim (f(x) g(x)) = AB (6) lim (f(x) g(x)) = AB (7) lim (f(x) g(x)) = AB (8) lim (f(x) g(x)) = AB (9) lim (f(x) g(x)) = AB (1) lim (f(x) g(x)) = AB (2) lim (f(x) g(x)) = AB (3) lim (f(x) g(x)) = AB (4) lim (f(x) g(x)) = AB (5) lim (f(x) g(x)) = AB (6) lim (f(x) g(x)) = AB (7) lim (f(x) g(x)) = AB (8) lim (f(x) g(x)) = AB (9) lim (f(x) g(x)) = AB (9) lim (f(x) g(x)) = AB (1) lim (f(x) g(x)) = AB (2) lim (f(x) g(x)) = AB (3) lim (f(x) g(x)) = AB (4) lim (f(x) g(x)) = AB (5) lim (f(x) g(x)) = AB (6) lim (f(x) g(x)) = AB (7) lim (f(x) g(x)) = AB (8) lim (f(x) g(x)) = AB (9) lim (f(x) g(x)) = AB (9) lim (f(x) g(x)) = AB (9) lim (f(x) g(x)) = AB (1) lim (f(x) g(x)) = AB (2) lim (f(x) g(x)) = AB (3) lim (f(x) g(x)) = AB (4) lim (f(x) g(x)) = AB (6) lim (f(x) g(x)) = AB (7) lim (f(x) g(x)) = AB (8) lim (f(x) g(x)) = AB (9) lim (f(x) g(x)) = AB (9	ほとんど、そのままないたつ	
g: I\ fxol→R, lime fox>A, lime gtx)=B とおと>をががけっ (1) lime (fox) + g(x)) = A+B (2) lime (fox) g(x)) = AB (2) lime (fox) g(x)) = AB (3) lime (fox) g(x)) = AB (4) Lime (fox) g(x) = AB (5) Lime (fox) g(x) = AB (6) Lime (fox) g(x) = AB (7) Lime (fox) g(x) = AB (8) Lime (fox) g(x) = AB (9) Lime (fox) g(x) = AB (9) Lime (fox) g(x) = AB (1) Lime (fox) g(x) = AB (2) lime (fox) g(x) = AB (3) Lime (fox) g(x) = AB (4) Lime (fox) g(x) = AB (5) Lime (fox) g(x) = AB (6) Lime (fox) g(x) = AB (7) Lime (fox) g(x) = AB (8) Lime (fox) g(x) = AB (9) Lime (fox) g(x) = AB (1) Lime (fox) g(x) = AB (2) Lime (fox) g(x) = AB (3) Lime (fox) g(x) = AB (4) Lime (fox) g(x) = AB (5) Lime (fox) g(x) = AB (6) Lime (fox) g(x) = AB (7) Lime (fox) g(x) = AB (8) Lime (fox) g(x) = AB (9) Lime (fox) g(x) = AB (9) Lime (fox) g(x) = AB (9) Lime (fox) g(x) = AB (1) Lime (fox) g(x) = AB (2) Lime (fox) g(x) = AB (3) Lime (fox) g(x) = AB (4) Lime (fox) g(x) = AB (6) Lime (fox) g(x) = AB (7) Lime (fox) g(x) = AB (8) Lime (fox) g(x) = AB (9) Lime (f	定理2.5	
とするとったががほう (1) 元((x)+分(x)) = A+B (2) lim (f(x)+分(x)) = AB (2) lim (f(x)分(x)) = AB (3) lim (f(x)分(x)) = AB (4) にないの料(定条件) [im fox)が 存在 (4) とこっに対けて、うちっのいた。 マスペ(で) ない。 (5) に対けて (5) に対けて (5) に対けて (5) に対けて (5) に対けて (6) に対けて (7) に対けて ($I = (a.b) \subset \mathbb{R}, x \in I, f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$	
(1) zlmx(f(x)+分(x)) = A+B (2) lim (f(x)分(x)) = AB 面 定理2.6 (Cauchyの料定条件) I=(a.b)CR, x。eI, f:I\(x)→R, lim f(x)が存在 (ラ) とこっに対して、うち>0 s.t. をx,x'をI\(x) 同値 に対して 0<(x-x)(<を, o<(x'-x)(<を) 一分(2.り) lim sinx = 1		3
(2) lim (fix) g(x)) = AB 面 定理2.6 (Cenchyの料度条件) I=(a,b)CR, x,eI, f:I\fx,f→R, [im fox)が 存在 (今) そこっに対けて、35>0 s.t. が、次でI\fx,f [im fox)が 存在 (つくはへx。1<5、0<1x-x。1<5 -> f(x)-f(x') <8 [im sinx - 1]		
定理2.6 (Cauchyの判定条件) $I = (a,b) \subset \mathbb{R}, x_0 \in I, f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R},$ $\lim_{x \to \infty} f(x_0) \text{ が 存在}$ $(a) \forall \epsilon > 0 \text{ foc}) \text{ が 存在}$ $(a) \forall \epsilon > 0 \text{ foc}) \text{ が 存在}$ $(a) \forall \epsilon > 0 \text{ foc}) \text{ foc}) \text{ foc}) \text{ foc}) \text{ foc}) \text{ foc})$ $ \text{ foc} \text{ foc} \text{ foc} \text{ foc}) \text{ foc} \text{ foc}) \text{ foc} \text{ foc}) \text{ foc} \text{ foc}) \text{ foc} \text{ foc} $		
I=(a,b)CR, $x_0 \in I$, $f:I\setminus\{x_0\} \rightarrow R$, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq f(x_n$	(2) lim (fix) g(x)) = AB	20
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{1}{12}$	The state of the s	
(a) $\forall \epsilon > 0 = \pm 1/2$. $\Rightarrow \delta > 0 \text{ s.t.} \forall x, x' \in I \setminus \{x_0\}$ (b) $\forall \epsilon > 0 = \pm 1/2$. $\Rightarrow 0 < x - x_0 < \delta$ (c) $\Rightarrow f(x) - f(x') < \epsilon$. (d) $\Rightarrow f(x) - f(x') < \epsilon$. (e) $\Rightarrow f(x) - f(x') < \epsilon$.		
$0 < x - x_0 < \delta, 0 < x' - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) - f(x') < \epsilon.$ $ f(x) = 1$ $ f(x) = 1$	lim foc)が存在	
$0 < x - x_0 < \varepsilon, 0 < x' - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) - f(x') < \varepsilon.$ $ 3 2.1 $ $\lim_{x \to \infty} \sin x = 1$	(2) AE20 1= #415. 220 24. AXX, EI/ 1X	6
$= \int f(x) - f(x') < \epsilon.$ $\sqrt{3}(2.7)$ $\lim_{x \to \infty} \sin x = 1$		
$\frac{1312.7}{\lim \sin x} = 1$		
1312.7 lim sinx - 1		
lim sinx - 1		
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	4	
7.70 7.	lim sinx - 1	
	1.30 1.20	

1	正明の方針
	を図より O· <x(音, <="" b="" td=""></x(音,>
	1=4-113
	AB = AB = AT
	てあり
	AB = V2-2 cosx (*:余弦定理)
	= 2-2(1-2sin²至) (二倍角公式)
	$= 2 \sin \frac{x}{2}$
	AB = x (::ラニアンの性質)
	AT = ton x
	71)
	tenx 5 x 5 2 sing
	だかう
	$\frac{\sin x}{\tan x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{\sin x}{2\sin \frac{x}{2}}$
	$tanx = x = 2sin\frac{x}{2}$
	となる。後、て信角公式より
	$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos \frac{x}{2} \qquad (*)$
	が得られ、同様に一至くなくひのと
	きはりが得られるのでスつのとすると、
	$\cos x \rightarrow 1$, $\cos \frac{x}{2} \rightarrow 1$ $\Rightarrow 1 \Rightarrow $
	の原理より
	Im sinx = Etij
	200 x 2 2 5 3 [

〈片側 極限〉 ×→xo をもからかつけるか? ーから近づけるか? でまたがかめることがあった、どう定式化なか? 定義2.5 (片側 本動化) I=(a.b) C R, xo e I, f=I \ (xo) → R, の fが x → xo + o (またはx ↓ xo) のとき。 A ∈ R に 収束する。 (声) と>0 に対けて る>0 s.t. をE \ (xo) 定義 に対けて のく x - xo < る ⇒ (f(x) - A) (< を このとき xim to f(x) = Aとが fa) → A (x → xo + o) とか (x → xo + o のかわりに x ↓ xo とかいてきょい) の fが x → xo - o (まをは x ↑ xo) のとき。 A ∈ R に 収束する。
できたがかわることがあった。どう定式化なか? 定義2.5 (片倒川福隆) I=(a.b)CR, x。 eI, f:I\(x_1 → R, の f が x → x。 + o (またはx ↓ x。) のとき. A eR に 以来する。 (二) * を>o (= 女はいできる>o s.t. * x eI\(x_6) を
定義2.5 (片倒り極慢) $I=(a.b) \subset \mathbb{R}, x_0 \in I, f:I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R},$ の f が $x \to x_0 + 0$ (または $x \downarrow x_0$) のとき. A $\in \mathbb{R}$ 1: $\forall x \neq T_3$. (=) $\forall \xi > 0$ (= $\forall x \downarrow 1 \cdot 1^{-3} \delta > 0$ s.t. $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$) 定義 1: $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ で義 1: $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ で表 1: $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ で表 1: $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ である。
I=(a.b)CR, x。 EI, f:I\[x_6] → R, の f が x → x。 + o (または x ↓ x。) のとき. A ∈ R 1= 以来する. (=) ∀ を>o 1=女はて 3 5 > o s.t. ∀x ∈ I\[x_6] 定義 1=女はて O < x - x。 < る ⇒ f(x) - A < を このとき、 lim f(x) = A とが fa) → A (x → x + o) とか (x → x + o のか か) に x ↓ x。 とかいてもよい) の f が x → x。 - o (まをは x ↑ x。) のとき. A ∈ R に 以来する.
I=(a.b)CR, x。 EI, f:I\[x_6] → R, の f が x → x。 + o (または x ↓ x。) のとき. A ∈ R 1= 以来する. (=) ∀ を>o 1= 対はて 3 5 > o s.t. ∀x ∈ I\[x_6] 定義 1= 対して O < x - x。 < る ⇒ f(x) - A < を このとき. lim f(x) = A とが fa) → A (x → x + o) とか (x → x + o のか か) に x ↓ x。 とかいてもよい) の f が x → x。 - o (まをは x ↑ x。) のとき. A ∈ R に 以来する.
$A \in \mathbb{R} = 42 = 73$. (二) $\forall \xi > 0 = 2 \neq 1 = 2 \neq 1 = 3 \neq 0 = 3 \neq 1 = 2 \neq 1 = 3 \neq 1$
$A \in \mathbb{R}$ 12 以来する。 (二) $\forall \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ $
定義 1-女(て O < x-xo < る => (f(x)-: A) (< を) このとき lim f(x)= A とがf(x)→A (x→xo+o) とか((x→xo+o のかわりに x し xo とかいてもよい) の fが x → xo-o (まをは x 个xo) のとき AERに 収束する
定義 1-女(て O < x-xo < る => (f(x)-: A) (< を) このとき lim f(x)= A とがf(x)→A (x→xo+o) とか((x→xo+o のかわりに x し xo とかいてもよい) の 千が x → xo-o (まをは x 个xo) のとき AERに 収率する
このとき xing f(x)= Aとがfx)→A (x->x+++) とかく(x->x+++ のかかりに x しxoとかいてもよい) の fが x-> x。- の (まをは x 个x。) のとき AERにりまする。
このとき xing f(x)= Aとがfx)→A (x->x+++) とかく(x->x+++ のかかりに x しxoとかいてもよい) の fが x-> x。- の (まをは x 个x。) のとき AERにりまする。
とかく(スーメのもののかわりに又しなっとかいてもよい)の 千がスーンス。-の (まをはスイス。)のとき AERに収集する。
AERIC 収束する
AERIC 収束する
E) You what 230 With 1111
たとうのに対してるらって、ナンダモIr (xo)に対すい
0
このとき、lim fox)=Aとかfox)-A (スース。-0)
とかく(メース。一〇のかわりに次个々。とかいてもよい)
D
〈無限大での核學と〉
流をかんたんにするために。f:R→R=7117
のみをひっ

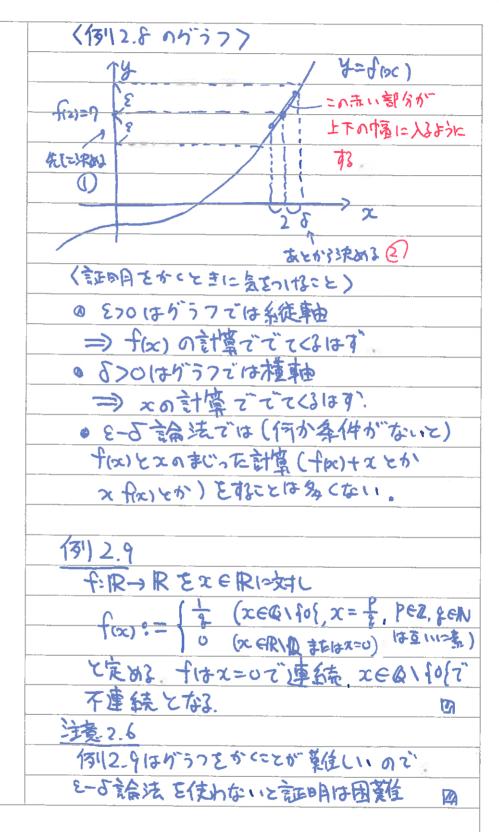
定義2.6(智限大での程限)
f: R→ R とする.
のfがス→のでAERに収まする。
(ラ) りを20 はないでは、K20 S.t. boceR1はないて
職 x>K ⇒ Ifox)-A < E.
= 1 = lim f(x) = A x to f(x) + A (x+00)
\th\c.
offix→-∞でAERに収束する
今)がE2013対けるK205.t. YxeRis対けて
障截 α <- k ⇒ lf(α)-A1<€.
= 1 lim f(x) = A Eff(x) -> A (x -> -∞)
とかく。
> 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
無限大に発散的場合の定義も同様に
できる。名自考えよの
§2.3 連続関散
関数が連続であるとは、感覚的には.
グラフがつながらていることであった。これを
じう定式化机はよいか考しる。
定義2.7 (関数の連続性)
ICR, f:I→R.
のfがx。∈Iで連続
(⇒ ∀€>01=\$412 =35>0 5.1. ∀x €I 1=\$412
$ x-x_0 <\delta \Rightarrow f(x)-f(x_0) <\epsilon$

€ 千が、工上連続	
(⇒) ∀xo∈I 1⇒対にてfはxoで連続	
(R.A.)	77
今題2.1	
I=(a.b) CR, f: I-> R, x. EI	
fがxoで連続 (lim f(x) =frxo)	
	<u>n</u>
FERRIC Web 11-1	
何2.8	
f=R→RをXER 1=女(f(x):=x3-1	
で定義する。このとき、fはx=2で連続となる	
高正 B 月	•1
1. 4を201=女にて、定義のよ20をみつける	
ためにあとでシャのる。YouelRに対して	
1x-21 ~ を1を変なと	
$ f_{00}-f_{02} = (x^3-1)-(2^3-1) $	
$= \chi^3-8 $	
$= (x-2)(x^2+2x+4) $	
$= x-2 (x-2)^2+6x $	
$= x-2 (x-2)^{\frac{2}{7}} 6(x-2) + 2 $	
$\leq \chi-2 (\chi-2 ^2 + 6 \chi-2 + 12)$	
(~:=)杯字式)	
	c 1
< 5(5765+12) (" x-2 <	
55(H6+12) ([5≤] 246	走
=198	



2\$3. 198≤E) tanti
If(x)-f(2) 1 < 196 5 8
となる。1955をもちについて角にと
おと、声となる。この考察をもとに
强产的月至为°C.
2. 46>0 1>女は 5:=min (を 11>0 と
まく、 る三島、 る三1となることに注意な
YzeRに対して、 1x-21くるならば、
$ f_{6c} - f_{(2)} = x-2 (x-2)^{2} + 6(x-2) + 2 $
$\leq x-2 (x-2 ^2+6 x-2 + 2)$
(兰》解学式)
< 8(8768+12) (-1/x-2)<
≤ 195 (2:8≤1
(3) 28:3 \(\frac{3}{2}\) \(\frac{3}{2}\)
となるので午は火ニンで堕発となる
0.4001C [[FX=2 C B 4R C 143
>接2.5
意画を行ったけなら上の2.のみでよいが
かをどうたってとったかがわかるよう121. も
+ 3 10° 1 121 14+1 1
看いたろか。hかりですい 面







くE-N論法やE-S論法: 感覚と厳密)
(lim fix)=Aの度量)
スがス。に近づくとfa)がAに近づく。
承3 こと
「近づく」は人によっておまてな感覚
(lim fal=Aの厳密な取り扱い)
「fx)はAに近つ、<」
→ 誤差 fx)-A が E>O より
小さくなるように先による。
「文がて。に近づく」
-> 0< x-x0 1 < 5 ts > + 0
(誤差) <と となるように
ようのを あとから決める。



く連続関数の性質>
定義28 (関勢の和, スカラー倍)
ICR, f: I > R, g: I - R, A = R 12
文中しか「十月: エーカア、スカラー信入子: エートア
積fg: I→REをれるれてEIIc女は
(f+g)(x) := f(x) + g(x)
$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$
(fg)(x) := f(x)g(x)
で定義な。
定義 2.9 (関数の合成)
f:R→R, g:R→Rに対し、関数の
合成 gof: R→Rを XERIC大さし
$3 \circ f(\infty) := 2(f(\infty))$
7"定義羽。
定理2.7
(簡単のため) f: R→R, g: R→Rとする。
(1) f, g が xo eR で 連続
=> A CIRICATU, ftg, Af, fg &
2) f, gがR上連続
(2) f, gがR上連続
=> すってもR上連続

証明 (1)は演習 (2) と示す。
YxoeR に対し、gofがxoで連続と
なることを示す、そとついく文寸し、まかで
y。=fox。)で連続なので
35, >0 s.t. Atekickt
14-fmo)/<5, => g(y)-g(fmo))/<8
とできる。これに、このかつのはは、千かい
x。で連続なので 35 >0 s.t.
YXER ISX+L
1x-x0/<5=> 1fix)-fix0/<5,
とできる。よって、上のよとして生まれ
とすれば、サスチに対しノスース。してらなるは、
12(f(x)) - 2(f(x)) < E,
つまり
190f(x)-gof(x.) < 8
となる。従ってまってはつてって連系をとなる。
XoeRは任意だったから、gofはR上連続
27x3.
§§2.4 閉区間上の連続関数
I=[a,b] CR上の連続関数fi[a,b]→R
には重要な一性質がある。
定理2.8(中間値の定理)
f: [a.b]→ R は連続, fra) < f(b)
=> YE & [fla), f(b)] 1= total 3 20 & [a,b]
$S.t. f(x_0) = C$

中間値の定理を	Y=fix)	
グラフでいうと、 f(b)		
YCE [f(a), f(b)] 15 4=c		
対けて直続なってくり		
1777 4=f(x) 17 (f(a)		
まじわるということ、	a xo b x	
其vc涞		
	交点がみつかる(2)	
	(-7とは限うない)	
	y=f(x)	
4ce[fla), flb] flb)-		
१०१८, ४००		
E = {x \in \text{[a,b]} = \frac{1}{2} \text{[x \cdot \text{]}}		
とかく(を図参照). かね)		
Xo=Sup E	at Tib x	
となくと、 [9.6] かい	70	
閉区間FI) X。 E[a,b] と		
レスト、fixo)=cとなる	とを示す。	
1. f(x0) ≤ CE7-7.		
$\exists \{x_n x_n \in E \text{ s.t. } x_n \to x_o (n \to \infty) \}$		
とできる。「FMEN に対してXMEE」		
まりf(xn) s c であり、fは[a,b]		
上連続だから、ハナのとなと		
f(x0) ≤ C と tu3.		



2. f(x0) 2 C 表示 す. YneN (文寸し.	
$\frac{\chi_n':=\chi_0+\frac{b-\chi_0}{n}}{\chi_n':=\chi_0+\frac{b-\chi_0}{n}}$	
n n	
え。くながるとなる。 6-20~	
$x_0 < x_n \le b \ge t \le 3$. $(t \boxtimes)$, $x_0 = \sup E$ $x_0 = x_n$	<u></u>
より xn を 目 だから	<i>U</i>
f(xが)>cとなる。	
n→∞とするとfはI上連続かつ。	
スルース。 (いつの) だから f(xo) 2 C	
と存る。	
1. 2. より f(な)=c となる.	_
7 ((3) 3)	
13112.10	
f: [0.1]→Rは連続で「Vxe[0.1]1	
まってってった。」というでする。	6
このとき、方程式fx)=xはCo.D.	<u> </u>
に削を持つ	
	
हेEBA	
F:[0.1]→RをxE[0.1] に対すし	
F(x) := f(x) - x	
と定めると、FはCO、ワ上連続であり、	
$F(0) = f(0) - 0 \ge 0 - 0 = 0$ (-: $f(0) \ge$	
F(1) = f(1)-1 < 1-1 = 0 (=fa) <	
フまり F(0) < 0 < F(1) となるので 中間値 (
定理から→x。∈[0.1] s.t. F(x。)=0となる	
100000000000000000000000000000000000000	<u> </u>

注美.2.0	
[a,b)を閉区間にはいて訂	45£ A "TAGE
は、な。そしの、しつとなるかどうか	1? 7° \$3 170
	a ona ma
定理2.9 (Weierstrassの定理	1
f: [a,b] -> Rが連続)
	0 0 \$11
=) 于は最大値、最小値をも	
supfix):=supff(x):xe[a	
	xe[a,b]
$\inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$	
が、放り支フ	
	fix)
グラフでいうと、 supfext	A
かうつの一番高いところと なきない	10
一番任いて=3かるということが行るし	
	a b X
[a,b)を(a,b)にかえな イチ	efix)
をのグラフかう最大値。	a
最小値がないことが	
并往溴川で生3。	
	D 2
C	<u> </u>



EEPA
最大値の存在されず、
1. 以来的近似到它作3. M:= Sup f(x)
XELAN
Ex-cz. = (xuln= C[a,b]s.t.
$f(x_n) \rightarrow M$ $(n\rightarrow \infty) \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ $
1ま有界引なので Bolzano-Weierstrassの
定理于)収集部分引于Xn上1001(介Xn1001
が存在する。
2. lim Xng = x0 6t- (1 f(x0) = M
となることを示す。「Xne(ex)(C[a,b]
F1), x0 ∈ [a,b] × \$13. +1" [a,b]
上連続だから
$f(x_{n}) \rightarrow f(x_0) (k \rightarrow \infty)$
となる。他方
$f(x_{ne}) \rightarrow M (\cancel{\xi} + \infty)$
だったかう、M=f(xo)となる。よって
M=supf(x)は最大値となる。

〈一棋連絲性〉
ICR 1文計し十、コッRが連続のは、
一般に定奏でとれるら>0はx。EIで
異なる.
行[2.1]
f:R→RをxeRic女しfx):=x2
で定めると干は水上連続となる。
Xo ER ド文サレ、 E-5論法の 5>0が、
どうかわるかみてみよう。
YE20に女もし、820をあてで決める。
YxeRに対けし x-x。 くるを仮定すると
$ f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 $
$= (x-x_0)(x+x_0) $
$= x-x_0 x-x_0+2x_0 $
$\leq x-x_0 (x-x_0 +2 x_0)$
(三)种学式)
$<\delta(\delta+2 x_{0})$
$(1/2) x-x < \delta$
≤&(+2 x₀)
(((金) 至何定)
kti3. δ(1+21x01)≤ε κtin1ti
$ f(x)-f(x_0) <\delta(+2 x_0)\leq \varepsilon$
xt53.



もく(1+21261) ミモモらについて解くと	
るミ (+2 xol となる。4たって	
S:= min { E E ENIX;	
よいがしなるしが大きいとるはいくうでも	
小さくなってしまうことがわかる。つまり	
1xol-> 00 1+2 xol	
1xol-> 00 1+21xol	
がわかる。	
1912.12 f:RoRをxeRに対しfix):=xと	
定路と、十はR上連続となる。2。日内に	
女中し、とろ言念法のようのかどうなるかりてみ	_1
サミンロに女子し おこのをあとできためる。	- ?.
YxelRに対し、1x-x。1くるを何定すると	
$ f(x)-f(x_0) = x-x_0 $	
\[\zerightarrow \tau \tau \tau \tau \tau \tau \tau \tau	<u> </u>
となるから、包ェモスかいは、	<u> </u>
1fx)-fx, 1<8≤ E	
となる。作ってもこととればよいが	
xueRがどの値であってもおは小さく	
+12+ 1121 412	
(4)(ないくことが、内から。	



1912.11,1912.12からR上連続といったは
違いがあることがわかる。何12.12の性質を
定式化してみる
定義2.10 (一樣連続)
ICRに対し、やエコアがエトー村。連続
(a) 4 8 20 10 pt 2 200 pt
★* サス,x' ∈ I 1=女+して
$ x-x' <\delta \Rightarrow f(x)-f(x') <\epsilon$
12 2110 71101 101112
131(2.13
(312 10 0 FH D h + + + + + + + + + + + + + + + + + +
1912、1201下131K上一个科里和地である。
FETOR
AESO (241) Q:= ESO 253°
サス、水(をR に対し 1x-x1くるならは)
f(x)-f(x') = x-x'
< 8 (= 1x-x'1<8
3 =
となるので千はR上一様連続である。 L
注意-2.8
一様連続の定義のようのもみかけるため
には何12、12の計算が必要である 四

一般に一様連続かどうかを定義に従って
示すのは葉佳しい。しか、次の強な定理がある。
定理2.10
f:[a,b]→Rが[a,b]上連続
马fはCabD上一樣連続 四
注意-2.9
定理2.10は有界、閉区間であることが
重要。開区間では放り立たない
定理2.10の証明(代数)
松理法で示す、つまり、十か「Ca.b]上で
一様連続でないと仮定する。
1. ナが「Ca、b)上一様連続でないにとと
論理記号でかくと
[3 €. 70 5.t. \$5>0 1=\$\$\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau\tau
S.t. 125-25/1<8 000 H(xs)-f(xs)/2801
-(x)
が成り立つ。
で定 ヨ→サ、サ→ヨ P⇒シタ → Pかってなでない」
P=> & -> Pho &itu
2. 4neかに対し、でニーかととりはを用いると
$\exists x_n, x_n \in [a,b] \text{ s.t.} x_n - x_n < \frac{1}{n}$
An, anelying J. C [An an] of
かつ チはかーチはか ことできる。

2 12 180 0 12 12 10 20 12 12 12	
3. xn/mi C [a,b]は有界がだから	
Bol zano- Weierstrassの定理をり 収束部分引	
「Xng B=1 C「Xn min が存在する。	
$\chi_{n_k} \rightarrow \chi_o (k \rightarrow \infty) \times 73 \times, \chi_o \in [a,b]$	
7 3.	
12ng - x0 = 12ng - 2ng + 12ng - x01	
$\leq \frac{1}{h_B} + x_{n_B} - x_o $	
-) O (\$-700)	
у Ср. 700 /	
とはるから、 2(10) かかる。	
4. fは [a,b]上連続だから	
$f(x_{n_{R}}) \rightarrow f(x_{0}), f(x_{n_{R}}) \rightarrow f(x_{0})$	
(fe -> 00)	
となる、代方(*) +1) f(xng)-f(xng) 28。	
となるから、た十のとすれは"	
$\varepsilon_0 \leq f(x_0) - f(x_0) = 0$	
となり、そのですったことに矛盾する口	
注度.2.(0	
定理2.9は (19年後)	
在国的条件结合的	
の面積が(素料な	
意味で)決まること ////	
と示すのに使う なりな	
(後期ででる)	