微分積分学 A 演習問題 (2015 年 4 月 16 日)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束するとは, $|a_n - a|$ が n を大きくすると 0 に近づくことである. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と書くことにする.

例 1.1.
$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 2 に収束する.

証明.

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| &= \left|\frac{2(n+1)-2}{n+1} - 2\right| \\ &= \left|2 - \frac{-2}{n+1} - 2\right| = \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

となり, n を大きくすると, $\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right|$ は 0 に近づく. □

注意 1.1.
高校でやったような

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{2}{1} = 2$$

としないこと.

問題 1.1.
自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, 証明を与えよ.

問題 1.2.
自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n-2}{2n+3}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, 証明を与えよ.

問題 1.3 (講義ノート 例 1.3)**.**
$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ を証明せよ.

問題 1.4.
次の各問いに答えよ.

(1) -2 を与える有理数の切断を求めよ.
(2) $\sqrt{5}$ を与える有理数の切断を求めよ.

問題 1.5.
x, y を実数とする.

(1) $|x+y| \leq |x| + |y|$ を示せ. なお, この不等式を**三角不等式**という (ヒント: (左辺)^2 − (右辺)^2 を考える. (左辺), (右辺) ≥ 0 はどこに書くのが適切か？).
(2) $||x| - |y|| \leq |x-y|$ を示せ (ヒント: $|x| = |x-y+y|$, $|y| = |y-x+x|$ を用いる).

問題 1.6.

$x > 0$ とする. すべての自然数 n について

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

問題 1.7.

自然数 n に対して, $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ とおく. このとき $h_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$ を示せ (ヒント: $1 + h_n = \sqrt[n]{n}$ と問題 1.6).

問題 1.8.

自然数 n に対して $a_n := \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ となることの証明を与えよ.

問題 1.9.

実数 $0 < r < 1$ と自然数 n に対して $a_n := r^n$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることの証明を与えよ (ヒント: $x := r^{-1} - 1$, すなわち $r^{-1} = 1 + x$ とおいて, 問題 1.6 を用いる).

微分積分学 A 演習問題　(2015 年 4 月 23 日)

問題 2.1 (講義ノート 例. 1.14)**.**
$\inf[0,1)$ を求め, その証明を与えよ. なお, 講義の例 1.14 のように, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 2.2.
$\sup(-2,1)$ を求め, その証明を与えよ. なお, 講義の例 1.14 のように, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 2.3.
$\inf(-2,1)$ を求め, その証明を与えよ. なお, 講義の例 1.14 のように, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 2.4.
$A := \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ とおく. $\sup A$ を求め, その証明を与えよ. また, $\max A$ が存在するかどうか答えよ (ヒント: 講義の例 1.14 のように, 中点を取るというアイデアはうまくいかない. Archimedes の原理を使う必要があるが, どのように記述すればよいか?).

問題 2.5.
問題 2.4 の A について, $\inf A$ を求め, その証明を与えよ. また, $\min A$ が存在するかどうか答えよ.

問題 2.6 (講義ノート 注意 1.4)**.**
$A := \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ と定める. $\sup A = \sqrt{2}$ となることの証明を与えよ. なお, 証明には, 有理数の稠密性を用いる. このことにより, 有理数の部分集合の上限が有理数にならないことがある.

問題 2.7.
$A \subset \mathbb{R}$ とする. $\alpha = \max A$ が存在するとき, $\alpha = \sup A$ となることを示せ.

問題 2.8.
$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := 1 - \dfrac{1}{n}$ とおく.

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加である, すなわち, 「$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$」となることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めて, 証明を与えよ.

問題 2.9.
問題 2.8 の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

と書く. $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を求めて, 証明を与えよ.

問題 2.10 (吹田・新保 p.31)**.**
次の集合の上限, 下限を求めよ (答えのみでよい).

(1) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

(2) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < x + 1\}$

微分積分学 A 演習問題　(2015 年 4 月 30 日)

問題 3.1.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 3.2.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n-2}{2n+3}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 3.3.

自然数 n に対して $a_n := \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ となることの証明を ε-N 論法を用いて証明せよ. (ヒント: アイデアは問題 1.8)

問題 3.4.

実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = r^n$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを, ε-N 論法を用いて証明せよ. ただし, log を使わずに証明すること (ヒント: アイデアは問題 1.9)

問題 3.5.

実数 $r > 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = r^n$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ となることを, ε-N 論法を用いて証明せよ. ただし, log を使わずに証明すること (ヒント: $r = 1 + x$ と書きかえてから問題 3.4 と同じような計算をする).

問題 3.6.

自然数 n に対して $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ とおく.

(1) すべての n について, $a_n < b_n$ であることを示せ.
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ. ただし, ε-N 論法を用いなくてよい.
(3) 定理 1.5 の (3) は二つの不等号 $\leq$ を $<$ にかえてはいけないことを説明せよ.

問題 3.7 (等比級数: 収束する場合)**.**

実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$ とおく.

(1) a_n を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ を用いずに表せ (注意:**わからない人は高校の復習をすること!!!**)
(2) a_n が収束することを示せ. なお, ε-N 論法を用いなくてよい.

問題 3.8 (等比級数: 発散する場合)**.**

実数 $r \geq 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$ とおく.

(1) a_n を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ を用いずに表せ ($r = 1$ と $r > 1$ の二通りについて場合わけして考えよ).
(2) a_n が正の無限大に発散することを示せ. なお, ε-N 論法を用いなくてよい.

微分積分学 A 演習問題　(2015 年 5 月 14 日)

問題 4.1.

次の極限値を求めよ. ただし, ε-N 論法を用いなくてもよい.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}-3^n}{4^n+3^n}$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^n-4^n}{3^n}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(9) $2-3+\dfrac{9}{2}-\cdots$ となる無限等比級数

(10) $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-4)+\cdots$ となる無限等比級数

問題 4.2.

$a, b>0$ に対して, 極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ を求めよ.

問題 4.3.

$x\in\mathbb{R}$ に対して, 極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}-e^{-nx})}{e^{nx}+e^{-nx}}$ を求めよ.

問題 4.4.

次の極限を求め, ε-N 論法を用いて証明を与えよ.

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ (ヒント: $x>0$ に対して $\sqrt{1+x}\le 1+x$ である)

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ (ヒント: $n\in\mathbb{N}$ に対して $n\le n^2$ である)

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ (ヒント: $n\in\mathbb{N}$ に対して $|\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)|\le 1$ である)

問題 4.5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束したとする. このとき $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ を ε-N 論法を用いて証明せよ (ヒント: 問題 1.5 の (2) を使う).

問題 4.6.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a\in\mathbb{R}$ に収束するとする. すなわち $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ が成り立つとする. このとき, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ となることを ε-N 論法を用いて証明せよ.

問題 4.7.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a - b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 4.8.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

を ε-N 論法を用いて示せ.

問題 4.9.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする.

(1) $(a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + a(b_n - b)$ を計算せよ.

(2) 数列 $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ab に収束することを ε-N 論法を用いて示せ. なお, 収束する数列は有界であることは用いずに示してみよ.

微分積分学 A 演習問題　(2015 年 5 月 21 日)

問題 5.1 (解析演習 p.12)**.**
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ とおく. このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ を示せ.

問題 5.2.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界かつ単調減少となるならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

となることを示せ.

問題 5.3 (優収束定理)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_n|$ とおく.

(1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加となることを示せ.

(2) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \le b_n$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_n < \infty$ をみたすとする. このとき $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ.

問題 5.4.
$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ とおく. 1 に収束する $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束部分列と, -1 に収束する $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束部分列をそれぞれ作れ.

問題 5.5.
$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := \sin\left(\dfrac{n}{4}\pi\right)$ とおく. 収束先の異なる収束部分列を 4 つ作れ.

問題 5.6.
$\inf(-1, 2)$ を求め, その証明を与えよ.

問題 5.7.
$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := 2 - \dfrac{1}{n}$ とおく. $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を求めて, その証明を与えよ.

問題 5.8.
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{4n+3}$ を求めて, ε-N 論法を用いて証明を与えよ.

問題 5.9.
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ を求めて, ε-N 論法を用いて証明を与えよ. ただし, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(1+x)^n \ge 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

は証明抜きに用いてよい.

微分積分学 A 演習問題　(2015 年 5 月 28 日)

中間試験では, 有界や上限, 下限, 数列の収束, 単調増加, 単調減少, 自然対数の底, Cauchy 列の定義や「実数の連続性」, 「Archimedes の原理」, 「有界な単調数列の収束性」, 「Borzano-Weierstrass の定理」, 「実数の完備性」に関する定理の主張を聞く問題も出すつもりでいるので, 過去問をみるなどして準備をしておくこと.

問題 6.1.

数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることを定義に基づいて示せ. ただし, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを用いずに示せ.

問題 6.2.

$r, q, x \in \mathbb{R}$, $r \neq \pm 1$ に対して, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + q \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を求めよ.
(2) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を調べることで, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための r に関する条件を求めよ. ただし, 縮小写像の原理は用いないこと.
(3) 縮小写像の原理を用いて, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための r に関する条件を求めよ.

問題 6.3.

$A > 1$ に対して漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n + A} \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

を考える. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ. 余裕があれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための A の十分条件を求めよ.

問題 6.4.

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

をみたすとする. このとき, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

により定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

問題 6.5.

$0 < r < 1$, $k > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := n^k r^n$ とおく.

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ.
(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ となる $n \in \mathbb{N}$ の条件を求めよ.
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ.

問題 6.6.

$r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \dfrac{r^n}{n!}$ とおく.

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ となる $n \in \mathbb{N}$ の条件を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ.

問題 6.7.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $S \in \mathbb{R}$ に収束するとき, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に収束するという.

(1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を, S_n を使わずに a_n を用いて書け.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ.

問題 6.8.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ.

微分積分学 A 演習問題　(2015 年 6 月 11 日)

問題 7.1.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^2$ で定義する.

(1) 像 $f([-1, 2])$ を求めよ.

(2) 任意の $x_1, x_2 > 0$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ となることを示せ.

問題 7.2.

次を求めよ.

(1) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\arctan(1)$

(4) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)\right)$

問題 7.3.

指数法則と逆関数の性質を用いて, 「任意の $a, b > 0$ に対して $\log(ab) = \log a + \log b$ を示せ.

問題 7.4.

$a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $a^x := \exp(x \log a)$ と**定義する**. 任意の $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $(ab)^x = a^x b^x$ となることを, 定義に基づいて示せ.

問題 7.5.

Euler の公式と指数法則を認めて, 次を示せ.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\sin(-x) = -\sin x$

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\cos(-x) = \cos x$

注意.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**奇関数**であるとは「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(-x) = -f(x)$」, **偶関数**であるとは「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(-x) = f(x)$」となることをいうのであった.

問題 7.6.

任意の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, ある奇関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とある偶関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して, $f = g + h$ と書けることを示せ (ヒント: 書けるとしたらどうなるか？).

問題 7.7.

Euler の公式と指数法則をみとめて, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して加法定理

$$\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

を示せ.

問題 7.8.

$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\cosh x}{\sinh x},$$

と定義する. $\cos(hx)$ とは違うことに注意せよ. これらの関数を**双曲線関数**という. $\cosh^2 x - \sinh^2 x$ を計算せよ.

問題 7.9.

すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, 双曲線関数に対する加法定理

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

を示せ.

微分積分学 A 演習問題　(2015 年 6 月 25 日)

問題 8.1.

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ を求めよ.

問題 8.2.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(bx)}{\sin(ax)}$ を求めよ.

問題 8.3.

$\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}}$ を求めよ.

問題 8.4.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 8.5.

$\displaystyle\lim_{x \to -1} x^2$ を求め ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

以下の問題では $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ とおく.

問題 8.6.

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |A|$ となることを ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 8.7.

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$ となることを ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 8.8.

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = AB$ となることを ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 8.9.

$A > 0$ とする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ に対して

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > \frac{A}{2}$$

とできることを示せ.

微分積分学 A 演習問題　　(2015 年 7 月 2 日)

問題 9.1.

$\displaystyle\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{x+1}$, $\displaystyle\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{x+1}$ を求めよ.

問題 9.2.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ の ε-δ 論法による定義を書け.

問題 9.3.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=2x^3+1$ で定義する. f が $x=-1$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 9.4.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して, $f:I\to\mathbb{R}$ が $x_0\in I$ で**右連続**であるとは

$$f(x)\to f(x_0)\quad (x\to x_0+0)$$

と教科書に書かれている. ε-δ 論法による定義を書け.

問題 9.5.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続ならば, $|f|:I\to\mathbb{R}$ も I 上連続であることを示せ. なお, 任意の $x\in I$ に対して, $|f|(x):=|f(x)|$ で定義する.

問題 9.6.

$a,b\in\mathbb{R}$ に対して

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2},\quad \min\{a,b\}=\frac{a+b-|a-b|}{2}$$

を示せ.

問題 9.7.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$, $g:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続であれば, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ も連続になることを示せ. なお, $x\in I$ に対して

$$\max\{f,g\}(x):=\max\{f(x),g(x)\},\quad \min\{f,g\}(x):=\min\{f(x),g(x)\}$$

と定義する.

問題 9.8.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$, $g:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続であるとする. 「すべての $x\in I\cap\mathbb{Q}$ に対して $f(x)=g(x)$」が成り立つならば, 「すべての $x\in I$ に対して $f(x)=g(x)$」となることを示せ.

問題 9.9.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が **Lipschitz 連続**, すなわち, ある定数 $L>0$ が存在して, 任意の $x,x'\in(a,b)$ に対して

$$|f(x)-f(x')|\le L|x-x'|$$

をみたすとする. このとき, f は (a,b) 上連続であることを示せ.

微分積分学 A 演習問題　(2015 年 7 月 9 日)

問題 10.1.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, $f+g$ も $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 10.2.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, 任意の $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して λf は $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 10.3.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, fg も $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 10.4.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=x^3+x-1$ とおく. このとき, $f(x)=0$ となる実数解 $x\in\mathbb{R}$ が存在することを示せ. より詳しく, どの範囲に実数解があるかを述べてみよ.

問題 10.5.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とする. $f(a)f(b)<0$ ならば, $f(x)=0$ となる実数解 $x\in[a,b]$ が存在することを示せ.

問題 10.6.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とするとき

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

となることを示せ.

問題 10.7.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とすると, f の像 $f([a,b])$ が閉区間となることを示せ.

問題 10.8.

$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x):=\frac{1}{x}$$

で定義する.

(1) f が $(0,1)$ 上連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.
(2) f の最大値が存在しないことを説明せよ.

微分積分学 A 演習問題　(2015 年 7 月 9 日)

問題 11.1.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := 3x + 2$ で定める．このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ.

問題 11.2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \sqrt{x^2+1}$ で定める． このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ (ヒント: $x, x' \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{|x+x'|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x'^2+1}} \leq \dfrac{|x|+|x'|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x'^2+1}} \leq 1$ となることを使う).

問題 11.3.

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が **Lipschitz 連続**, すなわち, ある定数 $L > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (a,b)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

をみたすとする．このとき, f は (a,b) 上一様連続であることを示せ.

問題 11.4.

$0 < \alpha < 1$ に対して $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が α **次 Hölder 連続**, すなわち, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (a,b)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|^{\alpha}$$

をみたすとする．このとき, f は (a,b) 上一様連続であることを示せ.

問題 11.5.

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in (0,1)$ に対して $f(x) := \sin \dfrac{1}{x}$ とおく.

(1) $x \in (0,1)$ に対して, 微分 $\dfrac{df}{dx}(x)$ を求めよ.

(2) 導関数 $\dfrac{df}{dx} : (0,1) \to \mathbb{R}$ は有界とならないことを示せ.

注意.

実は「導関数が有界ならば一様連続」が示せる．対偶を取れば「一様連続でなければ, 導関数は有界でない」が得られる．「導関数は有界でない」からといっても, 一様連続にならないことは示せないが (導関数は有界でないが Hölder 連続となることがある), 問題 11.5 では, f が $(0,1)$ 上一様連続にならないことを実際に示すことができる.

微分積分学 A 演習問題 (計算問題など)　(2015 年 7 月 9 日)

問題 12.1 (提出課題)**.**

$I = (a, \infty) \subset \mathbb{R}$ を開区間, $x_0 \in I$, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ を関数, $A \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.

(3) $\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.

(4) $\lim_{x \to x_0-0} f(x) = A$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.

(5) $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.

問題 12.2 (提出課題)**.**

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ とする.

(1) f が $x_0 \in I$ で連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ.

(2) f が I 上連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ.

(3) f が I 上一様連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ.

問題 12.3 (提出課題)**.**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ とする.

(1) 中間値の定理を述べよ.

(2) Weierstrass の定理を述べよ. ただし, sup, inf を用いること.

問題 12.4.

次の性質を持つ関数の例をあげよ (定義域をきちんと明記すること).

(1) $x = 0$ で右連続だが, $x = 0$ で連続でない.

(2) 有界だが最小値が存在しない.

(3) 連続だが一様連続でない.

問題 12.5 (わからない問題については, 高校の教科書を復習すること)**.**

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} \frac{x^2 + x}{|x|}$

(6) $\displaystyle\lim_{x \to 0-0} \frac{x^2 + x}{|x|}$

(7) $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x}$

(9) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x^2 + 5}$

(10) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5}{x + 1}$

(11) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$

(12) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$

(13) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

(14) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$