微分積分学 A 中間試験問題

2016 年 6 月 8 日 第 1 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降について, 2 題以上を選択して答えよ. なお, 必要におうじて $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(*) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$$

を用いてよい.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
- (a) A が上に有界であることの定義を答えよ.
- (b) A の上界のなす集合を A_u と書くとき, $a \in \mathbb{R}$ が A の上限であること, つまり $a = \sup A$ であることの定義を A_u を用いて答えよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
- (a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ の ε-N 論法による定義を答えよ.
- (b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が ∞ に発散すること, すなわち, $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ の ε-N 論法による定義を答えよ.
- (c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調減少であることの定義を答えよ.
- (d) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの ε-N 論法による定義を答えよ.

(3) 有理数と実数の違いに関係する次の定理の主張をそれぞれ答えよ.
- (a) 実数の連続性[1]
- (b) Bolzano-Weierstrass の定理
- (c) 実数の完備性
- (d) Archimedes の原理

(4) 次の集合の下限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.
- (a) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
- (b) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < x + 1\}$
- (c) $\left\{\sin(\sqrt{2}x\pi) : x \in \mathbb{Q}\right\}$

[1] 教科書 (白岩) に述べられている, 実数の切断についての連続性は答えとして認めない. 講義ノートで述べた「実数の連続性」を答えよ.

(5) 次の性質をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例をあげよ.

  (a) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

  (b) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < 1$ となるが, $\lim_{n\to\infty} a_n < 1$ とならない.

(6) 自然対数の底の定義を述べよ.

(7) 次の極限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.

  (a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, ただし, $a > b > 0$ は定数

  (b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

  (c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^n}$

  (d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}$

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$\inf(-2,3) = -2$ を示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\inf(-2,3) = -2$ を示すためには, 「-2 が下界であること」と「-2 が下界の中で最大であること」の二つを示す必要がある. それぞれについて, 論理記号を用いて表せ.

(2) $\inf(-2,3) = -2$ を示せ.

問題 3.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{5n-2}{2n-5}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2}$ を ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2}$ の定義を答えよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2}$ を ε-N 論法を用いて示せ.

問題 4.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a-b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a-b$ に収束することの定義を答えよ.

(2) 数列 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a-b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. 次の 2 条件 (A), (B) を仮定する.

(A) $a > 0$ である.

(B) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n \geq \dfrac{1}{2}a$ となる.

このとき, 数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $\dfrac{b}{a}$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.