微分積分学 A 中間追試験問題

2016 年 6 月 30 日 第 5 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降について, 2 題以上を選択して答えよ. なお, 必要におうじて $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(*) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$$

を用いてよい.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
- (a) A が有界であることの定義を答えよ.
- (b) $a \in \mathbb{R}$ が A の下限であること, すなわち, $a = \inf A$ であることの論理記号を用いた定義を答えよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
- (a) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ の ε-N 論法による定義を答えよ.
- (b) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が $-\infty$ に発散すること, すなわち, $a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ の ε-N 論法による定義を答えよ.
- (c) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が (広義) 単調増加であることの定義を答えよ.
- (d) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が Cauchy 列であることの ε-N 論法による定義を答えよ.

(3) 有理数と実数の違いに関係する次の定理の主張をそれぞれ答えよ.
- (a) 実数の連続性[2]
- (b) Bolzano-Weierstrass の定理
- (c) 実数の完備性
- (d) Archimedes の原理

(4) 次の集合の下限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.
- (a) $\left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
- (b) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < x + 3\}$
- (c) $\left\{\sin(\sqrt{3}x\pi) : x \in \mathbb{Q}\right\}$

[2] 教科書 (白岩) に述べられている, 実数の切断についての連続性は答えとして認めない. 講義ノートで述べた「実数の連続性」を答えよ.

(5) 次の性質をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例をあげよ.

(a) $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はどちらも収束するが, 収束先が異なる.

(b) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < 3$ となるが, $\lim_{n\to\infty} a_n < 3$ とならない.

(6) 自然対数の底の定義を述べよ.

(7) 次の極限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, ただし, $a, b > 0$ は定数

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^n$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^3}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}$

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$\sup(-1,2)=2$ を示したい. 次の問いに答えよ.

(1) 2 が開区間 $(-1,2)$ の上界であることを論理記号を用いて表せ.

(2) 2 が開区間 $(-1,2)$ の上界として最小であることを論理記号を用いて表せ.

(3) $\sup(-1,2)=2$ を示せ.

問題 3.

自然数 n に対して $a_n=\dfrac{3n+5}{2n-3}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$ を ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$ の定義を答えよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$ を ε-N 論法を用いて示せ.

問題 4.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a,b\in\mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n+2b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a+2b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n+2b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a+2b$ に収束することの定義を答えよ.

(2) 数列 $\{a_n+2b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a+2b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a,b\in\mathbb{R}$ に収束するとする. 次の条件 (A) を仮定する.

(A) すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して, $|a_n|\le 2|a|$ となる.

このとき, 数列 $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ab に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.