微分積分学 A 期末試験問題

2016 年 7 月 28 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が 1 枚目の解答用紙を用いて答えよ. 問題 2 以降については, 3 題以上を選択して答えよ. それぞれの問題について, 解答用紙の片面のみを使い, 問題番号を指定の枠内に書くこと.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=x^2$ で定義するとき, 像 $f([-2,1])$ を答えよ.

(2) $\arccos(\cos(-\pi))$ を求めよ.

(3) $\arctan(\tan(\pi))$ を求めよ.

(4) $a>1$ に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ を求めよ.

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x\cos(3x)$ を求めよ.

(6) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}$ を求めよ (ヒント : $y=\arcsin x$ とおく).

(7) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+3}-x)$ を求めよ.

(8) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような実数 $\alpha\in\mathbb{R}$ を求めよ.

(9) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が $a\in\mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ の ε-N 論法による定義を答えよ.

(10) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が $a\in\mathbb{R}$ に収束しないこと, すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq a$ の ε-N 論法による主張を答えよ.

(11) $f:(-1,\infty)\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ とする.

  (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=\infty$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

  (b) $A\in\mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=A$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

  (c) $A\in\mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x)=A$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

(12) $I\subset\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ とする.

  (a) $x_0\in I$ に対して, f が $x=x_0$ で連続であることの ε-δ 論法を用いた定義を答えよ.

  (b) f が I 上一様連続であることの定義を答えよ.

(c) f は I 上連続となるが, I 上一様連続とならないような I と f の例を与えよ.

(13) 開区間 $(0,1)$ 上の連続な関数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ で, $(0,1)$ 上連続かつ有界であり, 最大値は存在するが最小値が存在しない例をあげよ.

(14) 整数 a に対して, 方程式 $x^3+15x^2+68x+81=0$ の実数解が $a\le x\le a+1$ をみたすとき, 整数 a を求めよ.

(15) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ を連続な関数とする.

(a) $f(-1)<f(1)$ とする. 中間値の定理を述べよ.

(b) Weierstrass の定理で最小値に関する主張を inf を用いて述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

関数 $f:(-1,1)\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$, $g:(-1,1)\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ は $x\to 0-0$ のときにそれぞれ $A,B\in\mathbb{R}$ に収束するとする．このとき，$\lim_{x\to 0-0} f(x)+g(x)=A+B$ となることを ε-δ 論法を用いて示したい．

(1) $\lim_{x\to 0-0} f(x)+g(x)=A+B$ の定義を述べよ．

(2) $\lim_{x\to 0-0} f(x)+g(x)=A+B$ を ε-δ 論法を用いて示せ．

問題 3.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して，$f(x):=2x^2+x-7$ で定義する．f が $x_0=2$ で連続であることの証明を与えたい．

(1) f が $x_0=2$ で連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ．

(2) f が $x_0=2$ で連続であることの ε-δ 論法による証明を与えよ．

問題 4.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して，$f(x):=x^3+2$ で定義する．f が $\mathbb{R}$ 上連続であることの証明を与えたい．

(1) f が $\mathbb{R}$ 上連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ．

(2) f が $\mathbb{R}$ 上連続であることの ε-δ 論法による証明を与えよ．

以下余白 計算用紙として使ってよい．

問題 5.

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $x\to\infty$ のときにそれぞれ $A,B\in\mathbb{R}$ に収束するとする. 次の 2 条件を仮定する.

(A) $B<0$ である.

(B) すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して, $g(x)<\dfrac{1}{2}B$ となる.

このとき, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 6.

$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ は, ある定数 $C>0$ が存在して, 任意の $x,x'\in(-1,1)$ に対して

(L) $$|f(x)-f(x')|\le C|x-x'|^{\frac{2}{3}}$$

をみたすとする. このとき, f は $(-1,1)$ 上一様連続であることを示せ. なお, どこで (L) を用いたのかをわかるように証明を書くこと.

問題 7.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x):=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

で定義する. f は $x=0$ で連続となるかどうかを考察し, ε-δ 論法による証明を与えよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

28 Jul. 2016　学生番号　　　名前　　　　得点

問題番号 1

(1) $[0.4]$ (2) π (3) 0 (4) $\log_a e$（または $\frac{1}{\log a}$）(5) 0

(6) 1 (7) 2 (8) $\alpha = 4$

(9) $^\forall \varepsilon > 0$ に対して $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

(10) $^\exists \varepsilon > 0$ s.t. $^\forall N \in \mathbb{N}$ に対して，$^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N$ かつ $|a_n - a| \geq \varepsilon$

(11) (a) $^\forall K > 0$ に対して，$^\exists \delta > 0$ s.t. $^\forall x \in [-1, \infty) \setminus \{1\}$ に対して

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow f(x) > K.$$

(b) $^\forall \varepsilon > 0$ に対して，$^\exists M > 0$ s.t. $^\forall x \in (-1, \infty) \setminus \{1\}$ に対して

$$x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

(c) $^\forall \varepsilon > 0$ に対して，$^\exists \delta > 0$ s.t. $^\forall x \in (-1, \infty) \setminus \{1\}$ に対して

$$0 < x - 1 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

(12) (a) (b) 講義ノートを参照．

(c) ・$I = \mathbb{R}$ とし，$f: I \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x^2$ $(x \in I)$ で定める．

・$I = (0.1)$ とし，$f: I \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \frac{1}{x}$ $(x \in I)$ で定める．

(13) $f(x) := -(x - \frac{1}{2})^2$ $(x \in (0.1))$ や $f(x) := \sin(\pi x)$ $(x \in (0.1))$

(14) $a = -2$

(15) 講義ノートを参照．

コメント

(4) (5) (7) (8) (13) (14) は高校の内容をほとんどこえていない。

出来がわるかったのは (10), (12)(c), (13).

(10) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ の主張をかくのだから，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ の定義の否定をかけということ．

(12) (c). I をきちんと明記しなければだめ．関数（写像）は定義域と値域を書かなければいけない

(13) 最大値はあって最小値がないのだから下限が $x=0$ or $x=1$ で達成されるような関数を考えればよい．

問題番号
7

示すこと

$\forall \varepsilon>0$ に対して，$\exists \delta>0$ s.t. $\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $|x-0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(0)|<\varepsilon$

1. $\forall x\in\mathbb{R}$ に対して

$x=0$ のとき．$|f(x)|=|f(0)|=0=|x|$

$x\neq 0$ のとき．$|f(x)|=|x\cos\frac{1}{x}|\leq|x|$ $(\because |\cos\frac{1}{x}|\leq 1)$

より

$$|f(x)|\leq|x| \qquad -(*)$$

が成り立つ．

2. $\forall \varepsilon>0$ に対して，$\delta:=\varepsilon>0$ とおく．$\forall x\in\mathbb{R}$ に対して

$|x-0|<\delta$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x)-f(0)| &= |f(x)| && (\because f(x)=0)\\ &\leq |x| && (\because (*))\\ &< \delta && (\because |x-0|<\delta)\\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ となるので f は $x=0$ で連続である．

$\boxed{\text{コメント}}$ 1. を使わずに示すなら，次のようになる：

$\forall \varepsilon>0$ に対して，$\delta:=\varepsilon>0$ とおく．$\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $|x-0|<\delta$ ならば

$x=0$ のとき．$|f(x)-f(0)|=|f(0)-f(0)|=0<\varepsilon$.

$x\neq 0$ のとき．
$$\begin{aligned}|f(x)-f(0)| &= |x\cos\tfrac{1}{x}|\\ &\leq |x| && (\because |\cos\tfrac{1}{x}|\leq 1)\\ &< \delta && (\because |x-0|<\delta)\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

となり，どちらの場合でも $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ となる．