第1章　実数と数列の極限

§1.1　イントロダクション　ー円周率を求めるー

$\pi = 3.141592653 5\cdots$　はどうやって求める？

←言葉の意味を定めること。

定義1.1（円周率）

すべての円について，円周率 π を

$$\pi := \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$$

で定める。 ☒

注意1.1

どの円についても $\dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ は等しい ☒

注意1.2

$A=B$ は「AとBが等しい」と「AをBで定める」の2つの意味がある。この違いを明確にするため，この講義では

$A=B$　　AとBが等しい

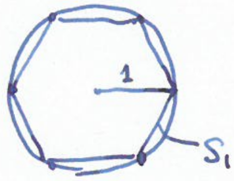
$A:=B$　　AをBで定める

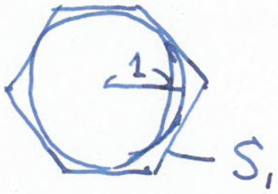
と書きわけることにする。

半径1の円の円周の長さを求めて2でわれば
πは求まるはず.

←〜 どうやって円周の長さを求めるか?

アルキメデス
〈Archimedes のアイデア〉

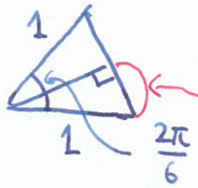




s_1：半径1の円に内接する正6角形の周の長さ
S_1： 〃 外接 〃

⇒ 「ならば」　$s_1 \leq \underbrace{2\pi}_{\text{円周の長さ}} \leq S_1$　≦と同じ

1. s_1を求める.

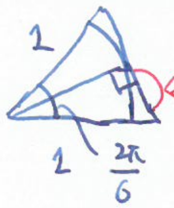


左図より一辺の長さは

$$2\times1\times\sin\left(\frac{2\pi}{6\times2}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$$

となる. よって $s_1 = \overset{\text{辺の数}}{6}\times1 = 6$ となる.

2. S_1を求める.



左図より一辺の長さは

$$2\times1\times\tan\left(\frac{2\pi}{6\times2}\right)=2\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる. よって $S_1=6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ となる.

1. 2. より $6 \leq 2\pi \leq 4\sqrt{3}$, すなわち $3 \leq \pi \leq 2\sqrt{3}$

がわかる.

3.

s_2：半径1の円に内接する正12角形の周の長さ

S_2：　〃　外接　〃

$\Rightarrow \quad s_2 \leq 2\pi \leq S_2$

s_3：半径1の円に内接する正24角形の周の長さ

S_3：　〃　外接　〃

$\Rightarrow \quad s_3 \leq 2\pi \leq S_3$

この操作を続けると，自然数 n に対して

s_n：半径1の円に内接する正 $6 \times 2^{n-1}$ 角形の周の長さ

S_n：　〃　外接　〃

$\Rightarrow \quad s_n \leq 2\pi \leq S_n$

定理1.1 (Archimedes)

証明できる主張で重要なもの

すべての自然数 n に対して

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n}, \qquad \cdots (1)$$

$$s_{n+1}^2 = S_{n+1}\, s_n \qquad \cdots (2)$$

が成り立つ ▨

証明は web Note を参照. 定理1.1 より

$$\begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{2}{1/S_n + 1/s_n} \\ s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}\, s_n} \\ s_1 = 6, \quad S_1 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

となる.

例1.1

$n=2$ のとき，s_2，S_2 を求める．

$$S_2 = \frac{2}{1/S_1 + 1/s_1} = \frac{2}{1/4\sqrt{3} + 1/6} = 2 \div (1 \div 4\sqrt{3} + 1 \div 6) \simeq 6.4310,$$

近似．

$$s_2 = \sqrt{S_2 s_1} \simeq \sqrt{6.4310 \times 6} \simeq 6.2117$$

となる．

n	s_n	S_n	πの評価
1	6.0000	6.9282	$6.0000 \leq 2\pi \leq 6.9282$
2	6.2117	6.4310	$6.2117 \leq 2\pi \leq 6.4310$
3	6.2654	6.3197	$6.2654 \leq 2\pi \leq 6.3197$
4	6.2789	6.2926	$6.2789 \leq 2\pi \leq 6.2926$
5	6.2830	6.2873	$6.2830 \leq 2\pi \leq 6.2873$

$n=5$ で $3.1415 \leq \pi \leq 3.1436$ だから $\pi \simeq 3.14$ がわかる。

〈問題点〉

◎ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は円周率の2倍に近づいているのか？

1. $s = \lim_{n\to\infty} s_n$，$S = \lim_{n\to\infty} S_n$ が存在すれば定理1.1の(2)

で $n \to \infty$ とすれば

$$s^2 = Ss$$

だから（$s \neq 0$を示せば）$s = S$ がわかる。

しかし．この「存在する」はどうやって示せばよいのか？

2. そもそも円周の長さのような曲線の長さはどうやって定めるか?
(答:極限と積分)

3. では極限とは何か?
(答:実数)

4. 実数とは何か? 有理数とは何がちがうのか?

〈微分積分学ABの(当面の)目標〉

◎高校で学んだ数学(とくに数Ⅲ)を厳密にくみたて直す

◎実数とは何か?からはじめて、微分積分学の基本定理,
たとえば

$$\underbrace{\int_0^1 x^2\,dx}_{\text{面積}} = \int_0^1 \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)'}_{\text{速さ}} dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

面積 ← なぜ関係あるの? → 速さ

がなぜ正しいか?を眺める(すべてを厳密に示すのはとても大変。ある程度の雰囲気がつかめればよい)

◎高校までで学んだ計算手法はすらすらできることが前提である.

◎学力調査の数学の問題は全部解けなければダメ.

◎配布の基礎課題は説明できるようになって欲しい.

◎ 〃 発展課題がすべて出来るようになって欲しい.

§1.2 実数の構成

	+	−	×	÷(0を除く)	不等号
自然数	○	×	○	×	○
整数	○	○	○	×	○
有理数	○	○	○	○	○
実数	○	○	○	○	○
複素数	○	○	○	○	×

実数と有理数はどうちがう?

実数 = 整数 + 有限小数 + 無限小数

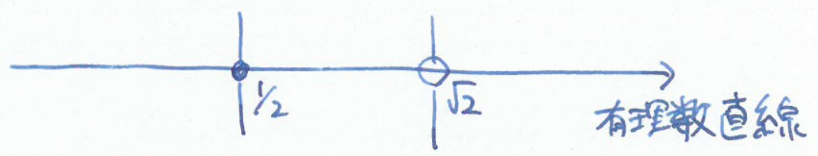
(数研 数I の教科書)

→ 無限小数とは何?(答:極限)

◎ 実数とは何か?を考える必要がある.

〈Dedekind(デデキント)のアイデア〉

有理数直線を切ってみる



ぶつかる → 有理数

ぶつからない → 無理数

これをどのように数学の言葉でいえばよいか?

〈集合論の基礎〉

ものの集まりを集合といい，そのもの一つ一つを要素，元という。

<u>例1.2</u>（よく使う集合）

$\mathbb{N}$：自然数全体の集合，$\mathbb{Z}$：整数全体の集合，

$\mathbb{Q}$：有理数全体の集合，$\mathbb{R}$：実数全体の集合

$\mathbb{C}$：複素数全体の集合，ϕ：要素，元が一つもない集合
（空集合という） ☒

aが集合Aの要素，元であるとき，$a \in A$とかく。

<u>例1.3</u>

$-3 \in \mathbb{Z}$，$-3 \notin \mathbb{N}$，$\frac{9}{4} \in \mathbb{Q}$，$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. ☒

集合はふつう$\{\cdots\}$と中かっこを用いてかくことが多い.

<u>例1.4</u>（開区間，閉区間）

$a, b \in \mathbb{R}$に対して

縦線もある.

$$(a, b) := \{\underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{元が何か？}} : \underbrace{a < x < b}_{\text{条件}}\}$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

とかく。(a, b)を開区間，$[a, b]$を閉区間という. ☒

集合Aが集合Xの部分集合であるとは，「すべての$a\in A$に対して$a\in X$」が成り立つときをいう。このとき，$A\subset X$とかく。

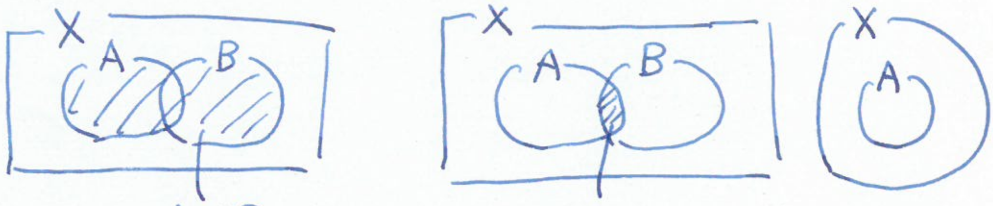
例1.5

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$,　$\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$,　$\mathbb{Q},\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ ▨

集合Xの部分集合$A,B\subset X$に対して和集合$A\cup B$と共通部分$A\cap B$をそれぞれ

$$A\cup B := \{x\in X : x\in A \text{ または } x\in B\},$$
$$A\cap B := \{x\in X : x\in A \text{ かつ } x\in B\}$$

と定める。



$A\cup B$　　$A\cap B$　　$A\subset X$

〈Dedekindの切断〉

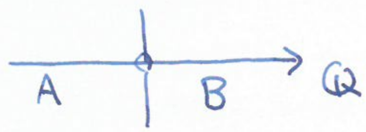
定義1.2（有理数の切断）

$\mathbb{Q}$の部分集合$A,B\subset\mathbb{Q}$が有理数の切断

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

左を右で定義する

1. $A\cup B=\mathbb{Q}$
2. $A\cap B=\phi$
3. すべての$a\in A$, $b\in B$に対して$a<b$
4. Aに最大値はない．すなわち，すべての$a\in A$に対して$a'\in A$が存在して$a<a'$．

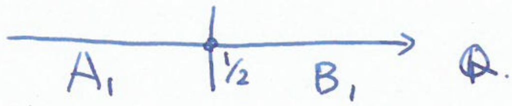


このとき，$\langle A,B\rangle$とかくことにする． ▨

例1.6

$A_1 := \{a \in \mathbb{Q} : a < \frac{1}{2}\}$, $B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b \geq \frac{1}{2}\}$

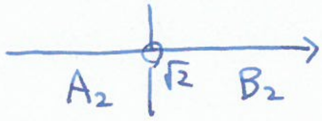
とすると，$\langle A_1, B_1 \rangle$ は有理数の切断になる．このとき，B_1 に最小値 $\frac{1}{2}$ がある．そこで $\langle A_1, B_1 \rangle = \frac{1}{2}$ とみなすことにする．



例1.7

$A_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0$ または $a^2 < 2\}$,
$B_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a > 0$ かつ $a^2 > 2\}$

とすると．$\langle A_2, B_2 \rangle$ は有理数の切断になる．このとき．B_2 に最小値はなく．A_2とB_2の境目は $\sqrt{2}$ となる．



そこで $\langle A_2, B_2 \rangle = \sqrt{2}$ とみなすことにする．

$\langle A, B \rangle$ を有理数の切断としたとき，

B に最小値がある：有理数直線を切ったときにぶつかる（有理数）

B に最小値がない：有理数直線を切ったときにぶつからない（無理数）

に対応する．

定義1.3（実数）

有理数の切断を実数という。 ☑

次に有理数の切断を用いて、実数の四則演算，絶対値を定義しなければいけない。詳細は

小平 邦彦，「解析入門I」，岩波書店，2003

を参照せよ。

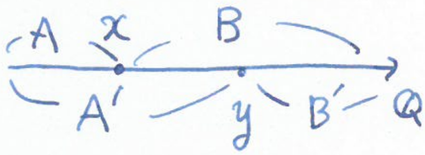
定義1.4（順序関係）

$x, y \in \mathbb{R}$を有理数の切断を用いて，$x = \langle A, B \rangle$，$y = \langle A', B' \rangle$とかく。

$$x = y \underset{\text{定義}}{\iff} A = A' \quad (\text{すなわち } A \subset A' \text{ かつ } A' \subset A)$$

$$x \leq y \underset{\text{定義}}{\iff} A \subset A'$$

$$x < y \underset{\text{定義}}{\iff} x \leq y \text{ かつ } x \neq y$$



と定義する。 ☑

定理1.2（有理数の稠密性）

すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $x < y$ ならば、ある $q \in \mathbb{Q}$ が存在して $x < q < y$ とできる ☑

証明は web Note 参照。

例1.8

$x := \sqrt{2}$，$y := \sqrt{3}$ とするとき、$q := 1.6 \in \mathbb{Q}$ とすれば $x < q < y$ とできる。定理1.2は（この場合では）y が $\sqrt{2}$ より少しでも大きければいつでも $x < q < y$ となる $q \in \mathbb{Q}$ をみつけることができることを主張している。 ☑

§1.3 実数の性質と上限・下限

$\mathbb{R}$と$\mathbb{Q}$はどう違うか?を考える.

〈上限〉

$(0,1)=\{x\in\mathbb{R} : 0<x<1\}$ に最大値はないが,

1は「最大値」に似ている. このことをどうやって数学の言葉で表すか?を考える

〈論理の基礎〉〈くわしくは数学入門A

集合Aに対し

$^\forall a\in A$: すべての(任意の) $a\in A$ に対して

$^\exists a\in A$: ある $a\in A$ が存在して

とかく。∀は「for all」,「for any」のAをひっくりかえしたもの, ∃は「exist」のEをひっくり返したものである.

定義1.5 (有界)

$A\subset\mathbb{R}$に対して, Aが上に有界であるとは「ある$M\in\mathbb{R}$が存在して, すべての$a\in A$に対して$a\leq M$が成り立つ」ことをいう. これを

$$^\exists M\in\mathbb{R} \text{ s.t. } ^\forall a\in A \text{ に対して } a\leq M$$

← such that

とかく。このときのMをAの上界という。

Aが下に有界であるとは,「ある$m\in\mathbb{R}$が存在して, すべての$a\in A$に対して$a\geq m$が成り立つ」ことをいう. これを

$$^\exists m\in\mathbb{R} \text{ s.t. } ^\forall a\in A \text{ に対して } a\geq m$$

とかく。このときのmをAの下界という.

Aが有界であるとは「ある$M>0$が存在して, すべての$a\in A$に対して$|a|\leq M$が成り立つ」ことをいう. これを「$^\exists M>0$ s.t. $^\forall a\in A$ に対して $|a|\leq M$」とかく ▨

例1.9

$A := (0,1)$ は有界である。 ▨

証明

$M := 2 > 0$ とおく。すると $\forall a \in (0,1)$ に対して $|a| \leq 1 \leq M$ が成り立つ。 □

例1.10

$B := (0, \infty)$ は上に有界ではない。 ▨

例1.11

$C := (-\infty, 3)$ は下に有界でない。 ▨

定義1.6

$A \subset \mathbb{R}$ に対して、A の**上界の集合** A_u と**下界の集合** A_ℓ をそれぞれ

$$A_u := \{M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$

$$A_\ell := \{m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

と定める。 ▨

注意1.3

定義1.6の記号は一般的ではない。使うときは上界の集合、下界の集合と明記すること。

例1.12

$A := [0,1)$ とすると、A の上界の集合 A_u、下界の集合 A_ℓ は

$$A_u := \{M \in \mathbb{R} : \forall a \in [0,1) \text{ に対して } a \leq M\} = [1, \infty),$$

$$A_\ell := \{m \in \mathbb{R} : \forall a \in [0,1) \text{ に対して } a \geq m\} = (-\infty, 0]$$

となる。 ▨

定義1.7（最大・最小）

$A \subset \mathbb{R}$ に対して、A の一番大きい数と一番小さい数をそれぞれ A の**最大値**、**最小値**といい、$\max A$, $\min A$ とかく ▨

例1.13

$A := [0,1)$ に対して，$\max A$ は存在しない．$\min A = 0$ となる

☑

定義1.8（上限，下限）

$A \subset \mathbb{R}$ に対して，A の上限 $\sup A$，下限 $\inf A$ を，A の上界の集合 A_u，下界の集合 A_ℓ を用いて

$$\sup A := \min A_u, \quad \inf A := \max A_\ell$$

により定義する．

☑

◎ $\sup A$ は「A よりも大きい数の中で最も小さい数」ということ．

〈論理記号と上限，下限〉

$A \subset \mathbb{R}$ に対して，$\alpha := \sup A$ を論理記号でかくと

1. $\forall a \in A$ に対して $a \leq \alpha$ （α は A の上界である）
2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists a_\varepsilon \in A$ s.t. $\alpha - \varepsilon \leq a_\varepsilon$

（α より少しでも小さいと，A の上界にならない）

$-\varepsilon$ のこと

となる．

定理1.3（実数の連続性）

上に有界な空でない実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は，実数の上限 $\sup A$ が存在する．

☑

注意1.4

定理1.3の「実数」を「有理数」にかえることはできない（反例 $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$）．つまり，定理1.3は実数と有理数の違いを表している．

☑

実数の連続性から、次の重要な定理が得られる。

定理1.4（Archimedesの原理）

$^\forall \varepsilon > 0$ に対して、$^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $\varepsilon N_\varepsilon > 1$ が成り立つ。

すなわち、（どんな小さな）すべての正の数 $\varepsilon > 0$ に対して、（十分大きな）自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をうまく決めれば $\varepsilon N_\varepsilon > 1$ とできる。 ☒

定理1.3, 1.4の証明はwebノートを参照せよ。

例1.14

$A := [0,1)$ に対して $\sup A = 1$ となる。

証明

1. $^\forall a \in A$ に対して $a \leq 1$ を示す。

$^\forall a \in A = [0,1)$ に対して $0 \leq a < 1$ となるから $a \leq 1$ が成り立つ。

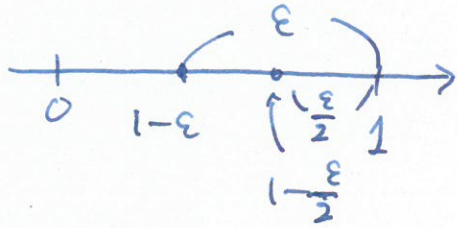
2. $^\forall \varepsilon > 0$ に対して、$^\exists a_\varepsilon \in A$ s.t. $1 - \varepsilon < a_\varepsilon$ を示す。

つまり、$\varepsilon > 0$ を先に与えて $1-\varepsilon < a_\varepsilon$ となる $a_\varepsilon \in A$ を探す。

$^\forall \varepsilon > 0$ に対して、

右図より

$a_\varepsilon := \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$



とおくと、$\frac{1}{2} \leq a_\varepsilon < 1$ だから

$a_\varepsilon \in A$ となる。また

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_\varepsilon$$

となるので、$1 - \varepsilon < a_\varepsilon$ が成り立つ。

1. 2. より $\sup A = 1$ となることが示された. □

注意1.5

「存在を示す」ということは「成り立つものをみつける」と同じこと.

例1.14の証明では $1-\varepsilon < a_\varepsilon$ となる $a_\varepsilon \in A$ をみつければよい.

$a_\varepsilon \in A$ という条件から, $0 \leq a_\varepsilon < 1$ をみたして, $1-\varepsilon < a_\varepsilon$ となる a_ε をみつければよい. ▨

注意1.6

例1.14の証明で $a_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと, $\varepsilon > 0$ が大きいときに, $1 - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ となってしまうことがある. すると $a_\varepsilon \notin A$ となってしまうので これを防ぐために $a_\varepsilon := \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\}$ としてある ▨

§1.4 数列の収束・発散

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束するとは「$|a_n - a|$ が n を大きくすると 0 に近づくこと」であった。この n を大きくや 0 に近づく をどう厳密に表現すればよいか？

定義 1.9（数列の極限，ε-N 論法）
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_\varepsilon$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon]$ が成り立つ。

このとき，$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ とか $a_n \to a \ (n \to \infty)$ とかく。 ☐

$a_n \to a \ (n \to \infty)$ を論理記号でかくと

① $\forall \varepsilon > 0$ に対して ② $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. ③ $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して
$\boxed{4}$ $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow$ $\boxed{5}$ $|a_n - a| < \varepsilon$

となる。

〈定義 1.9 の意味〉

$|a_n - a|$ が 0 に近づく

先に $\varepsilon > 0$ を任意にあたえて　　ε はいくら小さくてもよい

n を大きくしたときに，

$|a_n - a| < \varepsilon$ とできる。

ε よりあとにえらぶ $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ より先の

ε に対応して，N_ε を決めればよい

すべての $n \in \mathbb{N}$

◎定義をいくらかいても、これはわかりにくい（定義した人が天才なのだから、わかりにくいのはあたりまえ…）。例を眺めて感覚をつかもう。

例 1.15

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ。 ☒

証明

1. 定義の $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつけるために、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をあとで決める。$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_\varepsilon$ を仮定すると

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon}$$

となる。$\boxed{\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon}$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をえらべば

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

が成り立つ。$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ を N_ε について解くと $\boxed{N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}}$ となる。

2. $\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して}}_{①}$ $\underbrace{N_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}}_{②}$ とおく。ただし、$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ は $\frac{1}{\varepsilon}$ を越えない最大の整数であり、

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = N_\varepsilon$$

が成り立つことに注意する。すると、$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して}}_{③}$ $\underbrace{n \geq N_\varepsilon}_{\boxed{4}}$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} && (\because n \geq N_\varepsilon)\\ &< \frac{1}{1/\varepsilon} && (\because N_\varepsilon > 1/\varepsilon)\\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち $\underbrace{\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon}_{\boxed{5}}$ となるので $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ □

例1.16

$$\frac{2n}{n+1} \to 2 \quad (n\to\infty) \text{ が成り立つ}$$

例

示すこと

$\forall \varepsilon>0$ に対して $^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon$

① ② ③ 4 5

証明

1. 定義の $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ をみつけるために、$\forall\varepsilon>0$ に対し、$N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ をあとで決める。$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して、$n\geq N_\varepsilon$ を仮定すると

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N_\varepsilon+1} \quad (\because n\geq N_\varepsilon)$$

となる。$\frac{2}{N_\varepsilon+1}\leq\frac{2}{N_\varepsilon}$ に注意して、$\boxed{\frac{2}{N_\varepsilon}<\varepsilon}$ となる $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ を えらべば

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right| \leq \frac{2}{N_\varepsilon+1} \leq \frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

が成り立つ。$\frac{2}{N_\varepsilon}<\varepsilon$ を N_ε について解くと $\boxed{N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}}$ となる。

2. $\forall\varepsilon>0$ に対して ① $N_\varepsilon := \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1 \in\mathbb{N}$ とおく ②。このとき、$N_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1 > \frac{2}{\varepsilon}$ となることに注意する。$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し ③ $n\geq N_\varepsilon$ を仮定すると

4
$$\begin{aligned}\left|\frac{2n}{n+1}-1\right| &= \left|\frac{-2}{n+1}\right| \\ &= \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{2}{N_\varepsilon+1} \quad (\because n\geq N_\varepsilon) \\ &\leq \frac{2}{N_\varepsilon} < \frac{2}{2/\varepsilon} \quad \left(\because N_\varepsilon>\frac{2}{\varepsilon}\right). \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

すなわち、$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon$ 5 が成り立つ。 □

注意1.7

例1.15, 1.16の証明中の$N_\varepsilon \in \mathbb{N}$の条件を調べる計算は、実は証明でかかなくてもよい。しかし、微分積分学や解析学における「評価する」という観点は非常に重要である。 ☐

例1.15, 1.16の証明論法を ε-N論法 という。

例1.17

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$に対し $a_n \to a \ (n\to\infty)$ ならば、

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to a \ (n\to\infty)$$ が成り立つ ☐

例1.17は ε-N論法を用いないと証明が難しい。証明はwebノートにまわす。

定義1.10 (数列の発散)

収束しない数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$は 発散する という。

収束しない数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$が(正の)無限大に発散する。

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall M>0$ に対して、$^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n\geq N \Rightarrow a_n>M$$

このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ とか $a_n\to\infty \ (n\to\infty)$ とかく。

収束しない数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$が負の無限大に発散する

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall M>0$ に対して、$^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n\geq N \Rightarrow a_n<-M.$$

このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ とか $a_n\to-\infty \ (n\to\infty)$ とかく。 ☐

定理1.5

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$に対して、次が成り立つ.

(1) $a_n \to a\ (n\to\infty),\ a_n \to b\ (n\to\infty) \Longrightarrow a=b$.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が収束 $\Longrightarrow \exists M>0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$に対して$|a_n| \leq M$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$に対して$a_n \leq b_n$, $a_n \to a\ (n\to\infty)$, $b_n \to b\ (n\to\infty)$

$\Longrightarrow a \leq b$. 証

〈定理1.5の意味〉

(1) 数列の極限は存在すれば1つしかない.

(2) 収束する数列は有界となる.

(3) 数列の極限は「$\leq$」の性質を保存する.

注意1.8

定理1.5の(3)の不等号$\leq$を$<$にかえることはできない.

たとえば$a_n := -\frac{1}{n}$, $b_n := \frac{1}{n}$を考えてみよ. 証

定理1.5の証明の方針　詳細はwebノート.

(1) $a>b$と仮定する. $\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b)>0$とおいて, 極限の定義を用いると矛盾が得られる.

(2) $\varepsilon := 1>0$ととり, 極限の定義を用いる.

$a := \lim_{n\to\infty} a_n$とおくときに

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\text{そんなに大きくない}} + |a|$$

となることを用いる.

(3) 背理法により$a>b$と仮定する. $\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b)>0$とおいて極限の定義を用いると矛盾が得られる. $a \geq b$と仮定しても$\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b) \geq 0$となり, 極限の定義が使えないことに注意 □

§1.5 極限の性質

定理1.6

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が、

$$a_n \to a, \quad b_n \to b \quad (n \to \infty)$$

をみたすとき、次が成り立つ。

(1) $a_n + b_n \to a+b \quad (n\to\infty)$

(2) $a_n - b_n \to a-b \quad (n\to\infty)$

(3) $a_n b_n \to ab \quad (n\to\infty)$

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $b_n \neq 0$, $b \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b} \quad (n\to\infty)$ ☐

証明

(1) 1. $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n\to\infty)$ となることから、

$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して、$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$$

とできる。ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ はあとでえらぶことにして、

$N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ とすると、$n \geq N_0$ を仮定すると

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n) - (a+b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \left(\because \begin{array}{l} n \geq N_0 \geq N_1 \\ n \geq N_0 \geq N_2 \end{array}\right)\end{aligned}$$

となるから、$\boxed{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon}$ であれば $|(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon$

となる。$\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2}$ を仮定して、ε_1 について解くと、

$\boxed{\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}}$ となる。この推論をもとに証明をかく。

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して. $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より,

①

$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる. $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ とるると. $\forall n \in \mathbb{N}$

②

に対し $n \geq N_0$ ならば

③ $\boxed{4}$

$$\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\because \begin{array}{l} n \geq N_0 \geq N_1 \\ n \geq N_0 \geq N_2 \end{array}\right) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

すなわち. $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ となる.

$\boxed{5}$

(2) 各自考えよ.

(3) 1. $\forall \varepsilon > 0$ に対して. $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より.

$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対し. $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に

対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$$

とできる. ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ はあとでえらぶ.

$N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とし. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して.

$n \geq N_0$ を仮定すると

$$|a_nb_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b|$$
$$\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \quad (\because 三角不等式)$$
$$\leq \varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b| \quad \left(\because \begin{array}{l} n \geq N_0 \geq N_1 \\ n \geq N_0 \geq N_2 \end{array}\right)$$

となる. ここで $\varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b| < \varepsilon$ としたいが, まだ n が残っているので, n を用いずに ε_1, ε_2 を決めるように次のことを行う.

定理1.5 (2) より $^\exists M > 0$ s.t. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$.
とできる. 従って

$$|a_nb_n - ab| \leq \varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b|$$
$$\leq \varepsilon_2 M + \varepsilon_1(|b| + 1)$$
$$= \varepsilon_1(M + |b| + 1) \quad (\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2} \text{ を仮定})$$

とできるので, $\boxed{\varepsilon_1(M + |b| + 1) < \varepsilon}$ をみたすように ε_1 を決めればよい. この推論をもとに証明をかく.

2. $^\forall \varepsilon > 0$ に対して ① $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列より,

$^\exists M > 0$ s.t. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$

とできるので, $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より,

$^\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{1 + |b| + M}$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{1 + |b| + M}$$

とできる．そこで $\underline{N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}}$ とおくと．②

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$ に対して ③ $\underline{n \geq N_0}$ ならば $\boxed{4}$

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq M|b_n - b| + |a_n - a||b| \quad (\because \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{は有界}) \\
&< \frac{M + |b|}{M + |b| + 1}\varepsilon \quad \left(\because \begin{array}{l} n \geq N_0 \geq N_1 \\ n \geq N_0 \geq N_2 \end{array}\right) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

すなわち $\underline{|a_n b_n - ab| < \varepsilon}$ となる．$\boxed{5}$

(4) Webノート参照

□

<u>注意1.9</u>

定理1.6の証明の<u>1.</u>は書く必要のない部分である．そのため教科書でもかいていないことがある．しかし．自分で証明をかけるようにするには．この<u>1.</u>のアイデアを理解する必要がある．教科書を自分で読むときには．この<u>1.</u>の部分を補うことでより深く勉強できる．

定理1.7（はさみうちの原理）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して．

$a_n \leq c_n \leq b_n$ をみたすとする．

〈仮定〉

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して．$\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$．

〈結論〉

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ となる． 図

証明

$^\forall \varepsilon > 0$ に対し，$a_n \to \alpha \ (n\to\infty)$ より．$^\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t.

$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \implies \alpha - a_n \leq |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．次に $b_n \to \alpha \ (n\to\infty)$ より $^\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t.

$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_2 \implies b_n - \alpha \leq |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ ととれば

$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し，$n \geq N_0$ ならば $a_n \leq c_n \leq b_n$ より

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &< a_n - \alpha && (\because n \geq N_0 \geq N_1) \\
&\leq c_n - \alpha && (\because a_n \leq c_n) \\
&\leq b_n - \alpha && (\because c_n \leq b_n) \\
&< \varepsilon, && (\because n \geq N_0 \geq N_2)
\end{aligned}$$

すなわち $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ となる． □

§1.6 数列の収束条件

§1.4, §1.5：数列の収束先がわかっていた。
収束先がわからないときはどうするか？

〈単調数列〉

定義1.11（単調増加，単調減少）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が（広義）単調増加

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が（広義）単調減少

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq a_{n+1}$ ☒

定理1.8（単調数列の収束性）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は有界かつ単調増加

$\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ に収束する。すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ ☒

証明

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界だから $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty$ となる（定理1.3）。上限の定義から $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a$ となることから $|a_n - a| = a - a_n$ となる。

さて，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，上限の定義から $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $a - \varepsilon < a_{N_0}$ とできる．$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq N_0$ ならば

$$a - \varepsilon < a_{N_0} \leq a_n \quad (\because \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は単調増加})$$

より

$$|a_n - a| = a - a_n < \varepsilon,$$

つまり $|a_n - a| < \varepsilon$ となる． □

例1.18（自然対数の底）

数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。そこで

$e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ とおき，自然対数の底 という

$\square$

証明

$a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ とおく.

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であることを示す. $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \qquad (\because \text{二項定理}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \qquad \cdots(*) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} 1\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&\qquad\qquad (\because \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}
\end{aligned}
$$

となるので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加となる。

2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示す.

$^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対し, (*) より

$$0 \leq a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 1 \times \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\because k! \geq 2^{k-1})$$

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leq 3$$

となるので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である.

1. 2. と定理1.8より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。 □

〈コンパクト性定理〉

定義1.12 (部分列)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から順番をかえずに一部を抜きだした数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列といい, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とかく □

例1.19

$n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n := (-1)^n$ とおく. このとき.

$\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots\} = \{1, 1, 1, 1, \cdots\}$

や

$\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots\} = \{-1, -1, -1, -1, \ldots\}$

は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列となる。

上記の例1.19の数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束しないが有界である。
つまり定理1.5(2)「収束⇒有界」の逆「有界⇒収束」はなりたたない。

定理1.9 (Bolzano-Weierstrass)

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$が有界
$\Rightarrow$ $\exists$部分列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$は収束する

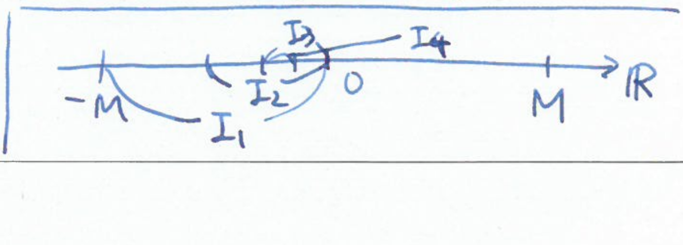
定理1.9は「$\mathbb{R}$上の有界集合は相対コンパクト」を主張している。
(詳しくは数学入門CD)

証明の概略

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界なので$\exists M>0$ s.t. $^\forall n\in\mathbb{N}$に対して$|a_n|\leq M$,
すなわち$-M\leq a_n\leq M$とできる。

1. $[-M,0]$と$[0,M]$の少なくとも一方には無限個のa_nがある。無限個ある方の区間をI_1とおく(両方ある場合は大きい方をとる)
2. I_1を半分にした2つの区間を考えるとどちらかの区間には無限個のa_nがある。無限個ある方をI_2とおく。
3. I_2を半分にした2つの区間を考えると、どちらかの区間には無限個のa_nがある。無限個ある方をI_3とおく。

以下くり返すことで区間の列$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$が作れる。



4. $I_k = [b_k, c_k]$ とおき，$a_{n_1} \in I_1$, $a_{n_2} \in I_2$, $a_{n_3} \in I_3 \ldots$ として 部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を作る．

- $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調増加，$\{c_j\}_{k=1}^{\infty}$ は単調減少，ともに有界
- $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k \quad \left(\because\ c_k - b_k = \frac{M}{2^{k-1}}\right)$
- $b_k \leq a_{n_k} \leq c_k \quad (^\forall k \in \mathbb{N})$

定理1.7（はさみうちの原理）＋定理1.8 $\Rightarrow$ $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する

□

定義1.13（集積点）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $a \in \mathbb{R}$ が集積点

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

☒

定義1.14（上極限，下極限）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，上極限 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と 下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ を それぞれ

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

で定義する．

☒

定理1.10

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ最大，最小の集積点 になる

☒

極限は存在するか否かわからないが，上極限，下極限は（$\mathbb{R}$上）つねに存在するので，（専門的な）極限の議論でよく用いられる．

〈Cauchy列と完備性〉

定義1.15

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が Cauchy列

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ $^\forall\varepsilon>0$ に対して. $^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n,m\in\mathbb{N}$に対して

$$n,m\geq N \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$$

$\boxed{/\!/}$

◎ Cauchy列は感覚的には $|a_n-a_m|\to 0$ $(n,m\to\infty)$ と同じである.

定理1.11（実数の完備性）

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$に対して

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{が収束列} \underset{\text{同値}}{\iff} \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{が Cauchy列.}$$

$\boxed{/\!/}$

証明

($\Rightarrow$)　（こちらはできるようになって欲しい）

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ が $a\in\mathbb{R}$ に収束すると仮定して. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が Cauchy列であることを示す.

$^\forall\varepsilon>0$ に対して. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ より. $^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n\geq N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon \qquad -(*)$$

とできる. よって $^\forall n,m\in\mathbb{N}$ に対し, $n,m\geq N$ ならば

$$\begin{aligned}|a_n-a_m| &= |(a_n-a)+(a-a_m)| \\ &\leq |a_n-a|+|a_m-a| && (\because \text{三角不等式}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} && (\because n,m\geq N \text{ と } (*)) \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち $|a_n - a_m| < \varepsilon$ となるので $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy列となる。

($\Leftarrow$) (こちらは難しい)

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示す。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy列より。$^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - a_{N_0}| < 1$$

とできる。よって

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N_0}| + |a_{N_0}| \leq 1 + |a_{N_0}|$$

となるから、$M := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_0-1}|, 1+|a_{N_0}|\}$ とおくと $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ。

2. Bolzano-Weierstrass の定理 (定理1.9) より部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ とできる。そこで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束することを示す。

$^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy列だから $^{\exists}N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{—} (**)$$

とできる。次に $a_{n_k} \to a$ $(k\to\infty)$ より $^{\exists}N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}k \in \mathbb{N}$ に対して

$$k \geq N_2 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{—} (***)$$

とできる。そこで、$k_0 \in \mathbb{N}$ を $k_0 \geq N_2$, $n_{k_0} \geq N_1$ をみたすようにとると $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して、$n \geq n_{k_0}$ ならば

$$
\begin{aligned}
|a_n - a| &= |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| && (\because \text{三角不等式}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && \left(\begin{array}{l}\because\ n \geq n_{k_0} \geq N_1 \text{ と } (*) \\ \quad n \geq n_{k_0},\ k_0 \geq N_2 \text{ と } (**)\end{array}\right) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

すなわち $|a_n - a| < \varepsilon$ となるので $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ が成り立つ.

□

注意1.10

注意1.4にあるとおり, 実数の連続性は有理数と実数のちがいを表している. 実は, 有理数と実数のちがいは次の4性質であり, それら4つの性質は全て同値である. すなわち, どれを実数と有理数の性質としてもよいことが知られている.

(1) 定理1.3 (実数の連続性)
(2) 定理1.8 (単調数列の収束性)
(3) 定理1.9 (Bolzano-Weierstrassの定理)
(4) 定理1.11と定理1.4 (実数の完備性, Archimedesの原理)

〈漸化式と極限〉

例1.20

漸化式

$$
\begin{cases}
\dfrac{2}{S_{n+1}} = \dfrac{1}{S_n} + \dfrac{1}{s_n} \\
s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}\, s_n} \\
s_1 = 6, \quad S_1 = 4\sqrt{3}
\end{cases}
$$

で定められる数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する

証明

$n \in \mathbb{N}$に対して，$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n \leq S_n \leq S_{n-1} \leq \cdots \leq S_1$

となることを帰納法で示す．

1. $n=1$ のとき，$0 < s_1 = 6 \leq 4\sqrt{3} \leq S_1$ より成り立つ．

2. $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq S_n \leq \cdots \leq S_1$ を仮定して，

$s_n \leq s_{n+1} \leq S_{n+1} \leq S_n$ を示す．まず，

$$S_{n+1} = \frac{2}{1/s_n + 1/S_n} > 0$$

より

$$s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1} s_n} > 0$$

がわかる．次に帰納法の仮定 $s_n \leq S_n$ より

$$S_{n+1} \leq \frac{2}{1/S_n + 1/S_n} = S_n,$$

$$S_{n+1} \geq \frac{2}{1/s_n + 1/s_n} = s_n$$

がわかる．よって

$$s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1} s_n} \geq \sqrt{s_n^2} = s_n,$$

$$s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1} s_n} \leq \sqrt{S_{n+1}^2} = S_{n+1}$$

となるので $s_n \leq s_{n+1} \leq S_{n+1} \leq S_n$ が示された．

3. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加で有界，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少で有界となるから定理1.8より収束する． □

注意 1.11

収束先が円周率に等しいことを示すのは別の（難しい）問題である． ▨

例 1.21

$p, q, x \in \mathbb{R}$, $p \neq \pm 1$ に対し

$$(*) \quad \begin{cases} a_{n+1} = p a_n + q \\ a_0 = x \end{cases}$$

で定められる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $0 \leq |p| < 1$ のとき収束する $\boxtimes$

証明

$(*)$ で $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すれば $n \to \infty$ として $a = pa + q$ となる。そこで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するかどうかを調べる。

$$a_{n+1} - a_n = p(a_n - a_{n-1})$$

に注意すると

$$|a_{n+1} - a_n| = |p|\,|a_n - a_{n-1}| \qquad (**)$$

が得られる。次の縮小写像の原理を用いると

$$|p| < 1 \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は収束列}$$

がわかる。 □

定理 1.12（縮小写像の原理）

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $0 \leq \exists L < 1$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L\,|a_n - a_{n-1}|$$

をみたすとする。このとき、$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する。 $\boxtimes$

注意 1.12

例1.21 の方法は もっと複雑な（非線形問題）

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

に対して 一般項 a_n が求められなくても, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するか調べられるために有用である。

第2章　関数と極限

§2.1　いろいろな関数

定義2.1（関数）

集合Xに対して，fがX上の関数であるとは，「$\forall x \in X$に対して$f(x) \in \mathbb{R}$が$\underbrace{\text{定まる}}_{\text{ただ1つ}}$規則」をいう。このとき$f: X \to \mathbb{R}$とかく。 □

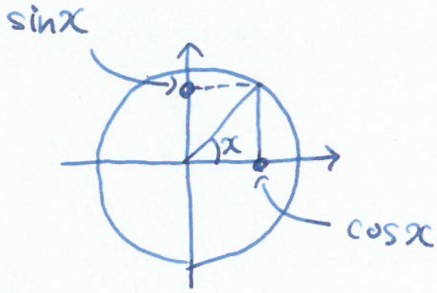
例2.1（指数関数）

$\mathbb{R}$上の関数$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を$x \in \mathbb{R}$に対して

$$\exp(x) := e^x$$

で定める。 □

例2.2（三角関数）



sin, cos は$\mathbb{R}$上の関数であり，右図のように単位円を用いて，$x \in \mathbb{R}$に対し

$\sin x$，$\cos x$を定めるのであった。

また，$\tan: \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi\} \to \mathbb{R}$を

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\tfrac{1}{2}\pi, \pm\tfrac{3}{2}\pi, \pm\tfrac{5}{2}\pi, \cdots\})$$

と定めるのであった。 □

注意2.1

例2.1, 2.2は厳密な定義ではない。 □

〈逆関数〉

exp, sin などの逆関数を定義したい…

定義 2.2（像）

集合 X と $f: X \to \mathbb{R}$ に対し，f の像 $f(X)$ を

$$f(X) := \{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in X \}$$

で定義する． ☑

注意 2.2

$f: X \to \mathbb{R}$ の像 ≒ $y = f(x)$ としたときの y の範囲 ☑

定義 2.3（単射）

集合 X 上の関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が単射

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall x_1, x_2 \in X$ に対して $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ☑

注意 2.3

$f: X \to \mathbb{R}$ が単射 $\iff {}^\forall x_1, x_2 \in X$ に対して $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

だから，異なる2点の行き先は常にちがうということ ☑

集合 X 上の関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が単射であるとき，f の逆関数

$f^{-1}: f(X) \to X$ を $y = f(x)$ となる $x \in X$ を用いて

$$f^{-1}(y) := x \qquad (\text{すなわち } f(f^{-1}(y)) = y)$$

と定めることができる（詳しくは数学入門）

例2.3（対数関数）

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単射であり

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

だから、exp の逆関数は $(0,\infty)$ 上で定義できる。これを対数関数といい、$\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ とかくのであった。

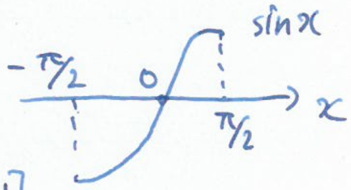
$$\log(\exp x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \exp(\log y) = y \quad (y \in (0,\infty))$$

に注意せよ。 ∎

例2.4（逆三角関数）

sin は $\mathbb{R}$ 上単射でないため、逆関数をつくるには（定義域に）制限をかける必要がある。

sin は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上単射になり



$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin x : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = [-1, 1]$$

より、sin の逆関数は $[-1,1]$ 上で定義できる。これを逆正弦関数といい、$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ とかく。

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), \quad \sin(\arcsin y) = y \quad (y \in [-1,1])$$

だが、

$$\arcsin(\sin x) \neq x \quad (x \in \mathbb{R})$$

に注意せよ。同様にして

逆余弦関数 $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$

逆正接関数 $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

も定義できる。 ∎

〈複素関数への拡張〉

定理2.1 (指数法則)

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して $e^x e^y = e^{x+y}$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して $(e^x)^y = e^{xy}$ ☑

指数法則が $\mathbb{C}$ 上成り立つとしよう。つまり、$z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$e^z e^w = e^{z+w}, \quad (e^z)^w = e^{zw}$$

が成り立つとする。

定理2.2 (Eulerの公式)

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ☑

$x \in \mathbb{R}$ に対して e^{ix} が何か？を無視すると、

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

より $\cos x$, $\sin x$ について解くことで

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

が得られる。

系2.1

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

☑

複素関数に広げると、三角関数と指数関数がみとおしよく扱うことができる。

定理2.3（加法定理）

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

証明

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

$$= \frac{1}{4}\Big(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}$$

$$+ e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}\Big)$$

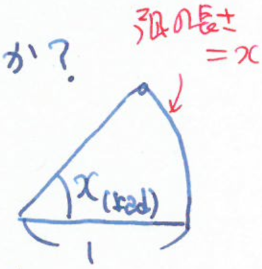
$$= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}\right) = \cos(x+y)$$

となる．$\sin(x+y)$ も同様である． □

〈残った問題〉

① $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ に対して e^x, e^z はどう定義するか？
たとえば $e^{\sqrt{2}}$ はどう定めるか？

② $x \in \mathbb{R}$ に対して $\sin x$, $\cos x$ はどう定義するか？
とくに $x_{(rad)}$ はどう定めるか？



この問題の完全な解答は，［小平，黒田，高木］等を参照せよ．

§2.2 関数の極限

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$ であった.

◎ $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ は $x=2$ で (分母)$=0$ となる. $x=2$で 定義できない

◎ 「近づく」と「代入」はちがう. 「近づく」はどういえばよいか?

定義2.4 (関数の極限)

$I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$.

◎ f が $x\to x_0$ のときに. $A\in\mathbb{R}$ に 収束 する.

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $^\forall\varepsilon>0$ に対して. $^\exists\delta>0$ s.t. $^\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$$0<|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-A|<\varepsilon.$$

このとき. $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ とか $f(x)\to A\ (x\to x_0)$ とかく.

◎ f が $x\to x_0$ のときに. ∞ (resp. $-\infty$) に 発散する.

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $^\forall K>0$ に対し. $^\exists\delta>0$ s.t. $^\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$$0<|x-x_0|<\delta \implies f(x)>K \quad (\text{resp. } f(x)<-K)$$

このとき, $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ (resp. $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$) とか

$f(x)\to\infty\ (x\to x_0)$ (resp. $f(x)\to-\infty\ (x\to x_0)$) とかく.

☑

例2.5

$$x\sin\frac{1}{x}\to 0 \quad (x\to 0).$$

☑

証明

示すこと. $\underbrace{^\forall\varepsilon>0}_{①}$ に対して. $\underbrace{^\exists\delta>0}_{②}$ s.t. $\underbrace{^\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{③}$ に対して

$$\underbrace{0<|x-0|<\delta}_{\boxed{4}} \implies \underbrace{\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon}_{\boxed{5}}$$

1. (考察) $^\forall \varepsilon>0$ に対して. $\delta>0$ をあとで決める. $^\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対し. $0<|x-0|<\delta$ を仮定する. すると

$$\begin{aligned}\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right| &= |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \\ &\leq |x| && \left(\because \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1\right) \\ &< \delta && (\because |x|<\delta)\end{aligned}$$

となる. よって $\boxed{\delta\leq\varepsilon}$ ならば

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right| < \delta \leq \varepsilon$$

となる. この考察をもとに証明をかく.

2. (証明) $\underbrace{^\forall \varepsilon>0}_{①}$ に対して, $\underbrace{\delta:=\varepsilon>0}_{②}$ とおく. $\underbrace{^\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{③}$ に対し $\underbrace{0<|x-0|<\delta}_{\boxed{4}}$ ならば

$$\begin{aligned}\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right| &= |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \\ &\leq |x| && \left(\because \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1\right) \\ &< \delta && (\because |x|<\delta) \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち $\underbrace{\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon}_{\boxed{5}}$ となるので $x\sin\frac{1}{x}\to 0$ $(x\to 0)$ となる □

例2.6

$$x^2\to 1 \quad (x\to 1)$$

証明

示すこと $\underbrace{^\forall \varepsilon>0}_{①}$ に対し $\underbrace{^\exists \delta>0}_{②}$ s.t. $\underbrace{^\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}}_{③}$ に対し

$$\underbrace{0<|x-1|<\delta}_{\boxed{4}} \Longrightarrow \underbrace{|x^2-1|<\varepsilon}_{\boxed{5}}$$

1. (考察) $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ をあとで決める. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ に対し

$0 < |x-1| < \delta$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
|x^2 - 1| &= |(x-1)(x+1)| \\
&= |(x-1)((x-1)+2)| \\
&\leq |x-1|(|x-1|+2) \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&< \delta(\delta+1) \quad (\because |x-1| < \delta)
\end{aligned}
$$

となる. $\boxed{\delta \leq 1}$ を仮定すると. $\delta(\delta+2) \leq 3\delta$ であり.

$\boxed{3\delta \leq \varepsilon}$ も仮定すれば $|x^2-1| < \varepsilon$ となる. この考察をもとに

証明をかく.

2. (証明) $\forall \varepsilon > 0$ に対し. $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\} > 0$ とおくと.

①　②

$\delta \leq 1$ かつ $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ となる. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ に対し, $0 < |x-1| < \delta$ ならば

③　$\boxed{4}$

$$
\begin{aligned}
|x^2 - 1| &= |(x-1)(x+1)| \\
&\leq |x-1|(|x-1|+2) \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&< \delta(\delta+2) \quad (\because |x-1| < \delta) \\
&\leq 3\delta \quad (\because \delta \leq 1) \\
&\leq \varepsilon \quad (\because \delta \leq \tfrac{\varepsilon}{3}).
\end{aligned}
$$

すなわち $|x^2-1| < \varepsilon$ となるので $x^2 \to 1 \ (x \to 1)$ となる. □

$\boxed{5}$

上記 例2.5, 2.6 の議論を ε-δ 論法という。

定理2.4

$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $f(x) \to A \quad (x \to x_0)$

$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対し $x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \Rightarrow f(x_n) \to A \ (n \to \infty)$:

証明

($\Rightarrow$) $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対し、$x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ を仮定する。

$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$f(x) \to A$ $(x \to x_0)$ より、

$\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ —(*)

が成り立つ。$x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ より $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta \quad \text{—(**)}$$

となるので (**) と (*) より、$n \geq N_0$ ならば $|f(x_n) - A| < \varepsilon$

が成り立つ。

($\Leftarrow$) 背理法で示す。$\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $\forall \delta > 0$ に対し、$\exists x_\delta \in I \setminus \{x_0\}$

s.t. $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ かつ $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$ を仮定する。

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $\delta = \frac{1}{n}$ とえらぶと、$\exists x_n \in I \setminus \{x_0\}$ s.t.

$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$

となる。$n \to \infty$ とすると $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ となり、

$f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$ とならない。これは、最初の仮定

$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対し、$x_n \to x_0$ $(n \to \infty) \Rightarrow f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$

に矛盾する。 $\square$

定理2.4を用いると、数列の極限と同じことはほとんどそのまま成り立つ。

定理2.5

$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,

$f(x) \to A$ $(x \to x_0)$, $g(x) \to B$ $(x \to x_0)$

$\Rightarrow$ (1) $f(x) + g(x) \to A + B$ $(x \to x_0)$

(2) $f(x)g(x) \to AB$ $(x \to x_0)$

定理2.6 (Cauchyの収束条件)

$I=(a,b)\subset\mathbb{R},\ x_0\in I,\ f: I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}.$

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ が存在

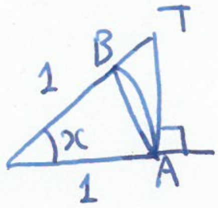
$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$ に対して. $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x, x'\in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$0<|x-x_0|<\delta,\ 0<|x'-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$ 四

例2.7

$$\frac{\sin x}{x}\to 1 \quad (x\to 0)$$ 四

証明の方針



右図から $0<x<\frac{\pi}{4}$ において.

$\overline{AB}\le\widehat{AB}\le\overline{AT}$

であり.

$\overline{AB}=\sqrt{2-2\cos x}$ (∵余弦定理)

$=\sqrt{2-2(1-2\sin^2\frac{x}{2})}$ (∵倍角公式)

$=2\sin\frac{x}{2}$,

$\widehat{AB}=x$ (∵ラジアンの定義),

$\overline{AT}=\tan x$

より $\dfrac{1}{\tan x}\le\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ だから $\dfrac{\sin x}{\tan x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$,

すなわち

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le\cos\frac{x}{2} \qquad —(*)$$

となる. $-\frac{\pi}{4}<x<0$ のときは x のかわりに $-x$ を(*)に代入すれば

$\cos(-x)\le\dfrac{\sin(-x)}{-x}\le\cos(-\frac{x}{2})$, すなわち (*) が得られる.

よって $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})\setminus\{0\}$ で(*)が成り立つので $x\to 0$ とすると

$\cos x\to 1,\ \cos\frac{x}{2}\to 1\ (x\to 0)$ からはさみうちの原理により

$\frac{\sin x}{x}\to 1\ (x\to 0)$ が得られる. □

〈片側極限〉

$x \to x_0+0$, $x \to x_0-0$ を定式化する.

定義2.5 (片側極限)

$I=(a,b)\subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f: I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$.

① f が $x \to x_0+0$ (or $x \downarrow x_0$) のとき, $A \in \mathbb{R}$ に収束する.

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ ${}^\forall \varepsilon>0$ に対して, ${}^\exists \delta>0$ s.t. ${}^\forall x \in I\setminus\{x_0\}$ に対して,

$$0<x-x_0<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

このとき, $\displaystyle\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A$ とか $f(x)\to A$ $(x\to x_0+0)$ とかく

($x \to x_0+0$ のかわりに $x \downarrow x_0$ とかいてもよい)

② f が $x \to x_0-0$ (or $x \uparrow x_0$) のとき, $A \in \mathbb{R}$ に収束する.

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ ${}^\forall \varepsilon>0$ に対して, ${}^\exists \delta>0$ s.t. ${}^\forall x \in I\setminus\{x_0\}$ に対して

$$0<x_0-x<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

このとき, $\displaystyle\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A$ とか $f(x)\to A$ $(x\to x_0-0)$ とかく.

($x \to x_0-0$ のかわりに $x \uparrow x_0$ とかいてもよい) □

〈無限大での極限〉

定義2.6 (無限大での極限)

① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x\to\infty$ (resp. $x\to-\infty$) で $A\in\mathbb{R}$ に収束する.

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ ${}^\forall \varepsilon>0$ に対して, ${}^\exists K>0$ s.t. ${}^\forall x\in\mathbb{R}$ に対して.

$$x>K \ (\text{resp. } x<-K) \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

このとき, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=A$ (resp. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$) とか,

$f(x)\to A$ $(x\to\infty)$ (resp. $f(x)\to A$ $(x\to-\infty)$) とかく. □

注意2.4

f が (正の/負の) 無限大に発散する場合も定義できる (各自考えよ) □

§2.3 連続関数

関数が連続であるとは、感覚的にはグラフがつながっていることであった。この定式化を考える。

定義2.7 (関数の連続性)

- $I \subset \mathbb{R}$ に対し $f: I \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in I$ で連続

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対して、${}^\exists \delta > 0$ s.t. ${}^\forall x \in I$ に対して

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- $I \subset \mathbb{R}$ に対し、$f: I \to \mathbb{R}$ が I 上連続

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall x_0 \in I$ に対して、f は x_0 で連続。 ☒

注意2.5

$f: I \to \mathbb{R}$ が I 上連続

$\overset{\text{同値}}{\iff}$ ${}^\forall x_0 \in I$ と ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対して、${}^\exists \delta > 0$ s.t. ${}^\forall x \in I$ に対して

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

x_0 は δ より先にとることに注意せよ。 ☒

命題2.1

$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

f が x_0 で連続 $\overset{\text{同値}}{\iff}$ $f(x) \to f(x_0)$ $(x \to x_0)$. ☒

証明は web ノート。

例2.8

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x^3 - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ で定義する。このとき、f は $x = 2$ で連続となる。

☒

証明

示すこと　$\forall \varepsilon>0$ に対し、$\exists \delta>0$ s.t. $\forall x\in\mathbb{R}$ に対し
$|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(2)|<\varepsilon$

1. (考察) $\forall \varepsilon>0$ に対して、$\delta>0$ をあとで決める。$\forall x\in\mathbb{R}$ に対して、$|x-2|<\delta$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(2)| &= |(x^3-1)-(2^3-1)| \\
&= |x^3-8| \\
&= |(x-2)(x^2+2x+4)| \\
&= |x-2|\,|(x-2)^2+6x| \\
&= |x-2|\,|(x-2)^2+6(x-2)+12| \\
&\leq |x-2|\left(|x-2|^2+6|x-2|+12\right) \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&< \delta(\delta^2+6\delta+12) \quad (\because |x-2|<\delta) \\
&\leq \delta(1+6+12) \quad (\boxed{\delta\leq 1} \text{ と仮定}) \\
&= 19\delta
\end{aligned}
$$

となる。$\boxed{19\delta\leq\varepsilon}$ と仮定すれば $|f(x)-f(2)|<19\delta\leq\varepsilon$ となる。この考察をもとに証明をかく。

2. (証明) $\forall \varepsilon>0$ に対して、$\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{19}, 1\right\}>0$ とおく。
$\delta\leq\frac{\varepsilon}{19}$，$\delta\leq 1$ となることに注意する。$\forall x\in\mathbb{R}$ に対して
$|x-2|<\delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(2)| &= |x-2|\,|(x-2)^2+6(x-2)+12| \\
&\leq |x-2|\left(|x-2|^2+6|x-2|+12\right) \\
&\qquad (\because \text{三角不等式})
\end{aligned}
$$

$$< \delta(\delta^2+6\delta+12) \quad (\because |x-2|<\delta)$$
$$\leq 19\delta \quad (\because \delta \leq 1)$$
$$\leq \varepsilon \quad (\because \delta \leq \frac{\varepsilon}{19})$$

すなわち $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$ となるので f は $x=2$ で

15

連続となる. □.

注意2.6

例2.8について. 証明は 2. のみでよいが. $\delta>0$ をどうやってとったかわかるように. 1. もかいた方がわかりやすい.

例2.9

例2.8の f について. f は $\mathbb{R}$ 上連続である.

証明

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ と $\forall \varepsilon>0$ に対し, $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3x_0^2}, 1\right\}>0$ とおく. このとき. $\delta \leq \frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3x_0^2}$, $\delta \leq 1$ に注意する.

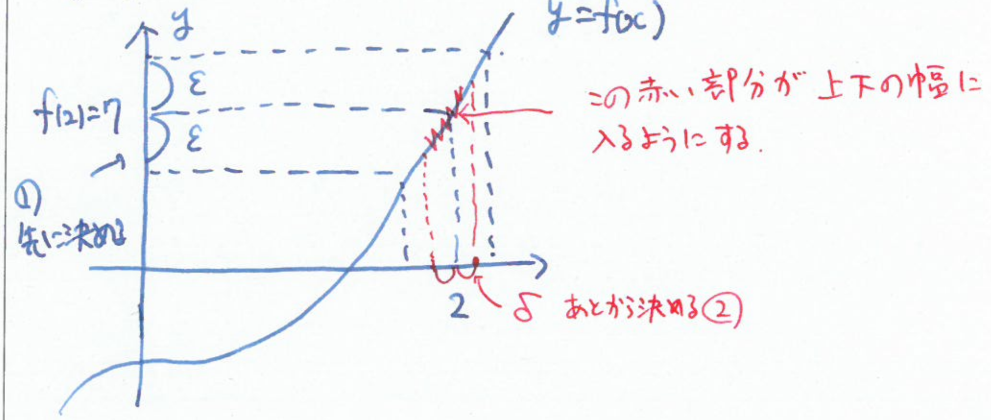
$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し. $|x-x_0|<\delta$ ならば

$$|f(x)-f(x_0)| = |x-x_0|\,|(x-x_0)^2+3x_0(x-x_0)+3x_0^2| \quad (\text{各自})$$
$$\leq |x-x_0|\,(|x-x_0|^2+3|x_0|\,|x-x_0|+3x_0^2) \quad (\because \text{三角不等式})$$
$$< \delta(\delta^2+3|x_0|\delta+3x_0^2) \quad (\because |x-x_0|<\delta)$$
$$\leq \delta(1+3|x_0|+3x_0^2) \quad (\because \delta \leq 1)$$
$$\leq \varepsilon \quad (\because \delta \leq \frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3x_0^2})$$

すなわち $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ となるので f は x_0 で連続となる.

$x_0 \in \mathbb{R}$は任意だったから，fはI上連続である． □

〈例2.8のグラフ〉



<u>例2.10</u>

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$を$x\in\mathbb{R}$に対し

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \left(x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\},\ x=\dfrac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}\text{は互いに素}\right) \\ 0 & (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\text{ または }x=0) \end{cases}$$

と定める．fは$x=0$で連続，$x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$で不連続となる． ▨

<u>注意2.7</u>

例2.10はグラフをかくことが難しいので，ε-δ論法を使わないと証明が困難である． ▨

〈ε-N論法，ε-δ論法：感覚と厳密さ〉

$f(x)\to A\ (x\to x_0)$の感覚 $=$ xがx_0に近づくと$f(x)$はAに近づく．

<u>困ること</u>　「近づく」は人によってまちまち．

<u>厳密な取り扱い</u>

$f(x)$はAに近づく → 誤差$|f(x)-A|$を$\varepsilon>0$より小さくなるように
先に与えておく．

xがx_0に近づく → $0<|x-x_0|<\delta$なら(誤差)$<\varepsilon$となるように
$\delta>0$をあとから決める．

〈連続関数の性質〉

定義2.8（関数の和，スカラー倍）

$I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: I \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して．和 $f+g: I \to \mathbb{R}$, スカラー倍 $\lambda f: I \to \mathbb{R}$, 積 $fg: I \to \mathbb{R}$ を それぞれ $x \in I$ に対して

$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$, $(fg)(x) := f(x)g(x)$

と定義する． ☒

定義2.9（関数の合成）

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し 関数の合成 $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g \circ f(x) := g(f(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

で定義する． ☒

定理2.7

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) f, g が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続 $\Rightarrow$ ${}^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して．$f+g$, λf, fg は $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続

(2) f, g が $\mathbb{R}$ 上連続 $\Rightarrow$ $g \circ f$ は $\mathbb{R}$ 上連続． ☒

証明

(1) は演習とする．(2) を示す．${}^\forall x_0 \in \mathbb{R}$ に対し，$g \circ f$ が x_0 で連続となることを示す．${}^\forall \varepsilon > 0$ に対し，g は $y_0 = f(x_0)$ で連続なので ${}^\exists \delta_1 > 0$ s.t. ${}^\forall y \in \mathbb{R}$ に対して．

$$|y - f(x_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad —(*)$$

とできる．次に．この $\delta_1 > 0$ に対し．f が x_0 で連続なので ${}^\exists \delta > 0$ s.t. ${}^\forall x \in \mathbb{R}$ に対し

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\delta_1 \quad \text{---}(**)$$

とできる．よって $(*)$ の y として $y=f(x)$ とすれば．$^\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $|x-x_0|<\delta$ ならば

$$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\varepsilon \quad \left(\because\ (**) \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\delta_1 \text{ と } (*)\right)$$

つまり $|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)|<\varepsilon$ となる．従って $g\circ f$ は x_0 で連続となる．$x_0\in\mathbb{R}$ は任意だったから $g\circ f$ は $\mathbb{R}$ 上連続となる．

□

§2.4 閉区間上の連続関数

$[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は重要な性質がある．

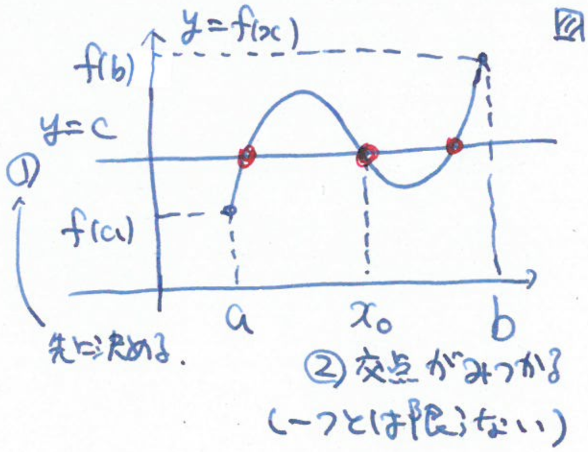
定理2.8（中間値の定理）

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $\boxed{[a,b]\text{上}}$ 連続．$f(a)<f(b)$

$\Rightarrow {}^\forall c\in(f(a),f(b))$ に対して．${}^\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $f(x_0)=c$

〈中間値の定理のイミ〉

${}^\forall c\in(f(a),f(b))$ に対して．直線 $y=c$ とグラフ $y=f(x)$ は まじわるということ。



証明

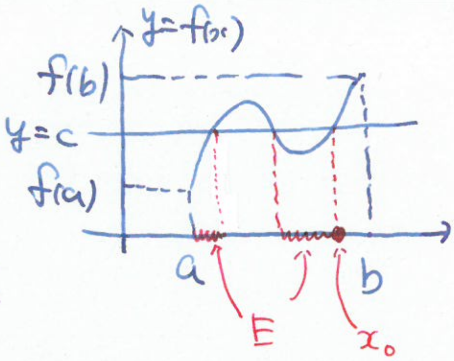
${}^\forall c\in(f(a),f(b))$ に対し．$E:=\{x\in[a,b] : f(x)\leq c\}$ とおく。

$x_0 := \sup E$ とおくと

$[a,b]$が閉区間より

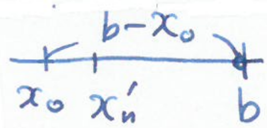
$x_0 \in [a,b]$ となる.

以下. $f(x_0) = c$ となることを示す.



1. $f(x_0) \leq c$ を示す. $x_0 = \sup E$ より. $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ s.t. $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$ とできる. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in E$ より $f(x_n) \leq c$ であり. fは$[a,b]$上連続だから $n\to\infty$ とすると $f(x_0) \leq c$ がわかる.

2. $f(x_0) \geq c$ を示す. $f(x_0) \leq c < f(b)$ より $x_0 \neq c$ であり. $\forall n \in \mathbb{N}$に対し $x_n' := x_0 + \frac{b-x_0}{n}$ とおくと $x_0 < x_n' \leq b$ となる. $x_0 = \sup E$ より $x_n' \notin E$ だから $f(x_n') > c$ となる.



$n\to\infty$とすると fは$[a,b]$上連続かつ$x_n' \to x_0$ $(n\to\infty)$ だから. $f(x_0) \geq c$ となる.

1. 2. より $f(x_0) = c$ となる. □

<u>例2.11</u>

$k=0,1,2$, $c_k \in \mathbb{R}$に対して方程式 $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$ は実数解を持つ ▨

<u>証明</u> (少しまじめに評価してみる).

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を$f(x) := x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ $(x \in \mathbb{R})$とおく.

$M := \max\{|c_0|, |c_1|, |c_2|\} + 1$ とおくと fは$[-2M, 2M]$上連続であり.

$$
\begin{aligned}
f(-2M) &= -8M^3 + 4c_2M^2 - 2c_1M + c_0 \\
&\leq -8M^3 + 4M^3 + 2M^3 + M^3 \quad (\because |c_k| \leq M \text{ と } M \geq 1) \\
&= -M^2 < 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(2M) &= 8M^3 + 4c_2M^2 + 2c_1M + c_0 \\
&\geq 8M^3 - 4M^3 - 2M^3 - M^3 \quad (\because |c_k| \leq M \text{ と } M \geq 1) \\
&= M^2 > 0,
\end{aligned}
$$

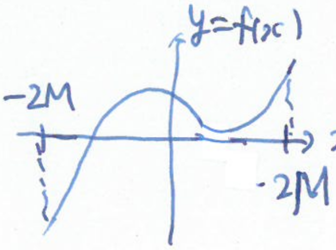
すなわち $f(-2M) < 0 < f(2M)$

となるから、中間値の定理より

$\exists x_0 \in [-2M, 2M]$ s.t. $f(x_0) = 0$

↖係数だけでわかる

となる。



□

<u>定理2.9</u> (Weierstrassの定理)

$f : [a.b] \to \mathbb{R}$ が連続.

$\Rightarrow$ fは最大値, 最小値を持つ. すなわち,

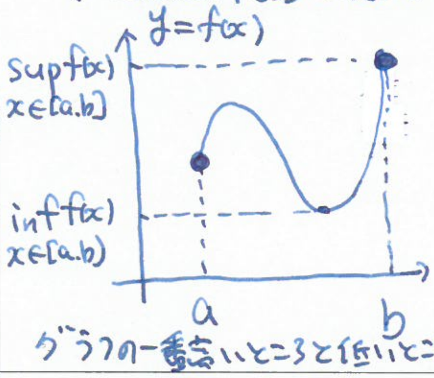
$$\sup_{x\in[a.b]} f(x) := \sup\{f(x) : x \in [a.b]\} = \max_{x\in[a.b]} f(x)$$

$$\inf_{x\in[a.b]} f(x) = \min_{x\in[a.b]} f(x)$$

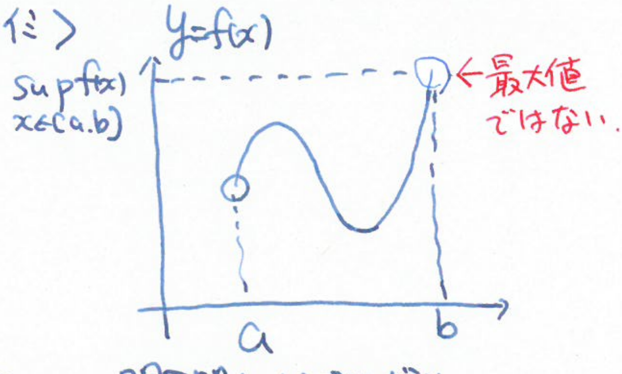
が成り立つ.

□

〈Weierstrassの定理の例〉



グラフの一番高いところと低いところがある.



開区間(a.b)ではダメ.

証明

最大値の存在を示す.

1. 収束する近似列を作る. $M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ とおくと,

$^\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ s.t. $f(x_n) \to M$ $(n \to \infty)$ とできる.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界列なので Bolzano-Weierstrass の定理より収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する.

2. $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ とするとき, $f(x_0) = M$ となることを示す. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset [a,b]$ より $x_0 \in [a,b]$ となる.

f は $[a,b]$ 上連続だから

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \qquad (k \to \infty)$$

となる. 他方 $f(x_n) \to M$ $(n \to \infty)$ だから

$$f(x_{n_k}) \to M \qquad (k \to \infty)$$

となるので $M = f(x_0)$ となる. よって $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ は最大値となる. $\square$

〈一様連続性〉

$I \subset \mathbb{R}$ に対し $f: I \to \mathbb{R}$ が I 上連続 のとき、一般に定義でとれる $\delta > 0$ は $x_0 \in I$ で異なる。

例2.12

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$ と定めると f は $\mathbb{R}$ 上連続となる。

$x_0 \in \mathbb{R}$ に対し、ε-δ 論法の $\delta > 0$ がどうとれるかみてみよう。

${}^\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\delta > 0$ をあとで決める。${}^\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、

$|x - x_0| < \delta$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0| \\
&= |(x - x_0)(x - x_0 + 2x_0)| \\
&\leq |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|) \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&< \delta(\delta + 2|x_0|) \quad (\because |x - x_0| < \delta)
\end{aligned}
$$

となる。$\boxed{\delta \leq 1}$ と $\boxed{\delta(1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon}$ を仮定すれば

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta(1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon$$

となる。この2つの仮定をみたすように δ を決めるには、

たとえば $\delta := \min\left\{ \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}, 1 \right\} > 0$ とればよいが、

$|x_0|$ が大きくなれば、δ はいくらでも小さくなることがわかる。

すなわち

$$\frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} \to 0 \qquad (|x_0| \to \infty)$$

がわかる。

□

例2.13

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x):=x$ $(x\in\mathbb{R})$ と定めると、f は $\mathbb{R}$ 上連続となる。$x_0\in\mathbb{R}$ に対し、ε−δ 論法の $\delta>0$ がどうとれるかみてみよう。

${}^\forall\varepsilon>0$ に対し、$\delta>0$ をあとで決める。${}^\forall x\in\mathbb{R}$ に対し、

$|x-x_0|<\delta$ を仮定すると

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= |x-x_0| \\ &< \delta \qquad (\because |x-x_0|<\delta)\end{aligned}$$

となるから、$\boxed{\delta\le\varepsilon}$ を仮定すれば

$$|f(x)-f(x_0)|<\delta\le\varepsilon$$

となる。従って $\delta=\varepsilon$ ととればよいが、$x_0\in\mathbb{R}$ がどの値であっても、δ は小さくならない（0にならない）ことがわかる。 ☒

例2.13はよりよい連続性ということである。これを定式化してみる。

定義2.10（一様連続）

$I\subset\mathbb{R}$ に対し、$f:I\to\mathbb{R}$ が I 上一様連続

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall\varepsilon>0$ に対し、${}^\exists\delta>0$ s.t. ${}^\forall x,x'\in I$ に対して

$$|x-x'|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$$ ☒

例2.14

例2.13の f は $\mathbb{R}$ 上一様連続である。 ☒

証明

${}^\forall\varepsilon>0$ に対し、$\delta:=\varepsilon>0$ ととる。${}^\forall x,x'\in\mathbb{R}$ に対し、

$|x-x'|<\delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x')| &= |x - x'| \\
&< \delta \qquad (\because |x-x'|<\delta) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

すなわち $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ となるので f は $\mathbb{R}$ 上一様連続である。 □

一般に、一様連続かどうかを定義に従って示すのは難しい。しかし、次の強力な定理がある。

定理2.10

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続

$\Longrightarrow$ f は $[a,b]$ 上一様連続。 ☑

注意2.8

定理2.10は f の定義域が有界閉区間であることが重要。非有界だったり、閉区間では成り立たない。 ☑

定理2.10の証明

背理法で示す。つまり、f が $[a,b]$ 上一様連続でないと仮定する。

1. f が $[a,b]$ 上一様連続でないことを論理記号でかくと、$^{\exists}\varepsilon_0>0$ s.t. $^{\forall}\delta>0$ に対して、$^{\exists}x_\delta, x'_\delta\in[a,b]$ s.t. $|x_\delta - x'_\delta|<\delta$ かつ $|f(x_\delta)-f(x'_\delta)|\geq\varepsilon_0$。

とできる。

否定の作り方. $\exists \to \forall$, $\forall \to \exists$

$p \Rightarrow q \longrightarrow p$ かつ「qでない」

2. 1. でとれる $\varepsilon_0 > 0$ と $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $\delta := \frac{1}{n}$ とおく。
すると, $\exists x_n, x_n' \in [a,b]$ s.t. $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ かつ
$|f(x_n) - f(x_n')| \geqq \varepsilon_0$ とできる。

3. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset [a,b]$ は有界列だから Bolzano-Weierstrass の定理より, 収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ が存在する。
$x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ とすると, $x_0 \in [a,b]$ である。また,

$$\begin{aligned} |x_{n_k}' - x_0| &\leq |x_{n_k}' - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \\ &\leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \\ &\to 0 \qquad (k \to \infty) \end{aligned}$$

となるから, $x_{n_k}' \to x_0$ $(k \to \infty)$ がわかる。

4. f は $[a,b]$ 上連続だから

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \quad f(x_{n_k}') \to f(x_0) \quad (k \to \infty)$$

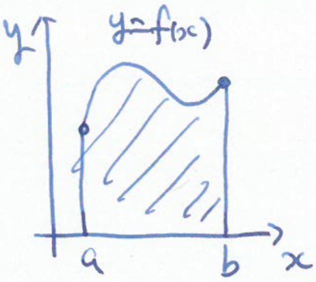
となる. 他方, 2. より $|f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| \geqq \varepsilon_0$ であり,
ε_0 は n に依らないから $k \to \infty$ とすると

$$\varepsilon_0 \leq |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

となり, $\varepsilon_0 > 0$ であったことに矛盾する. □

注意2.9

定理2.10は $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続のときに、右図の斜線部分の面積が(素朴な意味で)決まることを示すのにつかう(後期でやる)。



図

〈まとめ〉

① 関数の極限、連続性の定義「限りなく近づく」を $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて定式化した。天才にしかわからなかった「限りなく近づく」が(難易度はともかく)だれでも客観的にわかるようになった。

② グラフで書いたら直観的には正しいと思える「中間値の定理」、「Weierstrassの定理」を「グラフからわかる」を用いずに示した。

③ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $|a_n - a|$ をどう評価するかが重要

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ $|f(x) - A|$ をどう評価するかが重要