微分積分学 A 演習問題 (2016 年 4 月 14 日)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束するとは, $|a_n - a|$ が n を大きくすると 0 に近づくことである. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と書くことにする[1].

例 1.1.
$\left\{\dfrac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 2 に収束する.

証明.
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{2}{1} = 2$ に注意すると

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| &= \left|\frac{2(n+1)-2}{n+1} - 2\right| \\ &= \left|2 - \frac{-2}{n+1} - 2\right| = \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

となり, n を大きくすると, $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right|$ は 0 に近づく. □

注意 1.1.
高校でやったような

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{2}{1} = 2 \quad (n\to\infty), \text{ or } \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2$$

は答えを求めるにはこれでよいが, 証明にはならない.

問題 1.1.
$n \in \mathbb{N}$ に対して[2] $a_n := \dfrac{3n+1}{n}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, 証明を与えよ.

問題 1.2.
$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := \dfrac{3n-2}{2n+3}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, 証明を与えよ.

問題 1.3 (講義ノート 例 1.3)**.**
$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ を証明せよ.

問題 1.4.
次の各問いに答えよ.
(1) -2 を与える有理数の切断 $\langle A, B\rangle$ を求めよ.
(2) $\sqrt{5}$ を与える有理数の切断 $\langle A, B\rangle$ を求めよ.

---

[1] 高校までは数列 $\{a_n\}$ と書いていたが, 数列の添字が何であるかをはっきりさせるために $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書くことにする.
[2] 「自然数 n に対して」と同じ意味.

問題 1.5.

$x, y \in \mathbb{R}$ に対して[3], 次の問いに答えよ.

(1) $|x+y| \leq |x| + |y|$ を示せ. なお, この不等式を**三角不等式**という (ヒント: $(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2$ を考える. $(\text{左辺}), (\text{右辺}) \geq 0$ はどこに書くのが適切か？).

(2) $||x| - |y|| \leq |x-y|$ を示せ (ヒント: $|x| = |x-y+y|$, $|y| = |y-x+x|$ を用いる).

問題 1.6.

$x > 0$ とする. すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

問題 1.7.

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ に対して, $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ とおく. このとき $h_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$ を示せ (ヒント: $1 + h_n = \sqrt[n]{n}$ と問題 1.6).

問題 1.8.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ となることの証明を与えよ.

問題 1.9.

実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := r^n$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることの証明を与えよ (ヒント: $x := r^{-1} - 1$, すなわち $r^{-1} = 1 + x$ とおいて, 問題 1.6 を用いる).

---

[3]「実数 x, y に対して」と同じ意味.

微分積分学 A 演習問題　(2016 年 4 月 21 日)

問題 2.1 (講義ノート 例. 1.14)**.**

$\inf[0,1)$ を求め, その証明を与えよ. なお, 講義の例 1.14 のように, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 2.2.

$\sup(-2,1)$ を求め, その証明を与えよ. なお, 講義の例 1.14 のように, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 2.3.

$\inf(-2,1)$ を求め, その証明を与えよ. なお, 講義の例 1.14 のように, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 2.4.

$A := \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ とおく. $\sup A$ を求め, その証明を与えよ. また, $\max A$ が存在するかどうか答えよ (ヒント: 講義の例 1.14 のように, 中点を取るというアイデアはうまくいかない. Archimedes の原理を使う必要があるが, どのように記述すればよいか?).

問題 2.5.

問題 2.4 の A について, $\inf A$ を求め, その証明を与えよ. また, $\min A$ が存在するかどうか答えよ.

問題 2.6 (講義ノート 注意 1.4)**.**

$A := \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ と定める. $\sup A = \sqrt{2}$ となることの証明を与えよ. なお, 証明には, 有理数の稠密性を用いる. このことにより, 有理数の部分集合の上限は一般に有理数にならないことがわかる.

問題 2.7.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := 1 - \dfrac{1}{n}$ とおく.

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加である, すなわち, 「$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$」となることを示せ.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めて, 証明を与えよ.

問題 2.8.

問題 2.7 の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

と書く. $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を求めて, 証明を与えよ (ヒント: 実は問題 2.4 と聞いていることは同じ).

問題 2.9.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$$

を示せ (ヒント: $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $b := \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$ とおくときに, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n + b_n \leq a + b$ となることを示せ.).

問題 2.10 (cf. 白岩 p.31)**.**

次の集合の上限, 下限を求めよ (発表や発表用提出ノートではどうしてその答えになるのかの説明をせよ).

(1) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

(2) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < x + 1\}$

(3) $\{3n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$

(4) $\left\{\sin \dfrac{n\pi}{4} : n \in \mathbb{Z}\right\}$

(5) $\left\{\dfrac{1}{m} + (-1)^n \dfrac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

微分積分学 A 演習問題　(2016 年 4 月 28 日)

問題 3.1.
　自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 3.2.
　自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n-2}{2n+3}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 3.3.
　自然数 n に対して $a_n := \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ となることの証明を ε-N 論法を用いて証明せよ. (ヒント: アイデアは問題 1.8)

問題 3.4.
　実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = r^n$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを, ε-N 論法を用いて証明せよ. ただし, log を使わずに証明すること (ヒント: アイデアは問題 1.9)

問題 3.5.
　実数 $r > 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = r^n$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ となることを, ε-N 論法を用いて証明せよ. ただし, log を使わずに証明すること (ヒント: $r = 1 + x$ と書きかえてから問題 3.4 と同じような計算をする).

問題 3.6.
　自然数 n に対して $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ とおく.

(1) すべての n について, $a_n < b_n$ であることを示せ.
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ. ただし, ε-N 論法を用いなくてよい.
(3) 定理 1.5 の (3) は二つの不等号 $\leq$ を $<$ にかえてはいけないことを説明せよ.

問題 3.7 (cf. 定理 1.5)**.**
　数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 有界である. つまり, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つことを示せ.

問題 3.8 (cf. 定理 1.5)**.**
　収束数列 $\{a_n\}_{n=1}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ が成り立つとする. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ となることを示せ.

問題 3.9 (等比級数: 収束する場合)**.**

実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$ とおく.

(1) a_n を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ を用いずに表せ (注意:わからない人は高校の復習をすること!!!)

(2) a_n が収束することを示せ. なお, ε-N 論法を用いなくてよい.

問題 3.10 (等比級数: 発散する場合)**.**

実数 $r \geq 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$ とおく.

(1) a_n を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ を用いずに表せ ($r = 1$ と $r > 1$ の二通りについて場合わけして考えよ).

(2) a_n が正の無限大に発散することを示せ. なお, ε-N 論法を用いなくてよい.

微分積分学 A 演習問題 (2016 年 5 月 12 日)

問題 4.1.

次の極限値を求めよ. ただし, ε-N 論法を用いなくてもよい.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{4^n+3^n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-4^n}{3^n}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(9) $2-3+\dfrac{9}{2}-\cdots$ となる無限等比級数

(10) $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-4)+\cdots$ となる無限等比級数

問題 4.2.

$a, b>0$ に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ を求めよ.

問題 4.3.

$x\in\mathbb{R}$ に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x(e^{nx}-e^{-nx})}{e^{nx}+e^{-nx}}$ を求めよ.

問題 4.4.

次の極限を求め, ε-N 論法を用いて証明を与えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ (ヒント: $x>0$ に対して $\sqrt{1+x}\le 1+x$ である)

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ (ヒント: $n\in\mathbb{N}$ に対して $n\le n^2$ である)

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (ヒント: $n\in\mathbb{N}$ に対して $|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)|\le 1$ である)

問題 4.5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束したとする. このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ を ε-N 論法を用いて証明せよ (ヒント: 問題 1.5 の (2) を使う).

問題 4.6.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a\in\mathbb{R}$ に収束するとする. すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ が成り立つとする. このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ となることを ε-N 論法を用いて証明せよ.

問題 4.7.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a - b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 4.8.
任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, 有理数列 $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} q_k = x$ とできることを示せ (ヒント: 有理数の稠密性を使う. $k \in \mathbb{N}$ に対して, $x < x + \dfrac{1}{k}$ である)

注意.
$\mathbb{R}$ 上の部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ に対して, A が B において**稠密**であるとは, すべての $b \in B$ に対して A 内の数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ が存在して, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = b$ とできることをいう. 稠密を考えるときは通常, $A \subset B$ であることが多い.

問題 4.9.
収束数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ を仮定する. このとき, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_0$ ならば $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$ が成り立つことを示せ.

問題 4.10.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする.

(1) $(a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + a(b_n - b)$ を計算せよ.
(2) 数列 $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ab に収束することを ε-N 論法を用いて示せ. なお, **収束する数列は有界であることは用いずに**示してみよ.

微分積分学 A 演習問題　(2016 年 5 月 19 日)

問題 5.1.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界かつ単調減少となるならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

となることを示せ.

問題 5.2 (優収束定理)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_n|$ とおく.

(1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加となることを示せ.

(2) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq b_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_n < \infty$ をみたすとする. このとき $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ.

問題 5.3.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ とおく. 1 に収束する $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束部分列と, -1 に収束する $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束部分列をそれぞれ作れ.

問題 5.4.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := \sin\left(\dfrac{n}{4}\pi\right)$ とおく. 収束先の異なる収束部分列を 4 つ作れ.

問題 5.5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $b_n := \sup_{k\geq n} a_n$ とおく. このとき, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少になることを示せ (ヒント: $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} \ldots\} \subset \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\}$).

問題 5.6 (講義ノート 定理 1.6)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束し, $b \neq 0$ かつ, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \neq 0$ と仮定する. このとき, $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ $(n \to \infty)$ となることを示せ. ただし, 問題 4.9 は証明抜きに用いてよい.

問題 5.7.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{4n-3}$ を求めて, ε-N 論法を用いて証明を与えよ.

問題 5.8.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n > 0$ をみたすとする. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$ が同値であることを示せ.

問題 5.9.

次が正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a \in \mathbb{R}$ に収束し, ある正定数 $K > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < K$ と仮定する. このとき, $a < K$ が成り立つ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ をみたすとする. このとき, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が成り立つ.

問題 5.10.

次をみたす数列の例を与えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するが $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は発散する.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが, $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = 0$ となる.

微分積分学 A 演習問題 　(2016 年 5 月 26 日)

中間試験では, 有界や上限, 下限, 数列の収束, 単調増加, 単調減少, 自然対数の底, Cauchy 列の定義や「実数の連続性」, 「Archimedes の原理」, 「有界な単調数列の収束性」, 「Bolzano-Weierstrass の定理」, 「実数の完備性」に関する定理の主張を聞く問題も出すつもりでいるので, 過去問をみるなどして準備をしておくこと.

問題 6.1.

数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることを定義に基づいて示せ. ただし, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを用いずに示せ.

問題 6.2.

$r, q, x \in \mathbb{R}$, $r \neq \pm 1$ に対して, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + q \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を調べることで, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束するための r に関する条件を求めよ. ただし, 縮小写像の原理は用いないこと.

(3) 縮小写像の原理を用いて, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための r に関する条件を求めよ.

問題 6.3 (講義ノート 定理 1.12)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して, ある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}|$$

をみたすとする. このとき, $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $m > n$ ならば

$$|a_m - a_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|a_1 - a_0|$$

となることを示せ.

問題 6.4.

$A > 1$, $x > 0$ に対して漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n + A} \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

を考える. 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束することを示せ.

問題 6.5.

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ はある定数 $0\le L<1$ が存在して, すべての $y_1, y_2\in\mathbb{R}$ に対して

$$|f(y_1)-f(y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

をみたすとする. このとき, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=f(a_n) \\ \quad a_0=x>0 \end{cases}$$

により定まる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束することを示せ.

問題 6.6.

$0<r<1$, $k>0$, $n\in\mathbb{N}$ に対して, $a_n:=n^k r^n$ とおく.

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ となる $n\in\mathbb{N}$ の条件を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ.

問題 6.7.

$r>0$, $n\in\mathbb{N}$ に対して, $a_n:=\dfrac{r^n}{n!}$ とおく.

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ となる $n\in\mathbb{N}$ の条件を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ.

問題 6.8.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $S_n:=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $S\in\mathbb{R}$ に収束するとき, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は S に収束するという.

(1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を, S_n を使わずに a_n を用いて書け.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ.

問題 6.9.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ.

微分積分学 A 演習問題　(2016 年 6 月 2 日)

問題 7.1.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^2$ で定義する.

(1) 像 $f([-2, 1])$ を求めよ.

(2) 任意の $x_1, x_2 > 0$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ となることを示せ.

問題 7.2.

次を求めよ.

(1) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\arctan(1)$

(4) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)\right)$

問題 7.3.

指数法則と逆関数の性質を用いて, 「任意の $a, b > 0$ に対して $\log(ab) = \log a + \log b$ を示せ.

問題 7.4.

$a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $a^x := \exp(x \log a)$ と定義する. 任意の $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $(ab)^x = a^x b^x$ となることを, 定義に基づいて示せ.

注意.

問題 7.4 のアイデアを使うと, 高校では対数微分法の練習問題として習ったであろう微分の計算 $(a^x)'$ や $(x^x)'$ を

$$(a^x)' = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) \log a = a^x \log a$$
$$(x^x)' = (\exp(x \log x))' = \exp(x \log x)(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

と計算することができる.

問題 7.5.

$a > 0$, $a \neq 1$ に対して, 底の変換公式

$$\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$$

を導け.

注意.

問題 7.5 より, $a > 0$, $a \neq 1$ に対して, 底を a とする対数 $\log_a$ を, $y > 0$ に対して

$$\log_a y := \frac{\log y}{\log a}$$

と定義することができる. つまり, a^x や $\log_a y$ は指数関数 e^x と自然対数 $\log$ があれば自然に定義することができる.

注意.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が**奇関数**であるとは「任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(-x)=-f(x)$」, **偶関数**であるとは「任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(-x)=f(x)$」となることをいうのであった.

問題 7.6.

任意の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して, ある奇関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とある偶関数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在して, $f=g+h$ と書けることを示せ (ヒント: 書けるとしたらどうなるか？).

問題 7.7.

Euler の公式と指数法則をみとめて, 任意の $x,y\in\mathbb{R}$ に対して加法定理

$$\sin(x+y)=\cos x\sin y+\sin x\cos y$$

を示せ.

問題 7.8.

$x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\cosh x:=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \sinh x:=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \tanh x:=\frac{\sinh x}{\cosh x},$$

と定義する. $\cos(hx)$ とは違うことに注意せよ. これらの関数を**双曲線関数**という. $\cosh^2 x-\sinh^2 x$ を計算せよ.

問題 7.9.

すべての $x,y\in\mathbb{R}$ に対して, 双曲線関数に対する加法定理

$$\sinh(x+y)=\cosh x\sinh y+\sinh x\cosh y$$
$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$$

を示せ.

微分積分学 A 演習問題　(2016 年 6 月 16 日)

問題 8.1.

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ を求めよ.

問題 8.2.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(bx)}{\sin(ax)}$ を求めよ.

問題 8.3.

$\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}}$ を求めよ.

問題 8.4.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 8.5.

$\displaystyle\lim_{x \to -1} x^2$ を求め ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

以下の問題では $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して, $f(x) \to A$, $g(x) \to B \quad (x \to x_0)$ とする.

問題 8.6.

$|f(x)| \to |A| \quad (x \to x_0)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 8.7.

$(f(x) + g(x)) \to A + B \quad (x \to x_0)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 8.8.

$(f(x)g(x)) \to AB \quad (x \to x_0)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ (ヒント: 問題 4.10 のアイデアを用いる).

問題 8.9.

$A > 0$ とする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ に対して

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > \frac{A}{2}$$

とできることを示せ.

微分積分学 A 演習問題　　(2016 年 6 月 23 日)

問題 9.1.

$\displaystyle\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{x+1}$, $\displaystyle\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{x+1}$ を求めよ.

問題 9.2.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ の ε-δ 論法による定義を書け.

問題 9.3.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=2x^3+1$ で定義する. f が $x=-1$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 9.4.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して, $f:I\to\mathbb{R}$ が $x_0\in I$ で右連続であるとは

$$f(x)\to f(x_0)\quad (x\to x_0+0)$$

と教科書に書かれている. ε-δ 論法による定義を書け.

問題 9.5.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続ならば, $|f|:I\to\mathbb{R}$ も I 上連続であることを示せ. なお, 任意の $x\in I$ に対して, $|f|(x):=|f(x)|$ で定義する.

問題 9.6.

$a,b\in\mathbb{R}$ に対して

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2},\quad \min\{a,b\}=\frac{a+b-|a-b|}{2}$$

を示せ.

問題 9.7.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$, $g:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続であれば, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ も連続になることを示せ. なお, $x\in I$ に対して

$$\max\{f,g\}(x):=\max\{f(x),g(x)\},\quad \min\{f,g\}(x):=\min\{f(x),g(x)\}$$

と定義する.

問題 9.8.

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$, $g:I\to\mathbb{R}$ が I 上連続であるとする. 「すべての $x\in I\cap\mathbb{Q}$ に対して $f(x)=g(x)$」が成り立つならば, 「すべての $x\in I$ に対して $f(x)=g(x)$」となることを示せ.

問題 9.9.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が **Lipschitz 連続**, すなわち, ある定数 $L>0$ が存在して, 任意の $x,x'\in(a,b)$ に対して

$$|f(x)-f(x')|\le L|x-x'|$$

をみたすとする. このとき, f は (a,b) 上連続であることを示せ.

微分積分学 A 演習問題 (2016 年 6 月 30 日)

問題 10.1.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, $f+g$ も $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 10.2.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, 任意の $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して λf は $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 10.3.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x_0\in\mathbb{R}$ で連続であれば, fg も $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 10.4.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=x^3+x-1$ とおく. このとき, $f(x)=0$ となる実数解 $x\in\mathbb{R}$ が存在することを示せ. より詳しく, どの範囲に実数解があるかを述べてみよ.

問題 10.5.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とする. $f(a)f(b)<0$ ならば, $f(x)=0$ となる実数解 $x\in[a,b]$ が存在することを示せ.

問題 10.6.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とするとき

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

となることを示せ.

問題 10.7.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を連続とするとき, f の像 $f([a,b])$ が閉区間となることを示せ.

問題 10.8.
$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x):=\frac{1}{x}$$

で定義する.

(1) f が $(0,1)$ 上連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.
(2) f の最大値が存在しないことを説明せよ.

微分積分学 A 演習問題　(2016 年 7 月 7 日)

問題 11.1.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := 3x + 2$ で定める．このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ.

問題 11.2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \sqrt{x^2+1}$ で定める．このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ (ヒント: $x, x' \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{|x+x'|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x'^2+1}} \leq \dfrac{|x|+|x'|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x'^2+1}} \leq 1$ となることを使う).

問題 11.3.

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が **Lipschitz 連続**, すなわち, ある定数 $L > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (a,b)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

をみたすとする．このとき, f は (a,b) 上一様連続であることを示せ.

問題 11.4.

$0 < \alpha < 1$ に対して $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が α **次 Hölder 連続**, すなわち, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (a,b)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|^\alpha$$

をみたすとする．このとき, f は (a,b) 上一様連続であることを示せ.

問題 11.5.

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in (0,1)$ に対して $f(x) := \sin\dfrac{1}{x}$ とおく.

(1) $x \in (0,1)$ に対して, 微分 $\dfrac{df}{dx}(x)$ を求めよ.

(2) 導関数 $\dfrac{df}{dx} : (0,1) \to \mathbb{R}$ は有界とならないことを示せ.

注意.

実は「導関数が有界ならば一様連続」が示せる．対偶を取れば「一様連続でなければ, 導関数は有界でない」が得られる．「導関数は有界でない」からといっても, 一様連続にならないことは示せないが (導関数は有界でないが Hölder 連続となることがある), 問題 11.5 では, f が $(0,1)$ 上一様連続にならないことを実際に示すことができる.

微分積分学 A 演習問題 (計算問題など)　(2016 年 7 月 7 日)

問題 12.1 (提出課題)**.**
$I=(a,\infty)\subset\mathbb{R}$ を開区間, $x_0\in I$, $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ を関数, $A\in\mathbb{R}$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.
(2) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.
(3) $\displaystyle\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.
(4) $\displaystyle\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.
(5) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x)=A$ の ε-δ 論法による定義を述べよ.

問題 12.2 (提出課題)**.**
$I\subset\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ とする.

(1) f が $x_0\in I$ で連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ.
(2) f が I 上連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ.
(3) f が I 上一様連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ.

問題 12.3 (提出課題)**.**
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ とする.

(1) 中間値の定理を述べよ.
(2) Weierstrass の定理を述べよ. ただし, sup, inf を用いること.

問題 12.4.
次の性質を持つ関数の例をあげよ (定義域をきちんと明記すること).

(1) $x=0$ で右連続だが, $x=0$ で連続でない.
(2) 有界だが最小値が存在しない.
(3) 連続だが一様連続でない.

問題 12.5 (わからない問題については, 高校の教科書を復習すること)**.**
次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+x}{|x|}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+x}{|x|}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-3x+4}{3x^2+5}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-5}{x+1}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$