微分積分学 A 中間試験問題

2018 年 6 月 14 日 第 1 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降について, 2 題以上を選択して答えよ. なお, 必要におうじて $x > 0, n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(*) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$$

を用いてよい.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) A が上に有界であることの定義を述べよ.
  (b) A の上界のなす集合を A_u と書くとき, $a \in \mathbb{R}$ が A の上限であること, つまり $a = \sup A$ であることの定義を A_u を用いて述べよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ となることの ε-N 論法による定義を述べよ.
  (b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $-\infty$ に発散すること, すなわち, $a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ となることの ε-N 論法による定義を述べよ.
  (c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調増加であることの定義を述べよ.
  (d) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの ε-N 論法による定義を述べよ.

(3) 有理数と実数の違いに関係する次の定理の主張をそれぞれ述べよ.
  (a) 実数の連続性[1]
  (b) Bolzano-Weierstrass の定理
  (c) 実数の完備性
  (d) Archimedes の原理

(4) 有理数の稠密性とは何か？ 主張を述べよ.

(5) 自然対数の底の定義を述べよ.

(6) 集合 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{3} : n \in \mathbb{N}\right\}$ の上限を求めよ.

---

[1]教科書 (白岩) に述べられている, 実数の切断についての連続性は答えとして認めない. 講義ノートで述べた「実数の連続性」を述べよ.

(7) 集合 $\left\{\sin \dfrac{n\pi}{3} : n \in \mathbb{N}\right\}$ の下限を求めよ.

(8) 次の性質をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例をあげよ.

(a) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する.

(b) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ となるが, $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ とならない.

(9) 次の極限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$.

(b) $\lim_{n\to\infty} a^n$. ただし, $a > 0$ は正の定数.

(c) $2 - 3 + \dfrac{9}{2} - \cdots$ となる無限等比級数.

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x(e^{nx} - e^{-nx})}{e^{nx} + e^{-nx}}$. ただし, $x \in \mathbb{R}$ は定数.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$\inf(1,2) = 1$ を示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\inf(1,2) = 1$ を示すためには,「1 が下界であること」と「1 が下界の中で最大であること」の二つを示す必要がある. それぞれについて, 論理記号を用いて表せ.

(2) $\inf(1,2) = 1$ を示せ.

問題 3.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{2n-5}{3n-2}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$ を ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$ の ε-N 論法を用いた定義を述べよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$ を ε-N 論法を用いて示せ.

問題 4.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a + b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a + b$ に収束することの ε-N 論法を用いた定義を述べよ.

(2) 数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a + b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 1.1.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, $a \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して 数列 $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ が ca に収束することを ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ が ca に収束することの ε-N 論法を用いた定義を述べよ.

(2) 数列 $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ が ca に収束することを ε-N 論法を用いて示せ (ヒント: $c = 0$ かもしれないことに注意).

以下余白 計算用紙として使ってよい.