微分積分学 **A** 期末試験問題

2018 年 7 月 26 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が 1 枚目の解答用紙を用いて述べよ. 問題 2 以降については, 3 題以上を選択して述べよ. それぞれの問題について, 解答用紙の片面のみを使い, 問題番号を指定の枠内に書くこと.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := 2x^2$ で定義するとき, 像 $f([-1,2])$ を述べよ.

(2) $\arcsin(\sin(-\pi))$ を求めよ.

(3) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$ を求めよ.

(4) $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(bx)}{\sin(ax)}$ を求めよ.

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sin(2x)$ を求めよ.

(6) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x}$ を求めよ (ヒント : $y = \arcsin x$ とおく).

(7) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$ を求めよ.

(8) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^5}\sin x}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を求めよ.

(9) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束しないこと, すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ の ε-N 論法による主張を述べよ.

(10) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ とする.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を述べよ.

(b) $A \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = A$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を述べよ.

(c) $A \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 2-0} f(x) = A$ であることの ε-δ 論法を用いた定義を述べよ.

(11) $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ とする.

 (a) $x_0 \in I$ に対して, f が $x = x_0$ で連続であることの ε-δ 論法を用いた定義を述べよ.

 (b) $x_0 \in I$ に対して, f が $x = x_0$ で**連続ではないこと**の ε-δ 論法を用いた定義を述べよ.

 (c) f が I 上一様連続であることの定義を述べよ.

 (d) f は I 上連続となるが, I 上一様連続とならないような I と f の例を与えよ.

(12) 開区間 $(0,2)$ 上の連続な関数 $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ で, $(0,2)$ 上連続かつ有界であり, 最小値は存在するが最大値が存在しない例をあげよ. 答えは $f(x) = \boxed{}$ の形で答えよ

(13) 整数 a に対して, 方程式 $x^3 + 12x^2 + 37x + 15 = 0$ の実数解が $a \leq x \leq a+1$ をみたすとき, 整数 a を求めよ.

(14) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ を連続な関数とする.

 (a) $f(-1) < f(1)$ とする. 中間値の定理を述べよ.

 (b) Weierstrass の定理で最小値に関する主張を inf を用いて述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

関数 $f : (-1,1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g : (-1,1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ は $x \to 0$ のときにそれぞれ $A, B \in \mathbb{R}$ に収束するとする．このとき，$\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = A + B$ となることを ε-δ 論法を用いて示したい．

(1) $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = A + B$ の定義を述べよ．

(2) $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = A + B$ を ε-δ 論法を用いて示せ．

問題 3.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x) := x^2 + 2x - 3$ で定義する．f が $x_0 = 2$ で連続であることの証明を与えたい．

(1) f が $x_0 = 2$ で連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ．

(2) f が $x_0 = 2$ で連続であることの ε-δ 論法による証明を与えよ．

問題 4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x) := x^3 + 2x + 1$ で定義する．f が $\mathbb{R}$ 上連続であることの証明を与えたい．

(1) f が $\mathbb{R}$ 上連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ．

(2) f が $\mathbb{R}$ 上連続であることの ε-δ 論法による証明を与えよ．

以下余白 計算用紙として使ってよい．

問題 5.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であれば, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して λf は $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続となることを示したい.

(1) λf が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ.
(2) λf が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であることの ε-δ 論法による証明を与えよ.

問題 6.

$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ は, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (-1, 1)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'| \tag{L}$$

をみたすとする. このとき, f は $(-1, 1)$ 上一様連続であることを示せ. なお, どこで (L) を用いたのかをわかるように証明を書くこと.

問題 7.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

で定義する. f は $x = 0$ で連続となるかどうかを考察し, ε-δ 論法による証明を与えよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.