第 1 章

実数と数列の極限

1.1. イントロダクション –円周率を求める–

円周率 π はおよそ 3.14 と習ってきた. ところで, このおよそ 3.14 はどうやって求めればよいのであろうか？ そこで, そもそも円周率とは何かについて復習しよう.

定義 1.1.
[円周率] すべての円について, **円周率** π を
$$\pi := \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$$
で定める.

注意 1.1.
どの円についても, $\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ は等しい. これは, すべての円が相似であることから従う. 従って, 定義 1.1 において, 円をかえることで, 円周率がかわってしまうということはない.

注意 1.2.
$A = B$ は「A と B が等しい」と「A を B で定める (もしくは A に B を代入する)」の二つの意味がある. この違いを明確にするため,
$$A = B \quad A \text{ と } B \text{ が等しい.}$$
$$A := B \quad A \text{ を } B \text{ で定める.}$$
と書きわけることにする.

半径 1 の円の円周の長さを求めて, 2 でわれば円周率 π は求まるはずである. ではどうやって円周の長さを求めればよいのであろうか？ Archimedes は「半径 1 の円に内接する正 3×2^n 多角形の周の長さ s_n」と「半径 1 の円に外接する正 3×2^n 多角形の周の長さ S_n」を考えた. すると, すべての自然数 n に対して, $s_n \leq 2\pi\pi \leq S_n$ が成り立つはずだから, n を大きくすれば, 円周率の近似値を求めることができると考えた. そして, 次の漸化式を得た.

定理 1.1 (Archimedes)**.**
すべての自然数 n に対して

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n}, \tag{1.1}$$

$$s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n \tag{1.2}$$

が成り立つ.

証明.
1. s_n を求める. 内接する正 $6\times 2^{n-1}$ 角形の一辺の長さは $2\times 1\times \sin\dfrac{\pi}{6\times 2^{n-1}}$ となるので

$$s_n = (6\times 2^{n-1})\times\left(2\times\sin\frac{\pi}{6\times 2^{n-1}}\right) = 6\times 2^n\sin\frac{\pi}{3\times 2^n}$$

となる.
2. S_n を求める. 外接する正 $6\times 2^{n-1}$ 角形の一辺の長さは $2\times 1\times \tan\dfrac{\pi}{6\times 2^{n-1}}$ となるので

$$s_n = (6\times 2^{n-1})\times\left(2\times\tan\frac{\pi}{6\times 2^{n-1}}\right) = 6\times 2^n\tan\frac{\pi}{3\times 2^n}$$

となる.
3. (1.6) を示す. 倍角の公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right) - 1,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n} &= \frac{1}{6\times 2^n\tan\frac{\pi}{3\times 2^n}} + \frac{1}{6\times 2^n\sin\frac{\pi}{3\times 2^n}} \\
&= \frac{\cos\frac{\pi}{3\times 2^n} + 1}{6\times 2^n\sin\frac{\pi}{3\times 2^n}} \\
&= \frac{2\cos^2\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}{6\times 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}} \quad (\because\ \text{倍角公式}) \\
&= \frac{2}{6\times 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}} = \frac{2}{S_{n+1}}
\end{aligned}$$

がわかる.

4. (1.7) を示す. 倍角の公式より

$$
\begin{aligned}
S_{n+1}s_n &= \left(6\times 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\left(6\times 2^{n}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n}}\right)\\
&= \left(6\times 2^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}\right)\left(6\times 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\\
&= \left(6\times 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)^2 = S_{n+1}
\end{aligned}
$$

が得られる. □

(1.6) と (1.7), s_1 と S_1 を直接計算することにより

$$
\begin{cases}
\dfrac{2}{S_{n+1}} = \dfrac{1}{S_n} + \dfrac{1}{s_n},\\
s_{n+1}^2 = S_{n+1}s_n,\\
s_1 = 6,\\
S_1 = 4\sqrt{3}
\end{cases}
$$

が得られる. この漸化式から, s_n, S_n を計算することができる.

例 1.1.

$n = 2$ のとき, s_2, S_2 を求める.

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{2}{\frac{1}{S_1}+\frac{1}{s_1}}\\
&= \frac{2}{\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{6}}\\
&= 2\div(1\div 4\sqrt{3}+1\div 6) \simeq 6.4310,
\end{aligned}
$$

$$
s_2 = \sqrt{S_2 s_1} = \sqrt{6.4310\times 6} \simeq 6.2117
$$

となる.

$n = 5$ まで計算してみると

n	s_n	S_n	π の評価
1	6	6.9282	$3.0000 \le \pi \le 3.4641$
2	6.2117	6.4310	$3.1058 \le \pi \le 3.2155$
3	6.2654	6.3197	$3.1327 \le \pi \le 3.1598$
4	6.2789	6.2926	$3.1394 \le \pi \le 3.1463$
5	6.2830	6.2873	$3.1415 \le \pi \le 3.1436$

と評価が得られる. $n = 5$ まで計算してみると, 円周率がおよそ 3.14 であることがわかる. Archemedes はこの計算をすべて手で行っていたことには注意をするべきである. この時代には, 電卓はおろか, 三角関数もなかったと考えられており[1], 近似計算を行っていたことは驚異に値する.

ところで, この議論にはそもそも, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ や $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が円周率の 2 倍に本当に近づいているのかという問題がある. もし,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

が**存在すれば**, (1.7) で $n \to \infty$ とすれば, $s^2 = Ss$ だから, ($s \neq 0$ を示せば) $s = S$ がわかる. しかし, この**存在すれば**はどうやって示せばよいのだろうか？

さらにいえば, 「円周の長さ」のような, 曲線の長さはいったいどのように定めればよいのであろうか？ 線分の長さからどうやって自然に曲線の長さを定めるべきであろうか？ 先に答えをいうと, これは「積分と極限」である. では, 極限とは何であろうか？ 数列の極限, 関数の極限とはいったい何であろうか？ この答えは「実数」である. では, 「実数」とは何であろうか？

一変数の微分積分の当面の目標は, 微分積分学を「実数とは何か？」からはじめて, 厳密にくみたて直すことである. 例えば

$$\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3\right)' dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \tag{1.3}$$

がなぜ正しいのか？ を俯瞰することである. この (1.8) は高校で習ったと思って信じてよいわけではないことに注意して欲しい. 左辺の積分はグラフの面積を表す式 (より難しくいうと, $0 \le x \le 1$ のすべての情報がわかっていないとわからない式) であるのに対して, 微分は瞬間の速度を求める式 (x における微分を計算したかったら, x の近くの関数の情報だけわかればよい) である. 「速度と面積に関係がある」と高校生に説明して, はたして高校生が納得できるであろうか？「微分と積分は互いに逆の計算である」は間違ってはいないが, 数式から離れてみると, いかに不思議なことを主張しているかがわかると思う. この証明を目標に, 微分積分をくみたてることにしよう.

[1]アイデアはあったかもしれないが, 加法定理などがあったかどうかは定かでない.

1.2. 実数の構成

高校までに,「自然数」,「整数」,「有理数」,「実数」,「複素数」の 5 つの数を学んだ. これらの代数的な性質をみてみよう.

自然数は, 足し算と掛け算ができ, 大小関係があるが, 引き算と割り算が自然数のなかだけではできない. 例えば, 3, 5 は自然数であるが, $3-5$ や $3 \div 5$ は自然数ではない. 整数は, 引き算ができるようになるが, 割り算はまだ整数のなかだけではできない[2]. 有理数や実数になると, 0 ではない数で割り算をすることができる[3]. 複素数は, やはり足し算, 引き算, 掛け算, 割り算ができるが, 大小関係がなくなる. たとえば, 1 と $i=\sqrt{-1}$ のどちらが大きいか？ は考えない.

さて, 高校生でも, 自然数, 整数, 複素数は「有理数, 実数」とは違うということがわかる. では, 有理数と実数はどう違うのだろうか？ 有理数は分数で表すことができる数, 実数だが有理数ではない数は分数で表すことができない数と説明されているが, そもそも実数とは何であろうか？ 高校の教科書では, 実数とは「整数と有限小数と無限小数」と書いてあるが, では無限小数とは何であろうか？ 答えは極限であり, 極限とは実数である. 結局のところ**実数とは何であろうか？**

Dedekind は実数を考えるために, 有理数の数直線を切ったらどうなるか？ を考えた. 有理数の数直線は $\sqrt{2}$ や円周率 π, 自然対数 e が抜けているために, 穴がたくさんあいているはずで, 切ったときに, 直線にぶつかるところとぶつからないところがでてくるはずである. そこで, ぶつかった場所は有理数, ぶつからなかった場所は無理数としようとした. さて, このアイデアをどのように数学の言葉で言えばよいのであろうか？ このアイデアを述べるために, 集合論の基礎事項を復習する.

1.2.1. 集合論の基礎. ものの集まりを**集合**といい, そのもの一つ一つを集合の**要素**とか**元**という.

例 1.2 (よく使う集合)**.**
次の集合はどの教科書, 専門書でも標準的に使われる.

- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合

---

[2]このように足し算, 引き算と掛け算がうまく定義できる集合は環と呼ばれる. 正確な定義は代数学の教科書をみよ

[3]このように足し算, 引き算, 掛け算と 0 でない数で割り算が定義できる集合は体と呼ばれる. 正確な定義は代数学の教科書をみよ

- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集合
- $\emptyset$: 元が一つもない集合 (**空集合**という)

a が集合 A の要素, 元であるとき, $a \in A$ と書く.

例 **1.3.**

$$-3 \in \mathbb{Z}, \quad -3 \notin \mathbb{N}, \quad \frac{9}{4} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

集合はふつう, $\{\cdots\}$ と中かっこを使って書くことが多い. このこともあって, 数式で丸かっこの外に中かっこを使う次のような書き方

$$\{4-(5\times 3+3)\div 2\}\times 3$$

のような書き方はせずに

$$(4-(5\times 3+3)\div 2)\times 3$$

とすべて丸かっこで書くことが多い.

例 **1.4** (開区間, 閉区間,)**.**
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 次の記号を用いる.

(1) $(a,b)=\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: **開区間**という
(2) $[a,b]=\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: **閉区間**という.

集合 A が集合 X の**部分集合**であるとは,「すべての $a \in A$ に対して, $a \in X$」が成り立つことをいう. このとき, $A \subset X$ と書く.

例 **1.5.**
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ となる.

集合 X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して, **和集合** $A \cup B$ と**共通部分** $A \cap B$ をそれぞれ

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ または } x \in B\}$$
$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

と定める.

1.2.2. Dedekind の切断. さて, 集合論の基礎を用いて, Dedekind の切断を説明しよう. 有理数直線を切るということは, 二つの半直線 A, B にわかれて,「A と B をあわせれば有理数直線になる」,「A と B はかさなりがない」,「A よりも B の方が右側 (大きい側) にある」ということが必要であろう. さらに, 最大値の条件を加えた, 次の定義により, Dedekind は有理数の切断を定義した.

定義 1.2 (有理数の切断)**.**
$\mathbb{Q}$ の部分集合 A, B が**有理数の切断**であるとは, 次の 4 条件をみたすことをいう.

1. $A \cup B = \mathbb{Q}$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. すべての $a \in A$, $b \in B$ に対して $a < b$.
4. A に最大値はない. すなわち, すべての $a \in A$ に対して, $a' \in A$ が存在して, $a < a'$ が成り立つ.

このとき, $\langle A, B\rangle$ と書くことにする.

有理数の切断で, 切ったときに有理数にぶつかるということを, B に最小値が存在するということで表現した. 例をあげる.

例 1.6.
$A_1 := \{a \in \mathbb{Q} : a < \frac{1}{2}\}$, $B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b \geq \frac{1}{2}\}$ とすると, $\langle A_1, B_1\rangle$ は有理数の切断になる. このとき, B_1 に最小値 $\frac{1}{2}$ がある.

有理数の切断で, 切ったときに有理数にぶつからない, つまり切ったところが無理数であったということを, B に最小値がないということで表現した.

例 1.7.
$A_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a < 0$ または $a^2 < 2\}$, $B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b > 0$ かつ $b^2 \geq 2\}$ とすると, $\langle A_2, B_2\rangle$ は有理数の切断になる. このとき, B_1 に最小値はない.

もういちどまとめると, $\langle A, B\rangle$ を有理数の切断としたとき,「B に最小値があるとき, それは有理数直線を切ったときにぶつかっていて, 有理数を意味する」と考え,「B に最小値がないとき, それは有理数直線を切ったときにぶつからないということで, 無理数を意味する」と考えた. このことを用いて, Dedekind は実数を定義した.

定義 1.3 (実数)**.**
有理数の切断を実数という. 実数全体のなる集合を $\mathbb{R}$ で表す.

次に有理数の切断を用いて, 実数の四則演算や絶対値を定義しなければいけない. これについての詳細は, 例えば **[8]** を参照せよ.

実数の順序関係は, 二つの実数 $x = \langle A, B \rangle$, $y = \langle A', B' \rangle$ を考えたときに, $x \leq y$ であるならば, 半直線 A と A' の関係は A' の方が長いはずである. このことをふまえて次の定義を与える.

定義 1.4 (順序関係)**.**
$x, y \in \mathbb{R}$ に対して, 有理数の切断を用いて $x = \langle A, B \rangle$, $y = \langle A', B' \rangle$ と書く.
$x = y$ であるとは, $A = A'$ が成り立つことをいう.
$x \leq y$ であるとは, $A \subset A'$ が成り立つことをいう.
$x < y$ であるとは, 「$x \leq y$ かつ $x \neq y$」が成り立つことをいう.

有理数は実数のなかでどのくらいたくさんあるのだろうか？ このことの答えが次の定理である.

定理 1.2 (有理数の稠密性)**.**
すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x < y$ ならば, ある $q \in \mathbb{Q}$ が存在して, $x < q < y$ とできる.

証明はあとにして, 何を主張しているのかを具体例でみてみよう.

例 1.8.
$x := \sqrt{2}$, $y := \sqrt{3}$ とするとき, $q := 1.6 \in \mathbb{Q}$ とすれば, $x < q < y$ とできる. 定理 1.2 は, この場合では, y が $\sqrt{2}$ より少しでも大きければ, いつでも $q \in \mathbb{Q}$ をみつけて $x < q < y$ とすることができることを主張している.

さて, 定理 1.2 を証明するためには, 実数とは何か？ 実数とは Dedekind の切断だということを使わなければならない. 少し難しいが証明を与えよう.

定理 1.2 の証明.
1. $x, y \in \mathbb{R}$ が $x < y$ をみたすとし, x, y は有理数ではないとする. 有理数の切断を用いて, $x = \langle A, B \rangle$, $y = \langle A', B' \rangle$ と書くと, $A \subset A'$ かつ $A \neq A'$ が成り立つ. 従って

$$A' \setminus A := \{a \in \mathbb{Q} : a \in A' \text{かつ } a \notin A\}$$

は空集合ではないから, $q \in A' \setminus A$ を一つ選ぶことができる. このとき, $x < q < y$ が成り立つことを示せばよい. q に対する有理数の切断を $\langle A'', B'' \rangle$ と書くと

$$A'' := \{a \in \mathbb{Q} : a < q\}, \qquad B'' := \{b \in \mathbb{Q} : q \leq b\}$$

となる.

2. $x < q$ を示す. すべての $a \in A$ に対して, $a \in A''$ を示せばよい. このとき, $q \notin A$ だったから, $q \in B$ であり, 有理数の切断の定義から, $a < q$ が成り立つ. 従って $a \in A''$ となる.

3. $q < y$ を背理法で示す. $q \geq y$ を仮定すると, $q \neq y$ より, $q > y$ だから, $A' \subset A''$ が成り立つ. $q \in A'$ より $q \in A''$ となり, A'' の定義から $q < q$ となることから矛盾が生じる.

4. x, y がともに有理数のときは, $q = \frac{x+y}{2}$ とすればよい. x が有理数で y が無理数のとき, $\frac{x+y}{2}$ は無理数となるので, $\frac{x+y}{2} < q < y$ となる $q \in \mathbb{Q}$ を選べば, $x < q < y$ となる. x が無理数で y が有理数のときも同様に議論すればよい. □

1.3. 実数の性質と上限. 下限

前のセクションで実数とは何か？ について Dedekind の切断を紹介した. 次に, 実数と有理数にはどのような違いがあるのか？ について, さらに考察をつづけよう.

開区間 $(0, 1)$ に最大値は存在しないが, 1 は最大値に似ている. 他にも, 有理数の集合 $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ を考えたときに, この集合に最大値はない (等号はついているが, $x^2 = 2$ となる x は有理数ではない). しかし, $\sqrt{2}$ は最大値に似ている. この「似ている：をどうやって数学の言葉で表すかを考えよう.

1.3.1. 論理記号の基礎. 集合 A に対し, $\forall a \in A$ は「すべての $a \in A$ に対して」や「任意の $a \in A$ に対して」の意味を持つ. $\exists a \in A$ は「ある $a \in A$ が存在して」の意味を持つ. $\forall$ は「for all」や「for any」 の A をひっくりかえしたもの, $\exists$ は「exists」の E をひっくり返したものである.

このノートでは, $\forall$ や $\exists$ は文字 a と同じ大きさ, 同じ高さであるが, 板書や手書きでは, もう少し小さめに上にあげた形である, ${}^{\forall}a \in A$ や ${}^{\exists}a \in A$ と書くことが多い.

定義 1.5 (有界)**.**

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A が**上に有界**であるとは「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $a \leq M$ が成り立つ」ことをいう. このときの M を A の**上界**という.

A が**下に有界**であるとは「ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $a \geq m$ が成り立つ」ことをいう. このときの m を A の**下界**という.

A が**有界**であるとは, 「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $|a| \leq M$ が成り立つ」ことをいう.

A が上に有界であるということを論理記号で書くと

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall a \in A \text{ に対して } a \leq M$$

となる. ここの「s.t.」は「such that」の略で, ∃ のあとにはこれをつねにつけると考えておいてもよい. 他方, 「に対して」は省略して書いてもよい. 同様に A が下に有界であるということを論理記号で書くと

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall a \in A \text{ に対して } a \geq M$$

となり, A が有界であるということを論理記号で書くと

$$\exists M > 0 \text{ s.t. } \forall a \in A \text{ に対して } |a| \leq M \tag{1.4}$$

となる. このときに, $\exists M > 0$ と $\forall a \in A$ の順番を変えた

$$\forall a \in A \text{ に対して } \exists M > 0 \text{ s.t. } |a| \leq M \tag{1.5}$$

は (1.9) と意味が異なることに注意すること. 論理記号を使うときには, 書く順番に注意を払わないといけない.

例 1.9.
$A := (0, 1)$ は有界である.

証明.
$M := 2 > 0$ とおく. すると, すべての $a \in A = (0, 1)$ に対して $|a| \leq 1 \leq M$ が成り立つ. □

上の証明で, M を決めるときに, a を使ってはいけないということに注意すること. M は a を決めるよりも先に決めなければならない.

例 1.10.
$B := (0, \infty)$ は上に有界ではない.

証明.
示せばいいことは, 「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $b \in B = (0, \infty)$ に対して, $b \leq M$」の否定, すなわち,「すべての $M \in \mathbb{R}$ に対して, ある $b \in B = (0, \infty)$ が存在して, $a > M$」である. そこで, 任意に $M \in \mathbb{R}$ に対して,

$$b := \begin{cases} M + 1 & M \geq 0 \\ 1 & M < 0 \end{cases}$$

とおくと, $b \in B = (0, \infty)$ となる. $M \geq 0$ のときは, $b = M + 1 > M$ であり, $M < 0$ のときは, $M < 1 = b$ だから, どちらの場合でも, $b > M$ となることがわかる. □

$M < 0$ のときに $b = 1$ としたが, $b \in (0,\infty)$ かつ, $b > M$ をみたしていればなんでもよい. b の決め方で重要な点は, $b \in B$, つまり $b > 0$ であることと, $b > M$ となることが両方成り立つということである. b を決めるには, M を決めてからでよいということにも注意をしておこう.

例 1.11.

$C := (-\infty, 3)$ は下に有界ではない.

証明.

示せばいいことは,「ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $c \in C = (-\infty, 3)$ に対して, $c \geq m$」の否定, すなわち,「すべての $m \in \mathbb{R}$ に対して, ある $c \in C = (-\infty, 3)$ が存在して, $c < m$」である. そこで, 任意に $m \in \mathbb{R}$ に対して,

$$c := \begin{cases} m - 1 & m \leq 0 \\ -1 & m > 0 \end{cases}$$

とおくと, $c \in B = (0,\infty)$ となる. $c \leq 0$ のときは, $c = m - 1 < m$ であり, $m > 0$ のときは, $c = -1 < m$ だから, どちらの場合でも, $c < m$ となることがわかる. □

集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, 上界や下界の定義にでてくる M や m は, 集合 A の元が M より大きくなることがない, m より小さくなることがないということであり, 集合 A の性質が現れている. そこで, この M や m をあつめた集合を考える.

定義 1.6.

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の**上界の集合** A_u と**下界の集合** A_l を

$$A_u := \{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$

$$A_l := \{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

と定める.

注意 1.3.

定義 1.6 の記号は一般的ではないので, 使うときは上界の集合, 下界の集合と明記すること.

例 1.12.

$A := [0, 1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ とするとき, A の上界の集合 A_u と下界の

集合 A_l は

$$\begin{aligned} A_u &= \{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in [0,1) \text{ に対して } a \le M\} \\ &= [1,\infty), \\ A_l &= \{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in [0,1) \text{ に対して } a \ge m\} \\ &= (-\infty,0] \end{aligned}$$

となる.

例 1.12 をみればわかるように, 集合 $A \subset \mathbb{R}$ の上界の集合 A_u は, A の元よりつねに大きい実数をあつめた集合である. つまり, 集合 A の元より大きい実数を集合 A の外から考えているといってよい.

定義 1.7 (最大, 最小)**.**
$A \subset \mathbb{R}$ に対して A の元で一番大きな数と一番小さな数をそれぞれ A の**最大値**, **最小値**といい, $\max A$, $\min A$ と書く.

例 **1.13.**
$A := [0,1)$ に対して, $\max A$ は存在しない. $\min A = 0$ となる.

証明**.**
1. $\min A = 0$ となることを示す. $0 \in A = [0,1)$ であり, すべての $a \in A$ に対して, $0 \le a < 1$ だから, 0 は A の元で一番小さな数である. つまり, $\min A = 0$ となる.

2. $\max A$ がないことを示すために背理法で, $M = \max A$ が存在したとしよう. すると, $M \in A = [0,1)$ だから, $0 \le M < 1$ となる. そこで, $a := \dfrac{M+1}{2}$ とおくと, $0 \le \dfrac{M}{2} < \frac{1}{2}$ だから, $0 \le a < 1$ となることがわかる. つまり, $a \in A$ である. しかし, $M < 1$ だったから, $a > \dfrac{M+M}{2} = M$ となり, M が A の元で一番大きい数であったことに反する. □

上の証明の最大値が存在しないことの証明で, a の定義は, M と 1 の中点をとったということに注意しておこう. 高校までの数学で, 「$0 \le a < 1$ となっているときに, a は最大値を持たない」ということを学んだと思うが, 証明をしっかりと書こうとすると, 上記のようになる.

もう一つ注意をしておく. A で最大値や最小値を考えるときには, あくまで集合 A の元のみしか考えない. つまり, 集合 A の外側を考えてはいないということである. それでは, A の外側から, 最大値や最小値に似たものを考えることはできないだろうか? それが, 次に述べる上限や下限というものである.

定義 1.8 (上限, 下限)**.**
集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の上限 $\sup A$, 下限 $\inf A$ を, A の上界の集合 A_u, 下界の集合 A_l に対して

$$\sup A := \min A_u = \min\{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$

$$\inf A := \min A_l = \min\{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

により定義する.

集合 $A \subset \mathbb{R}$ の上限 $\sup A$ は A **の元より大きい実数で一番小さいもの**である. つまり, 最大値とは違い, A の元より大きくなる A の外側 A_u を考えておいて, その外側 A_u で一番小さいものを考えようということである. 感覚的に考えれば, 上限と最大値は同じようなものに見えるが, 実はそうではない. このことはあとで述べる.

集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, $\alpha = \sup A$ を論理記号で書くと,

1. $\forall a \in A$ に対して, $a \leq \alpha$.
2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists a \in A$ s.t. $\alpha - \varepsilon < a$.

となる. **1.** が主張していることは, α は A の上界となっているということであり, **2.** が主張していることは, $\alpha - \varepsilon$ はもう A の上界にはなっていないということ, つまり, $\alpha - \varepsilon$ よりも大きくなる $a \in A$ が存在するということである. **2.** の $-\varepsilon$ は α より少し小さい数という意味である. なお, ε は微分積分学では小さい**正の数**という意味で使うことが多い.

さて, このセクションの最初で述べた, 実数と有理数の違いを述べよう.

定理 1.3 (実数の連続性)**.**
上に有界な空でない実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は, 実数の上限 $\sup A$ が存在する.

注意 1.4.
定理 1.3 の「実数」を「有理数」に取りかえると成立しない. つまり, 定理 1.3 は実数と有理数の違いを表している.

実数の連続性を用いると, 次の Archimedes の原理が示せる.

定理 1.4 (Archimedes の原理)**.**
すべての $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varepsilon N_\varepsilon > 1$ が成り立つ.

定理 1.3 の証明.

$A \subset \mathbb{R}$ を上に有界な集合とし, A_u を A の上界の集合とする. $C := \mathbb{Q} \setminus A_u$, $D := \mathbb{Q} \cap A_u$ として, 有理数の切断 $\alpha := \langle C, D \rangle$ を考える. 以下, $\alpha = \min A_u$, すなわち $\alpha = \sup A$ となることを示す.

1. すべての $a \in A$ に対して, $a \leq \alpha$ を示す. そのために, 有理数の切断 $a = \langle A', B' \rangle$ を考える. $A' \subset C$ を示すために, 背理法を用いて, $q \in A'$ が存在して, $q \notin C$ と仮定する. すると, $q \in D$ より, $q \in A_u$ となり, $a \leq q$ がわかる. 他方, $a = \langle A', B' \rangle$ だから $q < a$ となり矛盾となるから, $A' \subset C$ がわかる. とくに, $\alpha \in A_u$ がわかった.

2. $\alpha = \min A_u$ を示す. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\alpha - \varepsilon \notin A_u$ を示す. $\alpha - \varepsilon < \alpha$ より, 有理数の稠密性から, $q \in \mathbb{Q}$ が存在して, $\alpha - \varepsilon < q < \alpha$ とできる. 従って, $q < \alpha$ から $q \in C$ となり $q \notin A_u$ だから $\alpha - \varepsilon \notin A_u$ もわかる.

1., **2.** より $\sup A$ が存在して, $\alpha = \sup A$ となることがわかる. □

定理 1.4 の証明.

背理法を用いて「ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\varepsilon_0 n \leq 1$」を仮定する. すると, $A := \{\varepsilon_0 n : n \in \mathbb{N}\}$ は上に有界となるから, 定理 1.3(実数の連続性) により, $\alpha := \sup A$ が存在する. 従って, $\alpha - \varepsilon_0$ は上界ではないから, 「ある $\alpha_\varepsilon \in A$ が存在して, $\alpha - \varepsilon < \alpha_\varepsilon$」 とできる. よって, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して $\alpha_\varepsilon = \varepsilon_0 n_\varepsilon$ とできるが,

$$\alpha - \varepsilon_0 < \alpha_\varepsilon = \varepsilon_0 n_\varepsilon \tag{1.6}$$

だから

$$\alpha < \varepsilon_0 (n_\varepsilon + 1) \tag{1.7}$$

となる. $n_\varepsilon + 1 \in \mathbb{N}$ より $\varepsilon_0 (n_\varepsilon + 1) \in A$ となり, (1.7) から $\alpha = \sup A$ となることに矛盾していることがわかる. □

定理 1.3 の証明で Dedekind の有理数の切断を使わずに証明することは (この論理の順番では) できないということに注意しておこう. 実数の連続性は有理数と実数の違いを表す主張であるから, 実数とは何か？ に踏み込まなければ証明することができない. このノートにおいて, 実数とは Dedekind の有理数の切断であると定義したので, 証明に有理数の切断が必要となったのである.

さて, 実際に集合 A が与えられたときに, その上限とその証明をどのように書けばよいか具体例を通して考えよう.

例 1.14.

$A := [0, 1)$ に対して, $\sup A = 1$ となる.

証明.

定義に戻って証明すべきことを確認しよう. 論理記号を用いた書き方をすれば

示すこと

1. $\forall a \in A$ に対して, $a \leq 1$.
2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists a \in A$ s.t. $1 - \varepsilon < a$.

が証明すべきことである.

1. 任意の $a \in A$ に対して, $a \leq 1$ を示す. 任意の $a \in A$ に対して, $0 \leq a < 1 \leq 1$ となるから, とくに $a \leq 1$ が成り立つ.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $a \in A$ が存在して $1 - \varepsilon < a$ を示す. つまり, 先に $\varepsilon > 0$ を先に与えて, $1 - \varepsilon < a$ となるような $a \in A$ を探そう.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $a := \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ とおくと, $\frac{1}{2} \leq a$ かつ, $\frac{1}{2} < 1$, $1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$ だから, $\frac{1}{2} \leq a < 1$ となる, 従って, $a \in A$ となる. また,

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq a$$

となるので, $1 - \varepsilon < a$ が成り立つ. □

注意 1.5.

存在をしめすことは「成り立つものを見つける」と同じことである. 例 1.14 の証明では, $1 - \varepsilon < a$ となる $a \in A$ をみつければよい. $a \in A$ より $0 \leq a < 1$ をみたして, $1 - \varepsilon < a$ となるものをみつければよい.

注意 1.6.

例 1.14 の証明の **2.** で, $a := 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ とすると $\varepsilon > 0$ が大きいときに $1 - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ となってしまうことがある. すると, $a \notin A$ となってしまうので, これを防ぐために, $a := \max\left\{1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ としてある.

1.4. 数列の収束・発散

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束するとは「$|a_n - a|$ が n を大きくすると 0 に近づくこと」であった. しかし, この定義は誰がみても同じ結果になるとは限らない. 実際に, n を大きくの大きいとは, どのような大きさであろうか? 0 に近づくの近づくは, どのくらい近づけばいいのだろうか? つまり, 「n を大きくすると 0 に近づくこと」は客観的な定義ではなく, 人によって考え方が異なっ

てしまうかもしれない定義である. それでは, 人によって考え方がかわらないような決め方はどのようにすればよいであろうか？ その答えが次にあげる ε-N 論法による定義である.

定義 1.9 (数列の極限 (ε-N 論法)).
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に**収束する**とは「任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_\varepsilon$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon]$」ことをいう. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束するとき, $\lim_{n\to\infty} a_n := a$ とか $a_n \to a \quad (n \to \infty)$ と書く.

$a_n \to a \quad (n \to \infty)$ を論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

となる. 定義 1.9 において「$|a_n - a|$ が 0 に近づく」というのは, **先に** $\varepsilon > 0$ を任意に与えるところにある. この任意の $e\varepsilon > 0$ はとても小さな正の数を想定している. 「n を大きくする」というのは, $l\varepsilon > 0$ **よりあとに選ぶ** $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ より先のすべての $n \in \mathbb{N}$ というところにある. この N_ε は ε に対応して決めればよい, とても大きな自然数である.

とはいえ, この定義をただ眺めてみてもこれはわかりにくいであろう. 例を眺めてみ, 感覚をつかんでほしい.

例 1.15.
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ.

まずは定義を確認しよう. 示すべきことは

示すこと

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

である. 目標となるのは, この示すことが成り立つような $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつけることである. $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ は $\varepsilon > 0$ よりあとにあるが, $n \in \mathbb{N}$ より前に書いてある. だから N_ε は ε **を使ってもよいが,** n **を使ってはいけない**ということに注意する.

証明.
1. 定義の $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつけるために, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をあとで決める. すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ を仮定すると

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon}$$

となる. だから, $\dfrac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を選べば,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

が成り立つ. $\dfrac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ を N_ε について解くと $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となる. この考察をもとにして証明を書く.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_\varepsilon := \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ とおく. ただし, $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ は $\dfrac{1}{\varepsilon}$ を越えない最大の整数であり,

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = N_\varepsilon$$

が成り立つことに注意する. すると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n} - 0\right| &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \qquad (\because n \geq N_\varepsilon) \\ &< \frac{1}{1/\varepsilon} \qquad (\because N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}) \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち, $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ となるので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ. □

もう少し計算が必要となる例を取り上げてみよう.

例 **1.16.**
$\dfrac{2n}{n+1} \to 2 \quad (n \to \infty)$ が成り立つ.

例 1.15 と同じように, 示すべきことをまずは確認しよう. 示すべきことは

示すこと

$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$

である. そこで, 例 1.15 と同じように, この示すことが成り立つような $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ の条件を調べてみよう.

証明.

1. 定義の $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつけるために, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をあとで決める. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ を仮定すると

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N_\varepsilon + 1} \leq \frac{2}{N_\varepsilon}$$

となる[4]. だから, $\dfrac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を選べば,

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| \leq \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

が成り立つ. $\dfrac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ を N_ε について解くと $N_\varepsilon > \dfrac{2}{\varepsilon}$ となる. この考察をもとにして証明を書く.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_\varepsilon := \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ とおく. このとき,

$$\left[\frac{2}{\varepsilon}\right] \leq \frac{2}{\varepsilon} < \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 = N_\varepsilon$$

が成り立つことに注意する. すると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| &= \left|\frac{-2}{n+1}\right| \\
&= \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{2}{N_\varepsilon + 1} (\because n \geq N_\varepsilon) \\
&\leq \frac{2}{N_\varepsilon} \\
&< \frac{2}{2/\varepsilon} \qquad (\because N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

すなわち, $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ となるので, $\dfrac{2n}{n+1} \to 2\ (n \to \infty)$ が成り立つ. □

注意 1.7.

例 1.15, 例 1.16 の証明で, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつける計算 (証明中の **1.**) については, 実は証明では書かなくてもよい. しかし, 微分積分学や解析学における「評価す

[4] 正の分数では, 分母を小さくすると全体は大きくなる.

る, 成り立つものはどのような性質を持つかを調べる」という観点では非常に重要な部分である.

例 1.15, 1.16 に現れる証明論法を **ε-N 論法**という. ε-N 論法を用いないと証明が難しい事実として, 次の例を取り上げよう.

例 **1.17.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ が成り立つ.

証明**.**

1. 定義の $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつけるために, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をあとで決める. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

とできる. そこで, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $N_\varepsilon \geq N_1$ かつ $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right| &= \left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|) \\
&\quad + \frac{1}{n}(|a_{N_1}-a|+\cdots+|a_n-a|) \\
&\leq \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|) \\
&\quad + \frac{1}{n}(\varepsilon(n-N_1+1)) \\
&\leq \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)+\varepsilon
\end{aligned}$$

となる. よって, $\frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|) < \varepsilon$ となるように $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を選べば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right| &\leq \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)+\varepsilon \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

となる. この評価をもとにして, 厳密な証明を書く.

2. $\varepsilon > 0$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.8}$$

とできる. 次に, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $N_\varepsilon \geq N_1$ かつ

$$\text{(1.9)} \qquad \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1 - 1} - a|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるようにとる (厳密には Archimedes の原理). このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &= \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) \\
&\quad + \frac{1}{n}(|a_{N_1} - a| + \cdots + |a_n - a|) \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) \\
&\quad + \frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}(n - N_1 + 1)\right) \quad (\because n \geq N_1 \text{と (1.8)}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\because n \geq N_\varepsilon \text{と (1.9)}) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

となる. 従って, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ が成り立つ. □

数列が無限大に発散するということを高校で学んだ. このことを ε-N 論法で記述しよう.

定義 1.10 (数列の発散)**.**
収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は**発散する**という.

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が**(正の) 無限大に発散する**とは「任意の正の数 $M > 0$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_0$ ならば $a_n > M]$」ことをいう. このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とか $a_n \to \infty \quad (n \to \infty)$ と書く.

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が**負の無限大に発散する**とは「任意の正の数 $M > 0$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_0$ ならば $a_n < -M]$」ことをいう. このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とか $a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$ と書く.

$a_n \to \infty \quad (n \to \infty)$ を論理記号で書くと

$$\forall M > 0 \text{ に対して } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_0 \Longrightarrow a_n > M$$

となる. $a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$ を論理記号で書くと

$$\forall M > 0 \text{ に対して } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_0 \Longrightarrow a_n < -M$$

となる.

高校で学んだ数列の性質が, ε-N 論法を用いて証明できることを見てみよう.

定理 1.5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 次が成り立つ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 収束先はただ一つしかない. つまり, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ ならば, $a = b$ が成り立つ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 有界である. つまり, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ.

(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ が成り立ち, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ a, b に収束するならば, $a \leq b$ が成り立つ.

証明.

(1) 背理法で示す. $a > b$ と仮定する. $\varepsilon := \dfrac{1}{2}(a-b)$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ よりある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$

$$n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$

が成り立つ. $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $N_0 \geq N_1$ より $|a_{N_0} - a| < \dfrac{1}{2}(a-b)$ だから $a_{N_0} - a > -\dfrac{1}{2}(a-b)$ となるので

$$a_{N_0} > \frac{1}{2}(a+b) \tag{1.10}$$

が成り立つ. 他方, $N_0 \geq N_2$ より $|a_{N_0} - b| < \dfrac{1}{2}(a-b)$ だから $a_{N_0} - b < \dfrac{1}{2}(a-b)$ となるので,

$$a_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b) \tag{1.11}$$

が成り立つ. 従って, (1.10), (1.11) より

$$\frac{1}{2}(a+b) < a_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b)$$

となり矛盾する. $a < b$ の場合も同様にできるので, 各自確かめよ.

(2) $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく. $\varepsilon := 1 > 0$ ととる. すると, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ が成り立つ. 三角不等式を用いると, $n \geq N_1$ ならば

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \tag{1.12}$$

が成り立つ. そこで, $M := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N_1-1}|, 1 + |a|\}$ とおく. すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $1 \leq n < N_1$ のときは $|a_n| \leq M$, $n \geq N_1$ のときは (1.12) より $|a_n| \leq 1 + |a| \leq M$ となるので, $|a_n| \leq M$ が成り立つ.

(3) 背理法で示す. $a > b$ と仮定する. $\varepsilon := \frac{1}{2}(a - b)$ とおく. $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より, $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$$

が成り立つ. そこで, $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $N_0 \geq N_1$ より $|a_{N_0} - a| < \frac{1}{2}(a - b)$ が成り立つから, $a_{N_0} - a > -\frac{1}{2}(a - b)$ より

$$a_{N_0} > \frac{1}{2}(a + b) \tag{1.13}$$

が得られる. 他方, $N_0 \geq N_2$ より $|b_{N_0} - b| < \frac{1}{2}(a - b)$ が成り立つから, $b_{N_0} - b < \frac{1}{2}(a - b)$ より

$$b_{N_0} < \frac{1}{2}(a + b) \tag{1.14}$$

が得られる. よって, (1.13) と (1.14) より

$$b_{N_0} < \frac{1}{2}(a + b) < a_{N_0}$$

となり,「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n \leq b_n$」に矛盾する. □

注意 1.8.

定理 1.5 の (3) の不等号 $\leq$ を $<$ にかえることはできない. たとえば, $a_n := \frac{1}{n}$, $b_n := -\frac{1}{n}$ を考えてみよ. $a_n < b_n$ となるが, $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ は成り立たない.

1.5. 極限の性質

極限が足し算や引き算, 掛け算, 割り算を保存することは高校でよく使っていた. この事実を ε-N 論法を用いて証明しよう.

定理 1.6 (極限の和差積商)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとき, 次が成り立つ.
(1) $a_n + b_n \to a + b$ $(n \to \infty)$.
(2) $a_n - b_n \to a - b$ $(n \to \infty)$.
(3) $a_n b_n \to ab$ $(n \to \infty)$.
(4) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \neq 0, b \neq 0$ ならば $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ $(n \to \infty)$.

証明.
(1) **1.** 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ となることから, 任意の $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在してすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon_1$, $n \geq N_2$ ならば $|b_n - b| < \varepsilon_2$ とできる. ε_1**,** ε_2 **は任意に選べるからあとで選ぶ**ことにして, $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq N_0$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2)
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

となるから, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ であれば $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ が得られる. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ **を仮定して**, ε_1 について解くと $\varepsilon_1 \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる. この推論をもとに証明を書く.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $n \geq N_2$ ならば $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ とできる. $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ ととると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば

$$
\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

すなわち, $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ となる.

(2) (1) の証明を真似して証明してみよ. 三角不等式の使い方に注意すること.

(3) **1.** 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a_n \to a, b_n \to b\ (n \to \infty)$ となることから, 任意の $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在してすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon_1$, $n \geq N_2$ ならば $|b_n - b| < \varepsilon_2$ とできる. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は任意に選べるからあとで選ぶことにして, $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq N_0$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
|a_nb_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b| \qquad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2)
\end{aligned} \tag{1.16}
$$

となる. $\varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b| < \varepsilon$ としたいが, まだ n が残っているので, n を用いずに $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を決めるために次のことを行う.

定理 1.5(2) よりある $M > 0$ が存在してすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ. 従って,

$$
\begin{aligned}
|a_nb_n - ab| &\leq \varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b| \\
&\leq \varepsilon_2 M + \varepsilon_1(|b| + 1) \\
&\leq \varepsilon_1(M + |b| + 1) \quad (\varepsilon_1 + \varepsilon_2\text{を仮定})
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

とできるので, $\varepsilon_1(M + |b| + 1) < \varepsilon$ をみたすように ε_1 を決めればよい[5]. この推論をもとにして証明を書く.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列だから, 定理 1.5(2) より, ある $M > 0$ が存在してすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ とできる. $a_n \to a, b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{M + |b| + 1}$, $n \geq N_2$ ならば $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{M + |b| + 1}$ とできる. $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ ととると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば

$$
\begin{aligned}
|a_nb_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq M|b_n - b| + |a_n - a||b| \qquad (\because \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{は有界}) \\
&< \frac{M + |b|}{M + |b| + 1}\varepsilon \qquad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

すなわち, $|a_nb_n - ab| < \varepsilon$ が成り立つ.

---

[5] $|b|$ のかわりに $|b| + 1$ を使っているのは, あとで, $|b|$ で割り算するときに $|b| = 0$ だと面倒になるからである.

(4) $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ かつ $|b| \neq 0$ より, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_1$ ならば $|b_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$ とできるので, とくに $|b_n| \geq \dfrac{|b|}{2}$ が成り立つ.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より, ある $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_2$ ならば $|a_n - a| < \dfrac{|b|}{4}\varepsilon$, $n \geq N_3$ ならば $|b_n - b| < \dfrac{|b|^2}{4|a|+1}\varepsilon$ とできる. $N_0 := \max\{N_1, N_2, N_3\} \in \mathbb{N}$ とおくと, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - a b_n}{b b_n}\right| \\
&= \left|\frac{(a_n - a)b - a(b_n - b)}{b b_n}\right| \\
&\leq \frac{|a_n - a||b| + |a||b_n - b|}{|b||b_n|} \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \frac{2}{|b|^2}(|b||a_n - a| + |a||b_n - n|) \\
&< \frac{2\varepsilon}{|b|^2}\left(\frac{|b|^2}{4} + \frac{|a||b|^2}{4|a|+1}\right) \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{|b|^2}\left(\frac{|b|^2}{4} + \frac{|b|^2}{4}\right) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

すなわち, $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}\right| < \varepsilon$ が成り立つ. □

注意 1.9.

定理 1.6 の証明の **1.** の議論は書く必要のない考察部分である. そのため, 教科書には書いていないことが多い. しかし, 証明を自分で書けるようにするには, この 1. のアイデアを理解する必要がある. 特に本質的な部分は (1.15), (1.16), (1.17) のような, 証明に必要となる不等式を作り出すところである. この計算が微分積分学や解析学における「評価する」ことであり, よりよい評価 (不等式) を作ることが問題の解決につながることが多い.

高校で事実のみ学んだ「はさみうちの原理」の証明を与えよう. 直感的には明らかと思えるこの事実も, ε-N 論法を用いれば, 証明を与えることができる.

定理 1.7 (はさみうちの原理)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n \leq c_n$ をみたすとする. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ をみたすならば, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して, $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ が成り立つ.

証明.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a_n \to \alpha$ より, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_1$ ならば

$$\alpha - a_n \leq |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

とできる. 次に $b_n \to \alpha$ より, ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_2$ ならば

$$b_n - \alpha \leq |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

とできる. よって, $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ ととれば, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば $a_n \leq c_n \leq b_n$ より

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< a_n - \alpha \quad (\because\ n \geq N_0 \geq N_1) \\ &\leq c_n - \alpha \quad (\because\ a_n \leq c_n) \\ &\leq b_n - \alpha \quad (\because\ c_n \leq b_n) \\ &< \varepsilon \quad (\because\ n \geq N_0 \geq N_2), \end{aligned}$$

すなわち, $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ となる.

□