微分積分学 A 中間試験問題

2019 年 6 月 6 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

学生番号　　　　　　名前

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
問題用紙, 解答用紙の両方を提出すること.

問題 1 は全員が 1 枚両面の答案用紙を用いて答えよ. 問題 2 以降について, 2 題以上を選択して 1 枚片面の答案用紙を用いて答えよ. なお, 必要におうじて $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(*) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$$

を用いてよい.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) A が上に有界であることの定義を述べよ.
  (b) A の上界のなす集合を A_u と書くとき, $a \in \mathbb{R}$ が A の上限であること, つまり $a = \sup A$ であることの定義を A_u を用いて述べよ.
  (c) 有理数の部分集合 A で $\sup A$ が有理数とならない A の例を挙げよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $a_n \to a \ (n \to \infty)$ となることの ε-N 論法による定義を述べよ.
  (b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $-\infty$ に発散すること, すなわち, $a_n \to -\infty \ (n \to \infty)$ となることの ε-N 論法による定義を述べよ.
  (c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調減少であることの定義を述べよ.

(3) 有理数と実数の違いに関係する次の定理の主張をそれぞれ述べよ.
  (a) 実数の連続性[1]
  (b) Bolzano-Weierstrass の定理
  (c) 実数の完備性
  (d) Archimedes の原理

(4) 有理数の稠密性とは何か？ 主張を述べよ.

(5) 自然対数の底の定義を述べよ.

---

[1]実数の切断についての連続性は答えとして認めない. 講義ノートで述べた「実数の連続性」を述べよ.

(6) $\mathbb{R}$ の部分集合 $\left\{2-\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ の上限を求めよ.

(7) 次の性質をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例をあげよ.

  (a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < b_n$ であり, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 2$ となる.

  (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n > 0$ であり, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに発散するが, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ は収束する.

(8) 次の極限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.

  (a) $a > 1$ に対して $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^2}$.

  (b) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2019}{n}\right)^n$.

  (c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n+2} r^k$. ただし $0 < r < 1$ は定数.

  (d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin\sqrt{3}n}{n}$.

  (e) $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ における $\lim_{n\to\infty} a_n$.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

学生番号　　　　　　名前

問題 2.

$\inf(-3,4) = -3$ を示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\inf(-3,4) = -3$ を示すためには,「-3 が下界であること」と「-3 が下界の中で最大であること」の二つを示す必要がある. それぞれについて, 論理記号を用いて表せ.

(2) $\inf(-3,4) = -3$ を示せ.

問題 3.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{19n-5}{3n-1}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{19}{3}$ を ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{19}{3}$ の ε-N 論法を用いた定義を述べよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{19}{3}$ を ε-N 論法を用いて示せ.

問題 4.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{3a_n - 2b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $3a-2b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{3a_n - 2b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $3a-2b$ に収束することの ε-N 論法を用いた定義を述べよ.

(2) 数列 $\{3a_n - 2b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $3a-2b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a > 0$ に収束するとする. 次の問いに答えよ.

(1) ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N$ ならば $|a_n| < 2a$ となることを示せ.

(2) 数列 $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ が a^2 に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 6.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界かつ単調増加とする.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることの定義を述べよ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であることの定義を述べよ.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列であることを示せ.

問題 7.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べよ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であれば, Cauchy 列となることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

微分積分学 A 中間試験問題

2019 年 6 月 6 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

学生番号　　　　　　名前

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 問題用紙, 解答用紙の両方を提出すること.

問題 1 は全員が 1 枚両面の答案用紙を用いて答えよ. 問題 2 以降について, 2 題以上を選択して 1 枚片面の答案用紙を用いて答えよ. なお, 必要におうじて $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(*) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$$

を用いてよい.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) A が下に有界であることの定義を述べよ.
  (b) A の下界のなす集合を A_l と書くとき, $a \in \mathbb{R}$ が A の下限であること, つまり $a = \inf A$ であることの定義を A_l を用いて述べよ.
  (c) 有理数の部分集合 A で $\inf A$ が有理数とならない A の例を挙げよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束すること, すなわち, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ となることの ε-N 論法による定義を述べよ.
  (b) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が ∞ に発散すること, すなわち, $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ となることの ε-N 論法による定義を述べよ.
  (c) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が (広義) 単調増加であることの定義を述べよ.

(3) 有理数と実数の違いに関係する次の定理の主張をそれぞれ述べよ.
  (a) 実数の連続性[2]
  (b) Bolzano-Weierstrass の定理
  (c) 実数の完備性
  (d) Archimedes の原理

(4) 有理数の稠密性とは何か？ 主張を述べよ.

(5) 自然対数の底の定義を述べよ.

[2]実数の切断についての連続性は答えとして認めない. 講義ノートで述べた「実数の連続性」を述べよ.

(6) $\mathbb{R}$ の部分集合 $\left\{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 3\right\}$ の下限を求めよ.

(7) 次の性質をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例をあげよ.

(a) $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するが, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散する.

(b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となり, かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n - a_n > 0$.

(8) 次の極限を求めよ. なお, 答えのみを書くこと.

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1} - 5^n}{7^{n+2} + 4^n}$.

(b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

(c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n+2} r^k$. ただし $0 < r < 1$ は定数.

(d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \sqrt{10}n}{n}$.

(e) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ における $\lim_{n\to\infty} a_n$.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

学生番号　　　　　　名前

問題 2.

$\sup(-5,2)=2$ を示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\sup(-5,2)=2$ を示すためには,「2 が上界であること」と「2 が上界の中で最小であること」の二つを示す必要がある. それぞれについて, 論理記号を用いて表せ.

(2) $\sup(-5,2)=2$ を示せ.

問題 3.

自然数 n に対して $a_n=\dfrac{13n-2}{5n-1}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{13}{5}$ を ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{13}{5}$ の ε-N 論法を用いた定義を述べよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{13}{5}$ を ε-N 論法を用いて示せ.

問題 4.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a,b\in\mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{2a_n-3b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $2a-3b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示したい. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{2a_n-3b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $2a-3b$ に収束することの ε-N 論法を用いた定義を述べよ.

(2) 数列 $\{2a_n-3b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $2a-3b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 5.

0 でない実数からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a>0$ に収束するとする. 次の問いに答えよ.

(1) ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して, $n\geq N$ ならば $|a_n|>\dfrac{1}{2}a$ となることを示せ.

(2) 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が $\dfrac{1}{a}$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 6.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界かつ単調減少とする.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることの定義を述べよ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少であることの定義を述べよ.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列であることを示せ.

問題 7.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べよ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であれば, Cauchy 列となることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.