微分積分学 A 演習問題　第 1 回

問題 1.1 (提出課題)**.**

自然数 n と実数 x に対して, 次を示せ.

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

問題 1.2.

自然数 n に対して, 次を数学的帰納法で示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

問題 1.3.

実数 x と自然数 n に対して次を示せ.

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \\
&\qquad + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\int_0^x (x-t)^{2n-1}\sin t\,dt, \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \\
&\qquad + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\int_0^x (x-t)^{2n}\sin t\,dt.
\end{aligned}$$

微分積分学 A 演習問題　第 2 回

問題 2.1 (提出課題)**.**

$\dfrac{e^x}{1-2x}$ の Taylor-Maclaurin 展開を x^4 の項まで求めよ. すなわち

$$\frac{e^x}{1-2x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

としたときに, $a_0, \dots, a_4$ を求めよ.

問題 2.2.

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x - \sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{(\cos x - 1)^3}$

問題 2.3.

$\log(1+x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよう. 自然数 n と実数 x に対して

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

を示せ.

問題 2.4.

$\log(1+x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を別の方法で形式的に求めよう.

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \cdots$$

を積分することにより

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

を示せ (級数が収束する x の範囲はとりあえず気にしなくてよい).

問題 2.5.

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}$ を求めよ.

微分積分学A 演習問題　第3回

問題 3.1 (提出課題)**.**
　実数上で定義された関数 $f(x)$ は実数 a と自然数 n に対し

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

を示せ.

問題 3.2 (提出課題)**.**
　関数 $f(x)$ が区間 I において微分可能であるとき, 次が成り立つ.

(1) I でつねに $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は I で増加する.
(2) I でつねに $f'(x) < 0$ ならば, $f(x)$ は I で減少する.
(3) I でつねに $f'(x) = 0$ ならば, $f(x)$ は I で定数である.

問題 3.3 (提出課題)**.**
　次を示せ (移項は使わないで示そう).

(1) 1 は一つしかないことを示せ.
(2) $a \in \mathbb{R}$ に対して, $-a$ は一つしかないことを示せ (ヒント: $a + b = 0, a + b' = 0$ となる $b, b' \in \mathbb{R}$ があったとすると, (S3) より $b = b + 0 = b + (a + b')$ となる. 和と b の性質を使って $b = b'$ を示してみよ)
(3) $a \in \mathbb{R}$ に対して $a0 = 0$ を示せ (ヒント: (S3) より $a(0 + 0) = a0$. これに (SP) を使うとどうなるか？).
(4) $a \in \mathbb{R}$ に対して, $(-1)a = -a$ を示せ (ヒント: $a + (-1)a = 0$ を示せばよい).
(5) $(-1)(-1) = 1$ を示せ (ヒント:$(-1)(1 + (-1)) = 0$ を使う).

問題 3.4 (提出課題)**.**
　$a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, $a \leq b$, $c \leq 0$ ならば $ac \geq bc$ を示せ (ヒント: $-c \geq 0$ に (OP) を使い, そのあとに (OS) を 2 回使う).

問題 3.5 (提出課題)**.**
　$a \in \mathbb{R}$ に対して次を示せ.

(1) $|a| \geq 0$
(2) $|-a| = |a|$
(3) $|a|^2 = a^2$
(4) $|a| = 0$ であることと $a = 0$ であることは同値
(5) $-|a| \leq a \leq |a|$

微分積分学 A 演習問題　第 4 回

問題 4.1 (提出課題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A が上に有界であることの定義を書け.
(2) 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の上限 $\alpha := \sup A$ を論理記号を用いて書け.
(3) 実数の連続性の公理を述べよ.
(4) Archimedes の原理を述べよ.

問題 4.2 (提出課題)**.**
$A = (-2, 3)$ とする. $\sup A$ を求め, その証明を与えよ. なお, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 4.3 (提出課題)**.**
$A = (-2, 3)$ とする. $\inf A$ を求め, その証明を与えよ. なお, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 4.4.
実数 a, b は $a < b$ をみたすとする. $I = (a, b)$ とするとき $\sup I$, $\inf I$ を求め, その証明を与えよ.

問題 4.5.
$A := \left\{ 1 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく. $\sup A$ を求め, その証明を与えよ. また, $\max A$ が存在するかどうか答えよ (ヒント: 講義の例のように, 中点を取るというアイデアはうまくいかない. Archimedes の原理を使う必要があるが, どのように記述すればよいか?).

問題 4.6.
$A := \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ と定める. $\sup A = \sqrt{2}$ となることの証明を与えよ. なお, 証明には, 有理数の稠密性を用いる. このことにより, 有理数の部分集合の上限は一般に有理数にならないことがわかる.

問題 4.7.
一般に数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

と書く. $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := 1 - \dfrac{1}{n}$ とおくとき, $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$ を求めて, 証明を与えよ (ヒント:実は問題 4.5 と聞いていることは同じ).

問題 4.8.
次の集合の上限, 下限を求めよ (発表や発表用提出ノートではどうしてその答えになるのかの説明をせよ).

(1) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
(2) $\left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < x + 1\right\}$
(3) $\{3n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$
(4) $\left\{\sin \dfrac{n\pi}{4} : n \in \mathbb{Z}\right\}$
(5) $\left\{\dfrac{1}{m} + (-1)^n \dfrac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

微分積分学 A 演習問題　第 5 回

問題 5.1 (提出課題)**.**

次の各問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を書け.

(2) 収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が (正の) 無限大に発散することの定義を書け.

問題 5.2 (提出課題)**.**

$\dfrac{2n}{n+1} \to 2$ $(n \to \infty)$ が成り立つことの証明を書け.

問題 5.3.

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n-2}{2n+3}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 5.4.

自然数 n に対して $a_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2}\right)\dfrac{1}{n^2}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 5.5.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ となることを示そう (ε-N は使わなくてよい).

(1) $x > 0$ とする. すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

(2) $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ に対して, $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ とおく. このとき $h_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$ を示せ (ヒント: $1 + h_n = \sqrt[n]{n}$ に (1) を使う).

(3) はさみうちの原理を認めて, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ となることを示せ.

問題 5.6.

自然数 n に対して $a_n := \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ となることの証明を ε-N 論法を用いて証明せよ. (ヒント: アイデアは問題 5.5)

問題 5.7.

実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = r^n$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを, ε-N 論法を用いて証明せよ. ただし, log を使わずに証明すること (ヒント: $r = \dfrac{1}{1+x}$ と書き変えて問題 5.5 の (1) の不等式を使う)

問題 5.8.

自然数 n に対して $a_n = -\dfrac{1}{n}, b_n = \dfrac{1}{n}$ とおく.

(1) すべての n について, $a_n < b_n$ であることを示せ.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ. ただし, ε-N 論法を用いなくてよい.

(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < b_n$ であっても, 一般に $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ とはならないことを説明せよ.

微分積分学 A 演習問題　第 6 回

問題 6.1 (提出課題)**.**
　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a+b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 6.2 (提出課題)**.**
　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. また, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$, $|b_n| \leq M$ が成り立つとする[1]. このとき, 数列 $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ab に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 6.3.
　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a-b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 6.4.
　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束したとする. このとき $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ を ε-N 論法を用いて証明せよ (ヒント: 三角不等式を用いる).

問題 6.5.
　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, $a \in \mathbb{R}$ に収束するとし, $a \neq 0$ を仮定する. また, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \geq \dfrac{|a|}{2}$ が成り立つとする[2]. このとき, 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $\dfrac{1}{a}$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 6.6.
　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, 有理数列 $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して, $\lim_{k\to\infty} q_k = x$ とできることを示せ (ヒント: 有理数の稠密性を使う. $k \in \mathbb{N}$ に対して, $x < x + \dfrac{1}{k}$ である)

問題 6.7.
　数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 有界である. つまり, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つことを示せ.

問題 6.8.
　収束数列 $\{a_n\}_{n=1}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ が成り立つとする. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ となることを示せ.

問題 6.9.
　収束数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ を仮定する. このとき, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_0$ ならば $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$ が成り立つことを示せ.

問題 6.10.
　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n > 0$ をみたすとする. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$ が同値であることを示せ.

---

[1]ただし, この仮定をする必要はない. 問題 6.7 も参照せよ.
[2]ただし, この仮定をする必要はない. 問題 6.9 も参照せよ.

微分積分学 A 演習問題　第 7 回

問題 7.1 (提出課題)**.**

次の各問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調増加であることの定義を書け.
(2) 有界な単調数列の収束性に関する定理を述べよ.
(3) 自然対数の底の定義を述べよ.
(4) Bolzano-Weierstrass の定理を述べよ.

問題 7.2 (提出課題)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界かつ単調減少となるならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

となることを示せ.

問題 7.3.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに有界であるとする. このとき, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ がともに収束列となるような部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がとれることを証明せよ.

問題 7.4 (優収束定理)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とおく.

(1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加となることを示せ.
(2) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \le b_n$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k < \infty$ をみたすとする. このとき $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ.

問題 7.5.

次が正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a \in \mathbb{R}$ に収束し, ある正定数 $K > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < K$ と仮定する. このとき, $a < K$ が成り立つ.
(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ をみたすとする. このとき, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が成り立つ.

問題 7.6.

次をみたす数列の例を与えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.
(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.
(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するが $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は発散する.
(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = 0$ となる.

微分積分学 **A** 演習問題　第 8 回

問題 8.1 (宿題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べよ.
(2) 実数の完備性に関する定理を述べよ.
(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であるとき, Cauchy 列であることを証明せよ.

問題 8.2.
$r, q, x \in \mathbb{R}, r \neq \pm 1$ に対して, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = r a_n + q \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を求めよ.
(2) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を調べることで, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束するための r に関する条件を求めよ. ただし, 縮小写像の原理は用いないこと.
(3) 縮小写像の原理を用いて, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための r に関する条件を求めよ.

問題 8.3.
数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して, ある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L |a_n - a_{n-1}|$$

をみたすとする. このとき, $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $m > n$ ならば

$$|a_m - a_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} |a_1 - a_0|$$

となることを示せ.

問題 8.4.
$A > 1, x > 0$ に対して漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n + A} \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

を考える. 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束することを示せ.

問題 8.5.
関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

をみたすとする. このとき, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = x > 0 \end{cases}$$

により定まる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束することを示せ.

微分積分学 A 演習問題　　(第 9 回)

問題 9.1 (宿題)**.**
実数の部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $A \subset X$ に対して, f の A による像 $f(A)$ の定義を述べよ.
(2) f が単射であることの定義を述べよ.
(3) f が (広義) 単調増加であることの定義を述べよ.

問題 9.2 (宿題)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in (0, \infty))$$

で定める.

(1) 像 $f([-2, 1])$ を求めよ.
(2) f は単射でないこと, g は単射となることを示せ.

問題 9.3 (宿題)**.**
次を求めよ.

(1) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(2) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$
(3) $\arctan(1)$
(4) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$

問題 9.4.
Euler の公式と指数法則をみとめて, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して加法定理

$$\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

を示せ.

問題 9.5.
$a > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して, $a^x := \exp(x \log a)$ と**定義する**. 任意の $a, b > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して, $(ab)^x = a^x b^x$ となることを, 定義に基づいて示せ.

問題 9.6.
任意の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, ある奇関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とある偶関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して, $f = g + h$ と書けることを示せ (ヒント: 書けるとしたらどうなるか？).

問題 9.7.
指数法則と逆関数の性質を用いて,「任意の $a, b > 0$ に対して $\log(ab) = \log a + \log b$ を示せ.

問題 9.8.
$a > 0, a \neq 1$ に対して, 底の変換公式

$$\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$$

を導け.

微分積分学 A 演習問題　(第 10 回)

問題 10.1 (宿題)**.**

$I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して, 次の定義を ε - δ 論法で述べよ.

(1) f が $x \to x_0$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.

(2) f が $x \to x_0$ のときに, ∞ に発散する.

問題 10.2 (宿題)**.**

$\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x}$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 10.3 (宿題)**.**

$\displaystyle\lim_{x\to -1} x^2$ を求め ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

以下の問題では $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $f : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $g : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して, $f(x) \to \alpha$, $g(x) \to \beta \quad (x \to x_0)$ とする.

問題 10.4.

$|f(x)| \to |\alpha| \quad (x \to x_0)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 10.5.

$(f(x) + g(x)) \to \alpha + \beta \quad (x \to x_0)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 10.6.

ある $M > 0$ が存在して, すべての $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ に対して $|f(x)| \le M$,$|g(x)| \le M$ が成り立つと仮定する[3]. このとき, $(f(x)g(x)) \to \alpha\beta \quad (x \to x_0)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 10.7.

$\alpha > 0$ とする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ に対して

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > \frac{\alpha}{2}$$

とできることを示せ.

問題 10.8.

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ を求めよ.

問題 10.9.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(bx)}{\sin(ax)}$ を求めよ.

問題 10.10.

$\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}}$ を求めよ.

---

[3] この仮定は実は必要ない.

微分積分学 A 演習問題　(第 11 回)

問題 11.1 (宿題)**.**
次の定義を ε-δ 論法で述べよ.

(1) $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ に対して, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ が $x \to x_0 + 0$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.

(2) $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ に対して, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ が $x \to x_0 - 0$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x \to \infty$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.

(4) $I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in I$ で連続.

問題 11.2 (宿題)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := 2x^3 + 1$ で定義する. f が $x = -1$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 11.3.
$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上連続ならば, $|f| : I \to \mathbb{R}$ も I 上連続であることを示せ. なお, 任意の $x \in I$ に対して, $|f|(x) := |f(x)|$ で定義する.

問題 11.4.
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

を示せ.

問題 11.5.
$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ が I 上連続であれば, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ も連続になることを示せ. なお, $x \in I$ に対して

$$\max\{f,g\}(x) := \max\{f(x),g(x)\}, \quad \min\{f,g\}(x) := \min\{f(x),g(x)\}$$

と定義する.

問題 11.6.
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が **Lipschitz 連続**, すなわち, ある定数 $L > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (a,b)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \le L|x - x'|$$

をみたすとする. このとき, f は (a,b) 上連続であることを示せ.

問題 11.7.
$\displaystyle\lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{x+1}$, $\displaystyle\lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{x+1}$ を求めよ.

問題 11.8.
$I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in I$ で**右連続**であるとは

$$f(x) \to f(x_0) \quad (x \to x_0 + 0)$$

と教科書に書かれている. ε-δ 論法による定義を書け.

問題 11.9.
$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ が I 上連続であるとする. 「すべての $x \in I \cap \mathbb{Q}$ に対して $f(x) = g(x)$」が成り立つならば, 「すべての $x \in I$ に対して $f(x) = g(x)$」となることを示せ.

微分積分学 A 演習問題　(第 12 回)

問題 12.1 (宿題)**.**
次の定理の主張を述べよ.

(1) 中間値の定理
(2) Weierstrass の最大値定理

問題 12.2.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であれば, $f + g$ も $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 12.3.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であれば, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して λf は $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 12.4.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続とするとき

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

となることを示せ.

問題 12.5.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^3 + x - 1$ とおく. このとき, $f(x) = 0$ となる実数解 $x \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ. どの範囲に実数解があるか？

問題 12.6.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続とする. $f(a)f(b) < 0$ ならば, $f(x) = 0$ となる実数解 $x \in [a, b]$ が存在することを示せ.

問題 12.7.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であれば, fg も $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 12.8.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続とするとき, f の像 $f([a, b])$ が閉区間となることを示せ.

問題 12.9.
$f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

で定義する.

(1) f が $(0, 1)$ 上連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.
(2) f の最大値が存在しないことを説明せよ.

問題 12.10.
$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ に対して

(A) f は $x_0 \in I$ で連続
(B) すべての $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ に対して, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ならば $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$

とおく.

(1) (A) ならば (B) が成り立つことを示せ.
(2) (B) ならば (A) が成り立つことを示せ.

微分積分学 A 演習問題　(第 13 回)

問題 13.1 (宿題)**.**

次の各問いに答えよ.

(1) $I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上一様連続であることの定義を述べよ.

(2) 教科書の定理 3.12(Heine-Cantor の定理ということがある) の主張を書け. 授業動画も参考にせよ.

問題 13.2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := 3x + 2$ で定める. このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ.

問題 13.3.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \sqrt{x^2+1}$ で定める. このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ(ヒント: $x, x' \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{|x+x'|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x'^2+1}} \leq \dfrac{|x|+|x'|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x'^2+1}} \leq 1$ となることを使う).

問題 13.4.

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が **Lipschitz 連続**, すなわち, ある定数 $L > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (a,b)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

をみたすとする. このとき, f は (a,b) 上一様連続であることを示せ.

問題 13.5.

$0 < \alpha < 1$ に対して $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が α **次 Hölder 連続**, すなわち, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (a,b)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|^{\alpha}$$

をみたすとする. このとき, f は (a,b) 上一様連続であることを示せ.

問題 13.6.

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in (0,1)$ に対して $f(x) := \sin \dfrac{1}{x}$ とおく.

(1) $x \in (0,1)$ に対して, 微分 $\dfrac{df}{dx}(x)$ を求めよ.

(2) 導関数 $\dfrac{df}{dx} : (0,1) \to \mathbb{R}$ は有界とならないことを示せ.

注意.

実は「開区間 I 上で定義された関数は, 導関数が I 上有界ならば I 上一様連続」が示せる. 対偶を取れば「I 上一様連続でなければ, 導関数は I 上有界でない」が得られる. 「導関数は有界でない」からといっても, 一様連続にならないことは示せないが (導関数は有界でないが Hölder 連続となることがある), 問題 13.6 では, f が $(0,1)$ 上一様連続にならないことを実際に示すことができる.

問題 13.7.

次の性質を持つ関数の例をあげよ (定義域をきちんと明記すること).

(1) $x = 0$ で右連続だが, $x = 0$ で連続でない.

(2) 有界だが最小値が存在しない.

(3) 連続だが一様連続でない.

微分積分学 A 演習問題　(第 14 回)

a を学生番号の下 1 桁目, b を学生番号の下 2 桁目とせよ (例:9963 の場合は, $a = 3$, $b = 6$)

問題 14.1 (課題).

$I := (-a-1, b)$ とするとき $\sup I$, $\inf I$ を求め, その証明を与えよ.

問題 14.2 (課題).

$\dfrac{2n+a+1}{n+b} \to 2\ (n \to \infty)$ となることの ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 14.3 (課題).

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\left((x+1)\sin\frac{1}{x+1}\right)$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 14.4 (課題).

$f : (0,2)\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $g : (0,2)\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ に対して, $f(x) \to \alpha$, $g(x) \to \beta \quad (x \to 1)$ とする. $(f(x) - g(x)) \to \alpha - \beta \quad (x \to 1)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 14.5 (課題).

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3 + 2x^2 - 3x$ で定義する. f が $x = a+1$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 14.6.

次の各問いに答えよ.

(1) 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A が上に有界であることの定義を書け.
(2) 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の上限 $\alpha := \sup A$ を論理記号を用いて書け.
(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を書け.
(4) 収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が (正の) 無限大に発散することの定義を書け.
(5) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べよ.
(6) 関数 $f : (0,2)\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ が $x \to 1$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を述べよ.
(7) 関数 $f : (0,2)\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ が $x \to 1$ のときに, 負の無限大に発散することの定義を述べよ.
(8) 関数 $f : (0,2)\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ が $x \to 1+0$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を述べよ.
(9) 関数 $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ が $x \to -\infty$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を述べよ.
(10) $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $x = x_0 \in I$ で連続であることの ε-δ 論法による定義を述べよ.
(11) $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上一様連続であることの定義を述べよ.
(12) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x^2 - 2x$ で定める. $f((-a, b+1))$ を求めよ.
(13) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \exp(-x^2)$ で定める. $f((-a-3, b+2])$ を求めよ.
(14) $\arctan(\tan(\pi))$ を求めよ.
(15) $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ.