第 1 章

微分積分の方法と問題点

微分積分学を基礎から学ぶとはどういうことであるかを説明するために, 高校までに学んだ知識をもとにして, 微分積分の方法を高校の教科書に沿った書き方で説明しよう. そのなかで, 高校までに学んだ微分積分の方法にはどのような問題があるかを探ってみる.

1.1. Taylor 展開

高校で学んだ微分積分の計算方法の復習から始めよう. 関数 $f(x), g(x)$ が微分可能であるとき, 積の導関数の公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{1.1}$$

が成り立つ. また, 実数上で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とするとき, 実数 a, b に対して微分積分学の基本定理と呼ばれる公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{1.2}$$

が成り立つ. $f(x)$ は $f'(x)$ の原始関数だから (1.2) より

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{1.3}$$

が成り立つこともわかる. この 2 つの公式と積分の性質から, 微分積分で頻繁に使う部分積分法の公式が得られる. 実際に (1.1) と (1.3) から

$$\begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx \\ &= \int_a^b \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)\,dx \end{aligned}$$

より, 部分積分法の公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{1.4}$$

が得られる.

e を自然対数の底, すなわち

$$e := \lim_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

とする. $(e^x)' = e^x$ となることはとりあえず認めておこう. t に関する関数の微分を $'$ で表すことにすると, $(t-x)' = 1$ だから部分積分法の公式 (1.4) より

$$e^x - e^0 = \int_0^x e^t\,dt = \int_0^x (t-x)'e^t\,dt = e^0 x - \int_0^x (t-x)e^t\,dt,$$

すなわち

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t\,dt, \tag{1.5}$$

が得られる. 次に, $(-\frac{1}{2}(x-t)^2)' = (x-t)$ だから部分積分法の公式 (1.4) により

$$\int_0^x (x-t)e^t\,dt = \int_0^x \left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)' e^t\,dt = \frac{1}{2}e^0x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2e^t\,dt$$

が得られるので, (1.5) を組み合わせると

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2e^t\,dt \tag{1.6}$$

が得られた. さらに, $(-\frac{1}{3}(x-t)^3)' = (x-t)^2$ だから部分積分法の公式 (1.4) により

$$\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2e^t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \left(-\frac{1}{3}(x-t)^3\right)' e^t\,dt = \frac{1}{3!}e^0x^3 + \frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3e^t\,dt$$

が得られるので, (1.6) を組み合わせると

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3e^t\,dt \tag{1.7}$$

以下, この操作を帰納的に繰り返せば, 自然数 n に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^ne^t\,dt$$

となることが予想できるであろう.

定理 1.1.
実数 x と自然数 n に対して, 次が成り立つ:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^ne^t\,dt. \tag{1.8}$$

証明.

n に関する数学的帰納法で示す. $n=1$ の場合は (1.5) である. 次に n のときは正しい, つまり,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt \tag{1.9}$$

が正しいと仮定して, $n+1$ のとき, つまり

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-t)^{n+1} e^t\,dt \tag{1.10}$$

を示す. $(-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1})' = (x-t)^n$ となることに注意すると, 部分積分法の公式 (1.4) より

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt &= \frac{1}{n!}\int_0^x \left(-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\right) e^t\,dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!}e^0 x^{n+1} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^{n+1} e^t\,dt\end{aligned}$$

が得られる. この式を (1.9) に代入すれば (1.10) が得られる. よって数学的帰納法により, (1.8) はすべての自然数 n に対して成立する. □

(1.8) で $n \to \infty$ としたらどうなるだろうか? とくに最後の項の積分について, $n \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt \to 0 \tag{1.11}$$

となることを $x > 0$ のときに示そう. $0 \le t \le x$ に対して

$$0 \le (x-t)^n e^t \le x^n e^x$$

となるから, 両辺 $0 \le t \le x$ で積分すると定積分と不等式の性質から

$$0 \le \int_0^x (x-t)^n e^t\,dt \le \int_0^x x^n e^x\,dt = x^{n+1}e^x \tag{1.12}$$

が成り立つ. $[x]$ で x を越えない最大の整数を表すことにして, $m := [x]+1$ とおくと, $m > x$ である. $n > m$ となる自然数 n に対して

$$\left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt\right| \le xe^x \frac{x^n}{n!} \le xe^x \frac{x}{1}\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{m}\left(\frac{x}{m}\right)^{n-m} \tag{1.13}$$

となる. (1.13) の右辺は $n \to \infty$ のとき, 0 に収束するので, (1.11) が成り立つことがわかった.

実は $x < 0$ のときも $n \to \infty$ のとき (1.11) は成り立つ. 以上により, 次が得られる.

定理 1.2 (指数関数の Taylor-Maclaurin 展開)**.**
実数 x に対して

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \tag{1.14}$$

が成り立つ.

一般に実数上で定義された関数 $f(x)$ は実数 a と自然数 n に対し

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \end{aligned} \tag{1.15}$$

と書くことができる. 実際に, $n = 1$ のときは (1.3) と部分積分法の公式 (1.4) から

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt &= \int_a^x (-(x-t))' f'(t)\,dt \\ &= f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt \end{aligned}$$

よりわかる. $(x-t)^n = (-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1})'$ であることに注意すれば, あとは数学的帰納法により (1.15) が成り立つことがわかる.

問題 1.1.
数学的帰納法を用いて, (1.15) を示せ.

問題 1.2.
数学的帰納法を用いて, 自然数 n と実数 x に対して,

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

となることを示せ.

問題 1.3.

実数 x と自然数 n に対して次を示せ.

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \\
&\quad + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\int_0^x (x-t)^{2n-1}\sin t\,dt, \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \\
&\quad + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\int_0^x (x-t)^{2n}\sin t\,dt.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

1.2. 微分積分学の論理的基礎

1.2.1. 微分積分学の基本定理. Taylor 展開を導出するうえで, 積の導関数の公式と微分積分学の基本定理を用いた. この節では, 微分積分学の基本定理に着目しよう.

定理 1.3 (微分積分学の基本定理)**.**

実数上で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とするとき, 実数 a, b に対して微分積分学の基本定理と呼ばれる公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{1.17}$$

が成り立つ.

微分積分学の基本定理に現れる $f(x)$ の原始関数とは, $F'(x) = f(x)$ をみたす関数 $F(x)$ のことであった. $f(x)$ が連続のときに原始関数 $F(x)$ がないのだとしたら, 微分積分学の基本定理は何も意味をなさない. つまり, 連続関数 $f(x)$ に対して, 原始関数が存在するかどうかは重要な問題になる. 実は $f(x)$ の原始関数の一つとして

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy \tag{1.18}$$

ととることができる. これにあれ？ と思うのは正しい. (1.17) の右辺に代入すると,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)\,dy - \int_a^a f(y)\,dy = \int_a^b f(y)\,dy \tag{1.19}$$

となり, (1.17) がすんなり導けてしまうからである. 実際に重要な点は, (1.18) の右辺の積分が本当に意味を持っているか？ である. このことを説明するためには, 閉区間上の連続関数における重要な性質を説明しなければならないが, このことは高校までの数学では説明ができない. あとにまわすことにしよう.

ところで, 微分積分学の基本定理にはまだ気にしなければいけないことがある. 定理の中で「原始関数の一つを $F(x)$ とするとき」となっている. つまり, 原始関数であれば, どの原始関数を使っても (1.17) が成り立つということである. 具体例を使って, 確かめてみよう.

例 **1.4.**
定積分

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx$$

を求めよう. $\sin x$ の原始関数 $F(x)$ がわかれば

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = F(\pi) - F(0) \tag{1.20}$$

となるわけである. あとは, $F'(x) = \sin x$ となる関数 $F(x)$ をみつければよい, すぐに思いつくのは, $F(x) = -\cos x$ であろう. これを (1.20) に代入すれば

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

と積分の値は 2 となる. ところで, $F(x) = -\cos x + 1$ としても, $F'(x) = \sin x$ となる. この $F(x)$ を (1.20) に代入すると

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = (-\cos\pi + 1) - (-\cos 0 + 1) = 2$$

となり, やっぱり積分の値は 2 となる.

同じ値になるということは微分積分学の基本定理に含まれている. つまり, 誰が原始関数を探してきても, 積分の値は同じになるということである. $\sin x$ の原始関数 $F(x)$ でひねくれたものをうんと考えてみて欲しい. どの $F(x)$ を使ったとしても $F(\pi) - F(0) = 2$ となるはずである.

つまり, 原始関数の選び方に依らずに, (1.17) は成立してしまうというわけである. 微分積分学の基本定理は思っているよりも難しそうであることがわかって頂けるであろうか.

1.2.2. 増減表はなぜ正しい？. 関数のグラフを書くときに, 関数を微分して, 増減表を書く練習は高校のときに行ったであろう. 微分の定義から復習しよう.

定義 1.5.
開区間上で定義された関数 $f(x)$ について, 極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{1.21}$$

が存在するとき, これを $x=a$ における $f(x)$ の**微分係数**といい, $f'(a)$ と書く. また, このとき, $f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるという. 関数 $f(x)$ がある区間 I に属するすべての x で微分可能であるとき, $f(x)$ は**区間 I において微分可能**であるという.

上記の定義のもとで, 次の定理を使って, 増減表を書いていた.

定理 1.6.
関数 $f(x)$ が区間 I において微分可能であるとき, 次が成り立つ.
(1) I でつねに $f'(x)>0$ ならば, $f(x)$ は I で増加する.
(2) I でつねに $f'(x)<0$ ならば, $f(x)$ は I で減少する.
(3) I でつねに $f'(x)=0$ ならば, $f(x)$ は I で定数である.

$f'(a)$ はグラフ $y=f(x)$ の $x=a$ での接線の傾きであることを知っていれば, 定理 1.6 は妥当なもののように思える. しかし, グラフは思考の手助けにはなるが, 証明に使うわけにはいかない. そこで, グラフによる直感を正当化するための平均値の定理を使うことにしよう.

定理 1.7 (平均値の定理)**.**
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ において連続, 開区間 (a,b) において微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{1.22}$$

をみたす $a<c<b$ が存在する.

平均値の定理を用いれば, 定理 1.6 が証明できる. どの場合も証明の方法はほぼ同じである. ここでは, (1) の「I でつねに $f'(x)>0$ ならば, $f(x)$ は I で増加する.」を示してみよう. 示すべきことは, 「区間 I 上の二点 a,b が $a<b$ を満たすときに $f(a)<f(b)$ を示す」である.

定理 1.6 の (1) の証明.

区間 I 上の二点 a, b が $a < b$ を満たすならば, 平均値の定理 (定理 1.7) より,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

をみたす $a < c < b$ が存在する. 仮定より $f'(c) > 0$ であることから, $a < b$ であることも使うと

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) > 0$$

となる. よって, $f(b) > f(a)$ となることがわかったので, $f(x)$ は I で増加する. □

さて, 次は平均値の定理をどうやって証明するかになる. これまたグラフを書いてみるとなんとなく正しいようにみえる主張である. しかし, さきほどと同様, グラフを証明にそのまま使うわけにはいかない. 平均値の定理の証明のために, 閉区間上の連続関数に関する重要な性質を紹介しよう.

定理 1.8 (Weierstrass の最大値定理)**.**

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で連続ならば関数 $f(x)$ は最大値, 最小値をもつ. すなわち, $a \leq c \leq b$, $a \leq d \leq b$ が存在して,

すべての $a \leq x \leq b$ に対して $f(x) \leq f(c)$ ($f(c)$ は最大値),
すべての $a \leq x \leq b$ に対して $f(x) \geq f(d)$ ($f(d)$ は最小値)

が成り立つ.

Weierstrass の最大値定理 (定理 1.8) をみとめて, 平均値の定理 (定理 1.7) を証明してみよう.

定理 1.7 の証明.

$f(x)$ が定理 1.7 の仮定をみたすとして,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1.23}$$

とおく. $f(x)$ の仮定から $F(x)$ は $[a, b]$ 上連続で, (a, b) 上微分可能であって, $F(a) = F(b) = f(a)$ となる. $F'(c) = 0$ となる $a < c < b$ がもしみつかれば,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1.24}$$

から,

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1.25}$$

となり, 平均値の定理の証明が終わる.

$F'(c) = 0$ となる $a < c < b$ をみつけよう. Weierstrass の最大値定理 (定理 1.8) より $a \leq c, c' \leq b$ が存在して, $F(c)$ は最大値, $F(c')$ は最小値となる. c, c' のどちらかは開区間 (a, b) に属することを示そう. $F(x)$ が定数関数, すなわち, $F(x) = F(a) = F(b)$ となっているときは, $c = c' = \frac{a+b}{2}$ と取り直すことができるので明らかである. そうでないときは, $F(x)$ は定数関数でないことと, $F(a) = F(b)$ だから c か c' のどちらかは (a, b) に属さなければならない, つまり, c, c' の両方が a か b になることはない.

以下, $a < c < b$ となったとして, $F'(c) = 0$ を示す. $a < x < c$ であれば, $F(x) \leq F(c)$ であり $x - c < 0$ に注意すると

$$\frac{F(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{1.26}$$

となる. $a < x < c$ のもとで $x \to c$ とすれば $F'(c) \geq 0$ が得られる. 他方, $c < x < b$ であれば, $F(x) \leq F(c)$ であり $x - c > 0$ に注意すると

$$\frac{F(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{1.27}$$

となる. $c < x < b$ のもとで $x \to c$ とすれば $F'(c) \leq 0$ が得られる. $F'(c) \geq 0$ と $F'(c) \leq 0$ の両方が成り立たなければならないことから $F'(c) = 0$ が得られた. □

さて, Weierstrass の最大値定理から平均値の定理を証明したのであるが, Weierstrass の最大値定理はどのようにして証明すればよいのであろうか? これまた, グラフを考えると明らかにみえる主張であるが, どうやって証明すればよいかとなると, 厄介な問題となる. これを示すには, **実数とは何か?** を考えなければいけない.

1.3. 円周率を求める

少し気分をかえて, 円周率 π を計算してみよう. 円周率はおよそ 3.14 と習ったのであるが, どうやって求めればよいのであろうか? そもそも円周率とは何かであろうか?

定義 1.9 (円周率)**.**
すべての円について, **円周率** π を

$$\pi := \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$$

で定める.

注意 1.10.
どの円についても, $\frac{円周の長さ}{直径}$ は等しい. これは, すべての円が相似であることから従う. 従って, 定義 1.9 において, 円をかえることで, 円周率がかわってしまうということはない.

注意 1.11.
$A = B$ は「A と B が等しい」と「A を B で定める (もしくは A に B を代入する)」の二つの意味がある. この違いを明確にするため,

$$A = B \quad A \text{ と } B \text{ が等しい.}$$
$$A := B \quad A \text{ を } B \text{ で定める.}$$

と書きわけることにする.

半径 1 の円の円周の長さを求めて, 2 でわれば円周率 π は求まるはずである. ではどうやって円周の長さを求めればよいのであろうか？ Archimedes は「半径 1 の円に内接する正 3×2^n 多角形の周の長さ s_n」と「半径 1 の円に外接する正 3×2^n 多角形の周の長さ S_n」を考えた. すると, すべての自然数 n に対して, $s_n \leq 2\pi\pi \leq S_n$ が成り立つはずだから, n を大きくすれば, 円周率の近似値を求めることができると考えた. そして, 次の漸化式を得た.

定理 1.12 (Archimedes)**.**
すべての自然数 n に対して

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n}, \tag{1.28}$$

$$s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n \tag{1.29}$$

が成り立つ.

証明.
1. s_n を求める. 内接する正 $6 \times 2^{n-1}$ 角形の一辺の長さは $2 \times 1 \times \sin \dfrac{\pi}{6 \times 2^{n-1}}$ となるので

$$s_n = (6 \times 2^{n-1}) \times \left(2 \times \sin \frac{\pi}{6 \times 2^{n-1}}\right) = 6 \times 2^n \sin \frac{\pi}{3 \times 2^n}$$

となる.

2. S_n を求める. 外接する正 $6 \times 2^{n-1}$ 角形の一辺の長さは $2 \times 1 \times \tan \dfrac{\pi}{6 \times 2^{n-1}}$ となるので

$$s_n = (6 \times 2^{n-1}) \times \left(2 \times \tan \frac{\pi}{6 \times 2^{n-1}}\right) = 6 \times 2^n \tan \frac{\pi}{3 \times 2^n}$$

となる.

3. (1.28) を示す. 倍角の公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right) - 1,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)$$

より

$$\begin{aligned}\frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n} &= \frac{1}{6\times 2^n \tan\frac{\pi}{3\times 2^n}} + \frac{1}{6\times 2^n \sin\frac{\pi}{3\times 2^n}} \\ &= \frac{\cos\frac{\pi}{3\times 2^n} + 1}{6\times 2^n \sin\frac{\pi}{3\times 2^n}} \\ &= \frac{2\cos^2\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}{6\times 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}} \quad (\because \text{ 倍角公式}) \\ &= \frac{2}{6\times 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}} = \frac{2}{S_{n+1}}\end{aligned}$$

がわかる.

4. (1.29) を示す. 倍角の公式より

$$\begin{aligned}S_{n+1}s_n &= \left(6\times 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\left(6\times 2^n \sin\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \\ &= \left(6\times 2^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}\right)\left(6\times 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right) \\ &= \left(6\times 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)^2 = S_{n+1}\end{aligned}$$

が得られる. □

(1.28) と (1.29), s_1 と S_1 を直接計算することにより

$$\begin{cases} \dfrac{2}{S_{n+1}} = \dfrac{1}{S_n} + \dfrac{1}{s_n}, \\ s_{n+1}^2 = S_{n+1}s_n, \\ s_1 = 6, \\ S_1 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

得られる. この漸化式から, s_n, S_n を計算することができる.

例 **1.13.**

$n = 2$ のとき, s_2, S_2 を求める.

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{2}{\frac{1}{S_1} + \frac{1}{s_1}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{6}} \\ &= 2 \div (1 \div 4\sqrt{3} + 1 \div 6) \simeq 6.4310, \end{aligned}$$

$$s_2 = \sqrt{S_2 s_1} = \sqrt{6.4310 \times 6} \simeq 6.2117$$

となる.

$n = 5$ まで計算してみると

n	s_n	S_n	π の評価
1	6	6.9282	$3.0000 \leq \pi \leq 3.4641$
2	6.2117	6.4310	$3.1058 \leq \pi \leq 3.2155$
3	6.2654	6.3197	$3.1327 \leq \pi \leq 3.1598$
4	6.2789	6.2926	$3.1394 \leq \pi \leq 3.1463$
5	6.2830	6.2873	$3.1415 \leq \pi \leq 3.1436$

と評価が得られる. $n = 5$ まで計算してみると, 円周率がおよそ 3.14 であることがわかる. Archemedes はこの計算をすべて手で行っていたことには注意をするべきである. この時代には, 電卓はおろか, 三角関数もなかったと考えられており[1], 近似計算を行っていたことは驚異に値する.

ところで, この議論にはそもそも, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ や $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が円周率の 2 倍に本当に近づいているのかという問題がある. もし,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

が**存在すれば**, (1.29) で $n \to \infty$ とすれば, $s^2 = Ss$ だから, ($s \neq 0$ を示せば) $s = S$ がわかる. しかし, この**存在すれば**はどうやって示せばよいのだろうか？

さらにいえば, 「円周の長さ」のような, 曲線の長さはいったいどのように定めればよいのであろうか？ 線分の長さからどうやって自然に曲線の長さを定めるべきであろうか？ 先に答えをいうと, これは「積分と極限」である. では, 極限とは何であろうか？ 数列の極限, 関数の極限とはいったい何であろうか？ この答えは「実数」である. では, 「実数」とは何であろうか？

[1]アイデアはあったかもしれないが, 加法定理などがあったかどうかは定かでない.

一変数の微分積分の当面の目標は, 微分積分学を「実数とは何か？」からはじめて, 厳密にくみたて直すことである. 例えば

$$\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3\right)'\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \tag{1.30}$$

がなぜ正しいのか？ を俯瞰することである. この (1.30) は高校で習ったと思って信じてよいわけではないことに注意して欲しい. 左辺の積分はグラフの面積を表す式 (より難しくいうと, $0 \leq x \leq 1$ のすべての情報がわかっていないとわからない式) であるのに対して, 微分は瞬間の速度を求める式 (x における微分を計算したかったら, x の近くの関数の情報だけわかればよい) である. 「速度と面積に関係がある」と高校生に説明して, はたして高校生が納得できるであろうか？「微分と積分は互いに逆の計算である」は間違ってはいないが, 数式から離れてみると, いかに不思議なことを主張しているかがわかると思う. この証明を目標に, 微分積分をくみたてることにしよう.

第 2 章

実数と数列

高校までに,「自然数」,「整数」,「有理数」,「実数」,「複素数」の 5 つの数を学んだ. これらの代数的な性質をみてみよう.

自然数は, 足し算と掛け算ができ, 大小関係があるが, 引き算と割り算が自然数のなかだけではできない. 例えば, 3, 5 は自然数であるが, $3 - 5$ や $3 \div 5$ は自然数ではない. 整数は, 引き算ができるようになるが, 割り算はまだ整数のなかだけではできない[1]. 有理数や実数になると, 0 ではない数で割り算をすることができる[2]. 複素数は, やはり足し算, 引き算, 掛け算, 割り算ができるが, 大小関係がなくなる. たとえば, 1 と $i = \sqrt{-1}$ のどちらが大きいか？ は考えない.

さて, 高校生でも, 自然数, 整数, 複素数は「有理数, 実数」とは違うということがわかる. では, 有理数と実数はどう違うのだろうか？ 有理数は分数で表すことができる数, 実数だが有理数ではない数は分数で表すことができない数と説明されているが, そもそも実数とは何であろうか？ 高校の教科書では, 実数とは「整数と有限小数と無限小数」と書いてあるが, では無限小数とは何であろうか？ 答えは極限であり, 極限とは実数である. 結局のところ**実数とは何であろうか？** このことを述べるために, 集合論の基礎事項の復習からはじめよう.

2.1. 集合論の基礎

ものの集まりを**集合**といい, そのもの一つ一つを集合の**要素**とか**元**という. a が集合 A の要素であるとき, a は A に**属する**といい, $a \in A$ と書く. 集合 A が集合 X の**部分集合**であるとは,「すべての $a \in A$ に対して, $a \in X$」が成り立つことをいう. このとき, $A \subset X$ と書く. 集合 A, B が $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるとき, $A = B$ と書く.

例 2.1 (よく使う集合)**.**
次の集合はどの教科書, 専門書でも標準的に使われる.

[1]このように足し算, 引き算と掛け算がうまく定義できる集合は環と呼ばれる. 正確な定義は代数学の教科書をみよ

[2]このように足し算, 引き算, 掛け算と 0 でない数で割り算が定義できる集合は体と呼ばれる. 正確な定義は代数学の教科書をみよ

- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合
- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集合
- $\emptyset$: 元が一つもない集合 (**空集合**という)

集合はふつう, $\{\cdots\}$ と中かっこを使って書くことが多い. このこともあって, 数式で丸かっこの外に中かっこを使う次の書き方

$$\{4-(5\times 3+3)\div 2\}\times 3$$

のような書き方はせずに

$$\big(4-(5\times 3+3)\div 2\big)\times 3$$

とすべて丸かっこで書くことが多い.

例 **2.2.**
A を自然数で 3 の倍数であるもの全体の集合とすると,

$$\begin{aligned} A &= \{3,6,9,\cdots\} \\ &= \{n : n \text{ は自然数で } 3 \text{ の倍数}\} \\ &= \{n\in\mathbb{N} : n \text{ は } 3 \text{ の倍数}\} \\ &= \{3m : m\in\mathbb{N}\} \end{aligned}$$

などといろいろな書き方をする.

例 **2.3** (開区間, 閉区間)**.**
$a,b\in\mathbb{R}$ に対して, 次の記号を用いる.

(1) $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$: **開区間**という
(2) $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a\le x\le b\}$: **閉区間**という.
(3) $(a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a<x\le b\}$: **半開区間**という.

集合 X の部分集合 $A,B\subset X$ に対して, **和集合** $A\cup B$ と**共通部分** $A\cap B$, **差集合** $A\setminus B$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} A\cup B &:= \{x\in X : x\in A \text{ または } x\in B\} \\ A\cap B &:= \{x\in X : x\in A \text{ かつ } x\in B\} \\ A\setminus B &:= \{x\in X : x\in A \text{ かつ } x\notin B\} \end{aligned}$$

と定める.

2.2. 実数の四則演算と順序

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の性質を復習しよう.

2.2.1. 四則演算. $\mathbb{R}$ には加法 (和) と乗法 (積) が定められている. この二つの演算に関する法則は次のとおりである.
和 (sum) に関する性質

(S1) 和の可換性: $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a + b = b + a$.
(S2) 和の結合法則: $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
(S3) 0 の存在: 数 0 が存在して, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $a + 0 = a$.
(S4) 和の逆元の存在: $a \in \mathbb{R}$ に対して, $a + (-a) = 0$ となる数 $-a$ が存在する.

積 (product) に関する性質

(P1) 積の可換性: $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $ab = ba$.
(P2) 積の結合法則: $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, $(ab)c = a(bc)$.
(P3) 1 の存在: 数 $1 \neq 0$ が存在して, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $1a = a$.
(P4) 積の逆元の存在: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $aa^{-1} = 1$ となる数 a^{-1} が存在する.

和と積に関する性質 (分配法則)

(SP): $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, $(a + b)c = ac + bc$.

0 は一つしかないことに注意しておこう. 実際に, $0, 0'$ がどちらも (S3) の性質をみたすならば, $a = 0'$ として, $0' + 0 = 0'$ となる. 他方, (S1) と $0'$ の性質から $0' + 0 = 0 + 0' = 0$ も得られる. よって, $0 = 0'$ となるから, 0 は一つしかない. このように, 一つしかないことを証明するときには, 同じ性質を持つものが二つあったとして, 実はその二つが等しくなることを示せばよい.

問題 2.1.
次を示せ (移項は使わないで示そう).

(1) 1 は一つしかないことを示せ.
(2) $a \in \mathbb{R}$ に対して, $-a$ は一つしかないことを示せ (ヒント: $a + b = 0$, $a + b' = 0$ となる $b, b' \in \mathbb{R}$ があったとすると, (S3) より $b = b + 0 = b + (b' + a)$ となる. 和と b の性質を使って $b = b'$ を示してみよ)
(3) $a \in \mathbb{R}$ に対して $a0 = 0$ を示せ (ヒント: (P3) より $a(0 + 0) = a0$. これに (SP) を使うとどうなるか？).
(4) $a \in \mathbb{R}$ に対して, $(-1)a = -a$ を示せ (ヒント: $a + (-1)a = 0$ を示せばよい).

(5) $(-1)(-1) = 1$ を示せ (ヒント:$(-1)(1+(-1)) = 0$ を使う).

2.2.2. 順序. $\mathbb{R}$ には不等号の性質があった. まとめておこう.
順序 (order) に関する性質

(O1) 順序の反射律: $a \in \mathbb{R}$ に対して, $a \le a$.
(O2) 順序の反対称律: $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a \le b$, $b \le a$ ならば $a = b$.
(O3) 順序の推移律: $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, $a \le b$, $b \le c$ ならば $a \le c$.
(O4) 順序の全順序性: $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a \le b$ または $b \le a$.

$a, b \in \mathbb{R}$ が $a \le b$ かつ $a \ne b$ となるとき, $a < b$ と書く. とくに $a > 0$ をみたす a を正, $a < 0$ をみたす a を負という. 不等号と和・積の性質をまとめておこう.
順序と和積に関する性質

(OS): $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, $a \le b$ ならば $a + c \le b + c$.
(OP): $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, $a \le b$, $c \ge 0$ ならば $ac \le bc$.

$a \le 0$ ならば $-a \ge 0$ が示せる. 実際に, $a \le 0$ ならば, (OS) より $a + (-a) \le 0 + (-a)$ となる. (S3) と (S4) より $0 \le -a$ が得られる.

問題 **2.2.**
$a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, $a \le b$, $c \le 0$ ならば $ac \ge bc$ を示せ (ヒント: $-c \ge 0$ に (OP) を使い, そのあとに (OS) を 2 回使う).

2.2.3. 絶対値. $\mathbb{R}$ には絶対値の概念があった. 復習しておこう.

定義 **2.4** (絶対値)**.**
$a \in \mathbb{R}$ に対して

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

とおく. $|a|$ を a の絶対値という.

$a \ge 0$ のとき, $|a| = a$, $a \le 0$ のときに $|a| = -a$ となることに注意しておこう. よって, $a = 0$ のときは, $|a| = -a = a$ となっている.

問題 **2.3.**
$a \in \mathbb{R}$ に対して次を示せ.

(1) $|a| \ge 0$

(2) $|-a| = |a|$
(3) $|a|^2 = a^2$
(4) $|a| = 0$ であることと $a = 0$ であることは同値
(5) $-|a| \leq a \leq |a|$

次の三角不等式は基本的な不等式であり, これから何度も使う.

定理 2.5 (三角不等式)**.**
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leq |a-b|.$$

証明.
1. $|a+b| \leq |a| + |b|$ を場合わけで示す. $a + b \geq 0$ ならば, $a \leq |a|$, $b \leq |b|$ より

$$|a+b| = a + b \leq |a| + |b|$$

がわかる. $a + b < 0$ ならば, $-a \leq |a|$, $-b \leq |b|$ より分配法則を用いて

$$|a+b| = -(a+b) = -a - b \leq |a| + |b|$$

がわかる.
2. $||a| - |b|| \leq |a-b|$ を示す. **1.** の結果より

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|, \quad |b| = |(b-a) + a| \leq |b-a| + |b|$$

だから, $|a| - |b|, |b| - |a| \leq |a-b|$ となる. よって $||a| - |b|| \leq |a-b|$ となる. □

2.3. 実数の性質と上限. 下限

実数の性質として四則演算と順序の性質を紹介したが, これは有理数であっても同様の性質を持っている. つまり, これでは有理数と実数の違いを理解することはできない. そこで, 実数と有理数にはどのような違いがあるのか？ について, さらに考察をつづけよう.

開区間 $(0, 1)$ に最大値は存在しないが, 1 は最大値に似ている. 他にも, 有理数の集合 $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ を考えたときに, この集合に最大値はない (等号はついているが, $x^2 = 2$ となる x は有理数ではない). しかし, $\sqrt{2}$ は最大値に似ている. この「似ている」をどうやって数学の言葉で表すかを考えよう.

2.3.1. 論理記号の基礎. 集合 A に対し, $\forall a \in A$ は「すべての $a \in A$ に対して」や「任意の $a \in A$ に対して」の意味を持つ. $\exists a \in A$ は「ある $a \in A$ が存在して」の意味を持つ. $\forall$ は「for all」や「for any」の A をひっくりかえしたもの, $\exists$ は「exists」の E をひっくり返したものである.

このノートでは, $\forall$ や $\exists$ は文字 a と同じ大きさ, 同じ高さであるが, 板書や手書きでは, もう少し小さめに上にあげた形である, ${}^{\forall}a \in A$ や ${}^{\exists}a \in A$ と書くことが多い.

定義 2.6 (有界)**.**

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A が**上に有界**であるとは「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $a \leq M$ が成り立つ」ことをいう. このときの M を A の**上界**という.

A が**下に有界**であるとは「ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $a \geq m$ が成り立つ」ことをいう. このときの m を A の**下界**という.

A が**有界**であるとは, 「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $|a| \leq M$ が成り立つ」ことをいう.

A が上に有界であるということを論理記号で書くと

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall a \in A \text{ に対して } a \leq M$$

となる. ここの「s.t.」は「such that」の略で, $\exists$ のあとにはこれを常につけると考えておいてもよい. 他方, 「に対して」は省略して書いてもよい. 同様に A が下に有界であるということを論理記号で書くと

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall a \in A \text{ に対して } a \geq M$$

となり, A が有界であるということを論理記号で書くと

$$\exists M > 0 \text{ s.t. } \forall a \in A \text{ に対して } |a| \leq M \tag{2.1}$$

となる. このときに, $\exists M > 0$ と $\forall a \in A$ の順番を変えた

$$\forall a \in A \text{ に対して } \exists M > 0 \text{ s.t. } |a| \leq M \tag{2.2}$$

は (2.1) と意味が異なることに注意すること. 論理記号を使うときには, 書く順番に注意を払わないといけない.

例 **2.7.**

$A := (0, 1)$ は有界である.

証明**.**

$M := 2 > 0$ とおく. すると, すべての $a \in A = (0, 1)$ に対して $|a| \leq 1 \leq M$ が成り立つ. □

上の証明で, M を決めるときに, a を使ってはいけないということに注意すること. M は a を決めるよりも先に決めなければならない.

例 2.8.
$B := (0, \infty)$ は上に有界ではない.

証明.
示せばいいことは,「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $b \in B = (0, \infty)$ に対して, $b \leq M$」の否定, すなわち,「すべての $M \in \mathbb{R}$ に対して, ある $b \in B = (0, \infty)$ が存在して, $a > M$」である. そこで, 任意に $M \in \mathbb{R}$ に対して,

$$b := \begin{cases} M + 1 & M \geq 0 \\ 1 & M < 0 \end{cases}$$

とおくと, $b \in B = (0, \infty)$ となる. $M \geq 0$ のときは, $b = M + 1 > M$ であり, $M < 0$ のときは, $M < 1 = b$ だから, どちらの場合でも, $b > M$ となることがわかる. □

$M < 0$ のときに $b = 1$ としたが, $b \in (0, \infty)$ かつ, $b > M$ をみたしていればなんでもよい. b の決め方で重要な点は, $b \in B$, つまり $b > 0$ であることと, $b > M$ となることが両方成り立つということである. b を決めるには, M を決めてからでよいということにも注意をしておこう.

例 2.9.
$C := (-\infty, 3)$ は下に有界ではない.

証明.
示せばいいことは,「ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $c \in C = (-\infty, 3)$ に対して, $c \geq m$」の否定, すなわち,「すべての $m \in \mathbb{R}$ に対して, ある $c \in C = (-\infty, 3)$ が存在して, $c < m$」である. そこで, 任意に $m \in \mathbb{R}$ に対して,

$$c := \begin{cases} m - 1 & m \leq 0 \\ -1 & m > 0 \end{cases}$$

とおくと, $c \in B = (0, \infty)$ となる. $c \leq 0$ のときは, $c = m - 1 < m$ であり, $m > 0$ のときは, $c = -1 < m$ だから, どちらの場合でも, $c < m$ となることがわかる. □

集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, 上界や下界の定義にでてくる M や m は, 集合 A の元が M より大きくなることがない, m より小さくなることがないということであり, 集合 A の性質が現れている. そこで, この M や m をあつめた集合を考える.

定義 2.10.

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の**上界の集合** A_u と**下界の集合** A_l を

$$A_u := \{M \in \mathbb{R} : すべての\ a \in A\ に対して\ a \leq M\}$$

$$A_l := \{m \in \mathbb{R} : すべての\ a \in A\ に対して\ a \geq m\}$$

と定める.

注意 2.11.

定義 2.10 の記号は一般的ではないので, 使うときは上界の集合, 下界の集合と明記する必要がある.

例 2.12.

$A := [0,1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ とするとき, A の上界の集合 A_u と下界の集合 A_l は

$$A_u = \{M \in \mathbb{R} : すべての\ a \in [0,1)\ に対して\ a \leq M\} = [1,\infty),$$

$$A_l = \{m \in \mathbb{R} : すべての\ a \in [0,1)\ に対して\ a \geq m\} = (-\infty,0]$$

となる.

例 2.12 をみればわかるように, 集合 $A \subset \mathbb{R}$ の上界の集合 A_u は, A の元よりつねに大きい実数をあつめた集合である. つまり, 集合 A の元より大きい実数を集合 A の外から考えているといってよい.

定義 2.13 (最大, 最小)**.**

$A \subset \mathbb{R}$ に対して A の元で一番大きな数と一番小さな数をそれぞれ A の**最大値**, **最小値**といい, $\max A$, $\min A$ と書く.

集合 $A \subset \mathbb{R}$ の最大値 $M = \max A$, 最小値 $m = \min A$ を論理記号で書くと, それぞれ

1. $\forall a \in A$ に対して, $a \leq M$
2. $M \in A$.

と

1. $\forall a \in A$ に対して, $a \geq m$
2. $m \in A$.

となる.

例 2.14.

$A := [0,1)$ に対して, $\max A$ は存在しない. $\min A = 0$ となる.

証明.

1. $\min A = 0$ となることを示す. 定義に戻って証明すべきことを確認しよう. 論理記号を用いた書き方をすれば

示すこと

1. $\forall a \in A$ に対して, $a \geq 0$.

2. $0 \in A$.

が証明すべきことである.

$0 \in A = [0,1)$ であり, すべての $a \in A$ に対して, $0 \leq a < 1$ だから, $a \geq 0$ が成り立つ. つまり, $\min A = 0$ となる.

2. $\max A$ がないことを示すために背理法で, $M = \max A$ が存在したとしよう. すると, $M \in A = [0,1)$ だから, $0 \leq M < 1$ となる. そこで, $a := \dfrac{M+1}{2}$ とおくと, $0 \leq \dfrac{M}{2} < \dfrac{1}{2}$ だから, $0 \leq a < 1$ となることがわかる. つまり, $a \in A$ である. しかし, $M < 1$ だったから, $a > \dfrac{M+M}{2} = M$ となり, M が A の元で一番大きい数であったことに反する. □

上の証明の最大値が存在しないことの証明で, a の定義は, M と 1 の中点をとったということに注意しておこう. 高校までの数学で, 「$0 \leq a < 1$ となっているときに, a は最大値を持たない」ということを学んだと思うが, 証明をしっかりと書こうとすると, 上記のようになる.

A で最大値や最小値を考えるときには, あくまで集合 A の元のみしか考えない. つまり, 集合 A の外側を考えてはいないということである. それでは, A の外側から, 最大値や最小値に似たものを考えることはできないだろうか？ それが, 次に述べる上限や下限というものである.

定義 2.15 (上限, 下限)**.**

集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の**上限** $\sup A$, **下限** $\inf A$ を, A の上界の集合 A_u, 下界の集合 A_l に対して

$$\sup A := \min A_u = \min\{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$

$$\inf A := \max A_l = \max\{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

により定義する.

集合 $A \subset \mathbb{R}$ の上限 $\sup A$ は A **の元より大きい実数で一番小さいもの**である. つまり, 最大値とは違い, A の元より大きくなる A の外側 A_u を考えておいて, その外側 A_u で一番小さいものを考えようということである. 感覚的に考えれ

ば, 上限と最大値は同じようなものに見えるが, 実はそうではない. このことはあとで述べる.

集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, $\alpha = \sup A$ を論理記号で書くと,

1. $\forall a \in A$ に対して, $a \leq \alpha$

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists a \in A$ s.t. $\alpha - \varepsilon < a$.

となる. **1.** が主張していることは, α は A の上界となっているということであり, **2.** が主張していることは, $\alpha - \varepsilon$ はもう A の上界にはなっていないということ, つまり, $\alpha - \varepsilon$ よりも大きくなる $a \in A$ が存在するということである. **2.** の $-\varepsilon$ は α より少し小さい数という意味である. なお, ε は微分積分学では小さい**正の数**という意味で使うことが多い. 同様にして, 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, $\beta = \inf A$ を論理記号で書くと,

1. $\forall a \in A$ に対して, $a \geq \beta$,

2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists a \in A$ s.t. $\beta + \varepsilon > a$.

となる.

さて, このセクションの最初で述べた, 実数と有理数の違いを上限を用いて述べよう.

連続性の公理

上に有界な空でない実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は, 実数の上限 $\sup A$ が存在する.

注意 2.16.

実数の連続性の公理における「実数」を「有理数」に取りかえると成立しない. つまり, 連続性の公理は実数と有理数の違いを表している. 例えば $A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ を考えてみよう. これは, 実数を知っているならば, $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ であることから, $\sup A = \sqrt{2}$ となることが示せる. しかし, $\sqrt{2}$ は有理数ではない. 従って, 「上に有界な空でない有理数の部分集合 $A \subset \mathbb{Q}$ は, 有理数の上限 $\sup A$ が存在する」は成り立たないのである.

実数の連続性を用いると, 次の Archimedes の原理が示せる. 証明は次の節にまわす.

定理 2.17 (Archimedes の原理)**.**

すべての $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varepsilon N_\varepsilon > 1$ が成り立つ.

さて, 実際に集合 A が与えられたときに, その上限とその証明をどのように書けばよいか具体例を通して考えよう.

例 2.18.

$A := [0, 1)$ に対して, $\sup A = 1$ となる.

証明.

定義に戻って証明すべきことを確認しよう. 論理記号を用いた書き方をすれば

示すこと

1. $\forall a \in A$ に対して, $a \leq 1$.
2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists a \in A$ s.t. $1 - \varepsilon < a$.

が証明すべきことである.

1. 任意の $a \in A$ に対して, $a \leq 1$ を示す. 任意の $a \in A$ に対して, $0 \leq a < 1 \leq 1$ となるから, とくに $a \leq 1$ が成り立つ.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $a \in A$ が存在して $1 - \varepsilon < a$ を示す. つまり, 先に $\varepsilon > 0$ を先に与えて, $1 - \varepsilon < a$ となるような $a \in A$ を探そう.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $a := \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ とおくと, $\frac{1}{2} \leq a$ かつ, $\frac{1}{2} < 1$, $1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$ だから, $\frac{1}{2} \leq a < 1$ となる, 従って, $a \in A$ となる. また,

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq a$$

となるので, $1 - \varepsilon < a$ が成り立つ. □

注意 2.19.

存在をしめすことは「成り立つものを見つける」と同じことである. 例 2.18 の証明では, $1 - \varepsilon < a$ となる $a \in A$ をみつければよい. $a \in A$ より $0 \leq a < 1$ をみたして, $1 - \varepsilon < a$ となるものをみつければよい.

注意 2.20.

例 2.18 の証明の **2.** で, $a := 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ とすると $\varepsilon > 0$ が大きいときに $1 - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ となってしまうことがある. すると, $a \notin A$ となってしまうので, これを防ぐために, $a := \max\left\{1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ としてある.

2.4. Dedekind の切断と実数の構成

前の節で, 実数の連続性を公理としたが, 四則演算, 順序, 実数の連続性をみたす集合を有理数から作ることはできるのだろうか? そもそも, そんな集合が作れないとしたならば, 実数というのは虚構の世界になってしまう. しかし, 実

際はそうではなく, 有理数から実数を構成することができる. 以下, Dedekind の切断を用いた実数の構成方法を紹介する.

Dedekind は実数を考えるために, 有理数の数直線を切ったらどうなるか？を考えた. 有理数の数直線は $\sqrt{2}$ や円周率 π, 自然対数 e が抜けているために, 穴がたくさんあいているはずで, 切ったときに, 直線にぶつかるところとぶつからないところがでてくるはずである. そこで, ぶつかった場所は有理数, ぶつからなかった場所は無理数としようとした. このことを集合論の言葉を用いて説明しよう. 有理数直線を切るということは, 二つの半直線 A, B にわかれて, 「A と B をあわせれば有理数直線になる」, 「A と B はかさなりがない」, 「A よりも B の方が右側 (大きい側) にある」ということが必要であろう. さらに, 最大値の条件を加えた, 次の定義により, Dedekind は有理数の切断を定義した.

定義 2.21 (有理数の切断)**.**
$\mathbb{Q}$ の部分集合 A, B が**有理数の切断**であるとは, 次の 4 条件をみたすことをいう.

1. $A \cup B = \mathbb{Q}$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. すべての $a \in A$, $b \in B$ に対して $a < b$.
4. A に最大値はない. すなわち, すべての $a \in A$ に対して, $a' \in A$ が存在して, $a < a'$ が成り立つ.

このとき, $\langle A, B \rangle$ と書くことにする.

有理数の切断で, 切ったときに有理数にぶつかるということを, B に最小値が存在するということで表現した. 例をあげる.

例 2.22.
$A_1 := \{a \in \mathbb{Q} : a < \frac{1}{2}\}$, $B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b \geq \frac{1}{2}\}$ とすると, $\langle A_1, B_1 \rangle$ は有理数の切断になる. このとき, B_1 に最小値 $\frac{1}{2}$ がある.

有理数の切断で, 切ったときに有理数にぶつからない, つまり切ったところが無理数であったということを, B に最小値がないということで表現した.

例 2.23.
$A_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a < 0$ または $a^2 < 2\}$, $B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b > 0$ かつ $b^2 \geq 2\}$ とすると, $\langle A_2, B_2 \rangle$ は有理数の切断になる. このとき, B_1 に最小値はない.

もういちどまとめると, $\langle A, B \rangle$ を有理数の切断としたとき, 「B に最小値があるとき, それは有理数直線を切ったときにぶつかっていて, 有理数を意味する」と考え, 「B に最小値がないとき, それは有理数直線を切ったときにぶつからな

いということで, 無理数を意味する」と考えた. このことを用いて, Dedekind は実数を定義した.

定義 2.24 (実数)**.**
有理数の切断を実数という. 実数全体のなる集合を $\mathbb{R}$ で表す.

次に有理数の切断を用いて, 実数の四則演算や絶対値を定義しなければいけない. これについての詳細は, 例えば **[8]** を参照せよ.

実数の順序関係は, 二つの実数 $x = \langle A, B\rangle$, $y = \langle A', B'\rangle$ を考えたときに, $x \leq y$ であるならば, 半直線 A と A' の関係は A' の方が長いはずである. このことをふまえて次の定義を与える.

定義 2.25 (順序関係)**.**
$x, y \in \mathbb{R}$ に対して, 有理数の切断を用いて $x = \langle A, B\rangle$, $y = \langle A', B'\rangle$ と書く.
$x = y$ であるとは, $A = A'$ が成り立つことをいう.
$x \leq y$ であるとは, $A \subset A'$ が成り立つことをいう.
$x < y$ であるとは, 「$x \leq y$ かつ $x \neq y$」が成り立つことをいう.

有理数は実数のなかでどのくらいたくさんあるのだろうか？ このことの答えが次の定理である.

定理 2.26 (有理数の稠密性)**.**
すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x < y$ ならば, ある $q \in \mathbb{Q}$ が存在して, $x < q < y$ とできる.

証明はあとにして, 何を主張しているのかを具体例でみてみよう.

例 2.27.
$x := \sqrt{2}$, $y := \sqrt{3}$ とするとき, $q := 1.6 \in \mathbb{Q}$ とすれば, $x < q < y$ とできる. 定理 2.26 は, この場合では, y が $\sqrt{2}$ より少しでも大きければ, いつでも $q \in \mathbb{Q}$ をみつけて $x < q < y$ とすることができることを主張している.

さて, 定理 2.26 を証明するためには, 実数とは何か？ 実数とは Dedekind の切断だということを使わなければならない. 少し難しいが証明を与えよう.

定理 2.26 の証明.
1. $x, y \in \mathbb{R}$ が $x < y$ をみたすとし, x, y は有理数ではないとする. 有理数の切断を用いて, $x = \langle A, B\rangle$, $y = \langle A', B'\rangle$ と書くと, $A \subset A'$ かつ $A \neq A'$ が成り立つ. 従って

$$A' \setminus A := \{a \in \mathbb{Q} : a \in A' \text{かつ } a \notin A\}$$

は空集合ではないから, $q \in A' \setminus A$ を一つ選ぶことができる. このとき, $x < q < y$ が成り立つことを示せばよい. q に対する有理数の切断を $\langle A'', B'' \rangle$ と書くと

$$A'' := \{a \in \mathbb{Q} : a < q\}, \qquad B'' := \{b \in \mathbb{Q} : q \leq b\}$$

となる.

2. $x < q$ を示す. すべての $a \in A$ に対して, $a \in A''$ を示せばよい. このとき, $q \notin A$ だったから, $q \in B$ であり, 有理数の切断の定義から, $a < q$ が成り立つ. 従って $a \in A''$ となる.

3. $q < y$ を背理法で示す. $q \geq y$ を仮定すると, $q \neq y$ より, $q > y$ だから, $A' \subset A''$ が成り立つ. $q \in A'$ より $q \in A''$ となり, A'' の定義から $q < q$ となることから矛盾が生じる.

4. x, y がともに有理数のときは, $q = \frac{x+y}{2}$ とすればよい. x が有理数で y が無理数のとき, $\frac{x+y}{2}$ は無理数となるので, $\frac{x+y}{2} < q < y$ となる $q \in \mathbb{Q}$ を選べば, $x < q < y$ となる. x が無理数で y が有理数のときも同様に議論すればよい. □

さて, 実数と有理数の違いは, 実数の連続性にあるということが前の節で説明したことであった. 有理数の切断によって, 実数を定義したことにより, 実数の連続性は証明できる事柄になる. つまり,

定理 2.28 (実数の連続性)**.**
上に有界な空でない実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は, 実数の上限 $\sup A$ が存在する.

定理 2.28 の証明.
$A \subset \mathbb{R}$ を上に有界な集合とし, A_u を A の上界の集合とする. $C := \mathbb{Q} \setminus A_u$, $D := \mathbb{Q} \cap A_u$ として, 有理数の切断 $\alpha := \langle C, D \rangle$ を考える. 以下, $\alpha = \min A_u$, すなわち $\alpha = \sup A$ となることを示す.

1. すべての $a \in A$ に対して, $a \leq \alpha$ を示す. そのために, 有理数の切断 $a = \langle A', B' \rangle$ を考える. $A' \subset C$ を示すために, 背理法を用いて, $q \in A'$ が存在して, $q \notin C$ と仮定する. すると, $q \in D$ より, $q \in A_u$ となり, $a \leq q$ がわかる. 他方, $a = \langle A', B' \rangle$ だから $q < a$ となり矛盾となるから, $A' \subset C$ がわかる. とくに, $\alpha \in A_u$ がわかった.

2. $\alpha = \min A_u$ を示す. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\alpha - \varepsilon \notin A_u$ を示す. $\alpha - \varepsilon < \alpha$ より, 有理数の稠密性から, $q \in \mathbb{Q}$ が存在して, $\alpha - \varepsilon < q < \alpha$ とできる. 従って, $q < \alpha$ から $q \in C$ となり $q \notin A_u$ だから $\alpha - \varepsilon \notin A_u$ もわかる.

1., 2. より $\sup A$ が存在して, $\alpha = \sup A$ となることがわかる. □

実数の連続性を用いると, 次の Archimedes の原理が示せる.

定理 2.29 (Archimedes の原理)**.**
すべての $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varepsilon N_\varepsilon > 1$ が成り立つ.

定理 2.29 の証明.
背理法を用いて「ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\varepsilon_0 n \leq 1$」を仮定する. すると, $A := \{\varepsilon_0 n : n \in \mathbb{N}\}$ は上に有界となるから, 定理 1.3(実数の連続性) により, $\alpha := \sup A$ が存在する. 従って, $\alpha - \varepsilon_0$ は上界ではないから, 「ある $\alpha_\varepsilon \in A$ が存在して, $\alpha - \varepsilon < \alpha_\varepsilon$」 とできる. よって, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して $\alpha_\varepsilon = \varepsilon_0 n_\varepsilon$ とできるが,

$$\alpha - \varepsilon_0 < \alpha_\varepsilon = \varepsilon_0 n_\varepsilon \tag{2.3}$$

だから

$$\alpha < \varepsilon_0(n_\varepsilon + 1) \tag{2.4}$$

となる. $n_\varepsilon + 1 \in \mathbb{N}$ より $\varepsilon_0(n_\varepsilon + 1) \in A$ となり, (2.4) から $\alpha = \sup A$ となることに矛盾していることがわかる. □

定理 2.28 の証明で Dedekind の有理数の切断を使わずに証明することは (この論理の順番では) できないということに注意しておこう. 実数の連続性は有理数と実数の違いを表す主張であるから, 実数とは何か? に踏み込まなければ証明することができない. このノートにおいて, 実数とは Dedekind の有理数の切断であると定義したので, 証明に有理数の切断が必要となったのである.

2.5. 数列の収束・発散

自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 実数 a_n が定められているとき, これを**数列**といい,

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty},$$

などと書く. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を順番のついた実数の部分集合とみたてて, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ とも書く. $n \in \mathbb{N}$ に対して, a_n を**一般項**, a_1 を**初項**というのであった.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束するとは「$|a_n - a|$ が n を大きくすると 0 に近づくこと」であった. しかし, この定義は誰がみても同じ結果になるとは限らない. 実際に, **n を大きく**の大きいとは, どのような大きさであろうか? **0 に近づく**の近づくは, どのくらい近づけばいいのだろうか? つまり, 「n を大きくすると 0 に近づくこと」は客観的な定義ではなく, 人によって考え方が異なってしまうかもしれない定義である. それでは, 人によって考え方がかわら

ないような決め方はどのようにすればよいであろうか？ その答えが次にあげる ε-N 論法による定義である.

定義 2.30 (数列の極限 (ε-N 論法)).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に**収束する**とは「任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_\varepsilon$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon]$」ことをいう. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束するとき, $\lim_{n\to\infty} a_n := a$ とか $a_n \to a \quad (n \to \infty)$ と書く.

$a_n \to a \quad (n \to \infty)$ を論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

となる. 定義 2.30 において「$|a_n - a|$ が 0 に近づく」というのは, **先に** $\varepsilon > 0$ を任意に与えるところにある. この任意の $\varepsilon > 0$ はとても小さな正の数を想定している. 「n を大きくする」というのは, $\varepsilon > 0$ **よりあとに選ぶ** $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ より先のすべての $n \in \mathbb{N}$ というところにある. この N_ε は ε に対応して決めればよい, とても大きな自然数である.

とはいえ, この定義をただ眺めてみてもこれはわかりにくいであろう. 例を眺めて, 感覚をつかんでほしい.

例 **2.31.**

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ.

まずは定義を確認しよう. 示すべきことは

示すこと

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

である. 目標となるのは, この示すことが成り立つような $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつけることである. $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ は $\varepsilon > 0$ よりあとにあるが, $n \in \mathbb{N}$ より前に書いてある. だから N_ε は ε **を使ってもよいが,** n **を使ってはいけない**ということに注意する.

証明**.**

1. 定義の $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつけるために, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をあとで決める. すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ を仮定すると

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon}$$

となる. だから, $\dfrac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を選べば,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

が成り立つ. $\dfrac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ を N_ε について解くと $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となる. この考察をもとにして証明を書く.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ をみたすようにとる (Archimedes の原理[3]). すると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n} - 0\right| &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \qquad (\because n \geq N_\varepsilon) \\ &< \frac{1}{1/\varepsilon} \qquad (\because N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}) \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち, $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ となるので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ. □

もう少し計算が必要となる例を取り上げてみよう.

例 **2.32.**
$\dfrac{2n}{n+1} \to 2 \quad (n \to \infty)$ が成り立つ.

例 2.31 と同じように, 示すべきことをまずは確認しよう. 示すべきことは

示すこと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$$

である. そこで, 例 2.31 と同じように, この示すことが成り立つような $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ の条件を調べてみよう.

証明.

[3] Gauss 記号を使うなら, $N_\varepsilon := [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ ととればよい.

1. 定義の $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつけるために, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をあとで決める. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ を仮定すると

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N_\varepsilon + 1}$$

となる. だから, $\dfrac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を選べば,

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| \leq \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N_\varepsilon + 1} < \varepsilon$$

が成り立つ. $\dfrac{2}{N_\varepsilon + 1} < \varepsilon$ を N_ε について解くと $N_\varepsilon > \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$ となる. この考察をもとにして証明を書く.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $N_\varepsilon > \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$ をみたすようにとる (Archimedes の原理[4]). すると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| &= \left|\frac{-2}{n+1}\right| \\
&= \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{2}{N_\varepsilon + 1} \qquad (\because n \geq N_\varepsilon) \\
&< \frac{2}{(2/\varepsilon - 1) + 1} \qquad \left(\because N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon} - 1\right) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

すなわち, $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ となるので, $\dfrac{2n}{n+1} \to 2 \ (n \to \infty)$ が成り立つ. □

注意 2.33.

例 2.31, 例 2.32 の証明で, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつける計算 (証明中の **1.**) については, 実は証明では書かなくてもよい. しかし, 微分積分学や解析学における「評価する, 成り立つものはどのような性質を持つかを調べる」という観点では非常に重要な部分である.

例 2.31, 2.32 に現れる証明論法を ε-N **論法**という. ε-N 論法を用いないと証明が難しい事実として, 次の例を取り上げよう.

---

[4] もしくは, $N_\varepsilon := \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] \in \mathbb{N}$ とおく. このとき, $\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] \leq \dfrac{2}{\varepsilon} < \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1 = N_\varepsilon$ が成り立つ.

例 2.34.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ が成り立つ.

例 2.34 の意味はわかりづらいかもしれないので, 例をあげておこう. $r>0$, $n\in\mathbb{N}$ に対して, $a_n:=r^n$ により数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めると,

$$a_n \to \begin{cases} 0 & (r<1) \\ 1 & (r=1) \\ \infty & (r>1) \end{cases} \quad (n\to\infty)$$

であった. 他方で,

$$\begin{aligned}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} &= \begin{cases} \dfrac{r(1-r^{n+1})}{n(1-r)} & (r\neq 1) \\ \dfrac{1+1+\cdots+1(n\text{ 個の 1 の和})}{n} & (r=1) \end{cases} \\ &\to \begin{cases} 0 & (r<1) \\ 1 & (r=1) \\ \infty & (r>1) \end{cases} \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

となり, 例 2.34 の主張が正しいことがわかる[5]. 例 2.34 は $a_1+a_2+\cdots+a_n$ が書き下せなかったとしても, $n\to\infty$ としたときに $\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ がどこに収束するかがわかる主張である. 例えば, $a_n=\dfrac{1}{n}$ とすると, $a_1+a_2+\cdots+a_n$ は求められないうえに, 無限級数 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ は発散する. それでも, $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ だから, $\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)$ がわかる. このように, 一般項は陽に書き下すことができないが, 極限は求められるということがある.

例 2.34 の証明.

1. 定義の $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ をみつけるために, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ をあとで決める. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ より, $N_1\in\mathbb{N}$ が存在して, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n\geq N_1 \Longrightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

[5]実は $a=\infty$ の場合も成り立つ

とできる. そこで, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $N_\varepsilon \geq N_1$ かつ $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &= \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \\ &\leq \frac{1}{n}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1 - 1} - a|) \\ &\quad + \frac{1}{n}(|a_{N_1} - a| + \cdots + |a_n - a|) \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1 - 1} - a|) \\ &\quad + \frac{1}{n}(\varepsilon(n - N_1 + 1)) \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1 - 1} - a|) + \varepsilon\end{aligned}$$

となる. よって, $\frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1 - 1} - a|) < \varepsilon$ となるように $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を選べば

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &\leq \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1 - 1} - a|) + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

となる. この評価をもとにして, 厳密な証明を書く.

2. $\varepsilon > 0$ に対して, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ より, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5}$$

とできる. 次に, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $N_\varepsilon \geq N_1$ かつ

$$\frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1 - 1} - a|) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6}$$

となるようにとる (厳密には Archimedes の原理). このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &= \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) \\
&\quad + \frac{1}{n}(|a_{N_1} - a| + \cdots + |a_n - a|) \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) \\
&\quad + \frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}(n - N_1 + 1)\right) \quad (\because n \geq N_1 \text{と } (2.5)) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\because n \geq N_\varepsilon \text{と } (2.6)) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

となる. 従って, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ が成り立つ. □

収束しない数列は発散するという. $\{(-1)^n\}$ のような数列も発散するというのは直感に反しているようにも感じるが, この数列も発散する数列である. 発散という表現は, 無限大に発散する感覚であろう. このことを ε-N 論法で記述しよう.

定義 2.35 (数列の発散)**.**
収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は**発散する**という.
収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が**(正の)無限大に発散する**とは「任意の正の数 $M > 0$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して [$n \geq N_0$ ならば $a_n > M$]」ことをいう. このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とか $a_n \to \infty \quad (n \to \infty)$ と書く.
収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が**負の無限大に発散する**とは「任意の正の数 $M > 0$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して [$n \geq N_0$ ならば $a_n < -M$]」ことをいう. このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とか $a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$ と書く.

$a_n \to \infty \quad (n \to \infty)$ を論理記号で書くと

$$\forall M > 0 \text{ に対して } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_0 \Longrightarrow a_n > M$$

となる. $a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$ を論理記号で書くと

$$\forall M > 0 \text{ に対して } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_0 \Longrightarrow a_n < -M$$

となる.

例 **2.36.**

$\lim_{n\to\infty} n = \infty$ を示そう. 任意の $M > 0$ に対して, $N_0 \in \mathbb{N}$ を $N_0 > M$ をみたすようにとる (Archimedes の原理). すると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_0$ ならば $n \geq N_0 > M$, すなわち, $n > M$ が成り立つので, $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ となる.

2.6. 極限の性質

高校で学んだ数列の性質が, ε-N 論法を用いて証明できることを見てみよう.

定理 **2.37.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 次が成り立つ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 収束先はただ一つしかない. つまり, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ ならば, $a = b$ が成り立つ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 有界である. つまり, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ.

(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ が成り立ち, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ a, b に収束するならば, $a \leq b$ が成り立つ.

証明**.**

(1) 背理法で示す. $a > b$ と仮定する. $\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b)$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ よりある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$
$$n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$

が成り立つ. $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $N_0 \geq N_1$ より $|a_{N_0} - a| < \frac{1}{2}(a-b)$ だから $a_{N_0} - a > -\frac{1}{2}(a-b)$ となるので

$$a_{N_0} > \frac{1}{2}(a+b) \tag{2.7}$$

が成り立つ. 他方, $N_0 \geq N_2$ より $|a_{N_0} - b| < \frac{1}{2}(a-b)$ だから $a_{N_0} - b < \frac{1}{2}(a-b)$ となるので,

$$a_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b) \tag{2.8}$$

が成り立つ. 従って, (2.7), (2.8) より

$$\frac{1}{2}(a+b) < a_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b)$$

となり矛盾する. $a < b$ の場合も同様にできるので, 各自確かめよ.

(2) $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく. $\varepsilon := 1 > 0$ ととる. すると, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ が成り立つ. 三角不等式を用いると, $n \geq N_1$ ならば

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \tag{2.9}$$

が成り立つ. そこで, $M := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N_1-1}|, 1 + |a|\}$ とおく. すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $1 \leq n < N_1$ のときは $|a_n| \leq M$, $n \geq N_1$ のときは (2.9) より $|a_n| \leq 1 + |a| \leq M$ となるので, $|a_n| \leq M$ が成り立つ.

(3) 背理法で示す. $a > b$ と仮定する. $\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b)$ とおく. $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より, $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$

が成り立つ. そこで, $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $N_0 \geq N_1$ より $|a_{N_0} - a| < \frac{1}{2}(a-b)$ が成り立つから, $a_{N_0} - a > -\frac{1}{2}(a-b)$ より

$$a_{N_0} > \frac{1}{2}(a+b) \tag{2.10}$$

が得られる. 他方, $N_0 \geq N_2$ より $|b_{N_0} - b| < \frac{1}{2}(a-b)$ が成り立つから, $b_{N_0} - b < \frac{1}{2}(a-b)$ より

$$b_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b) \tag{2.11}$$

が得られる. よって, (2.10) と (2.11) より

$$b_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b) < a_{N_0}$$

となり,「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n \leq b_n$」に矛盾する. □

注意 2.38.
定理 2.37 の (3) の不等号 $\leq$ を $<$ にかえることはできない. たとえば, $a_n := \dfrac{1}{n}$, $b_n := -\dfrac{1}{n}$ を考えてみよ. $a_n < b_n$ となるが, $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ は成り立たない.

定理 2.37 ででてきた, 数列の有界性について, 定義としてまとめておこう.

定義 2.39.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**上に有界**であるとは, ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n \leq K$ が成り立つことをいう. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**下に有界**であるとは, ある $L \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n \geq L$ が成り立つことをいう. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**有界**であるとは, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $|a_n| \leq M$ が成り立つことをいう.

極限が足し算や引き算, 掛け算, 割り算を保存することは高校でよく使っていた. この事実を ε-N 論法を用いて証明しよう.

定理 2.40 (極限の和差積商)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとき, 次が成り立つ.
(1) $a_n + b_n \to a + b\ (n \to \infty)$.
(2) $a_n - b_n \to a - b\ (n \to \infty)$.
(3) $a_n b_n \to ab\ (n \to \infty)$.
(4) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ ならば $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}\ (n \to \infty)$.

証明.
(1) **1.** 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a_n \to a$, $b_n \to b\ (n \to \infty)$ となることから, 任意の $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在してすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon_1$, $n \geq N_2$ ならば $|b_n - b| < \varepsilon_2$ とできる. **$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は任意に選べるからあとで選ぶ**ことにして, $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq N_0$ を仮定す

ると

$$
\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2)
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

となるから, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ であれば $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ が得られる. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ を仮定して, ε_1 について解くと $\varepsilon_1 \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる. この推論をもとに証明を書く.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $n \geq N_2$ ならば $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ とできる. $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ ととると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば

$$
\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

すなわち, $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ となる.

(2) (1) の証明を真似して証明してみよ. 三角不等式の使い方に注意すること.

(3) **1.** 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ となることから, 任意の $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在してすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon_1$, $n \geq N_2$ ならば $|b_n - b| < \varepsilon_2$ とできる. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は任意に選べるからあとで選ぶことにして, $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq N_0$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b| \qquad (\because n \geq N_0 \geq N_1,\ n \geq N_0 \geq N_2)
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

となる. $\varepsilon_2|a_n| + \varepsilon_1|b| < \varepsilon$ としたいが, まだ n が残っているので, n を用いずに $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を決めるために次のことを行う.

定理 2.37(2) よりある $M>0$ が存在してすべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $|a_n|\le M$ が成り立つ. 従って,

$$
\begin{aligned}
|a_nb_n-ab| &\le \varepsilon_2|a_n|+\varepsilon_1|b| \\
&\le \varepsilon_2 M+\varepsilon_1(|b|+1) \qquad (2.14)\\
&\le \varepsilon_1(M+|b|+1) \quad (\varepsilon_1=\varepsilon_2\text{を仮定})
\end{aligned}
$$

とできるので, $\varepsilon_1(M+|b|+1)<\varepsilon$ をみたすように ε_1 を決めればよい[6]. この推論をもとにして証明を書く.

2. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列だから, 定理 2.37(2) より, ある $M>0$ が存在してすべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $|a_n|\le M$ とできる. $a_n\to a$, $b_n\to b$ $(n\to\infty)$ より, $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ が存在して, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して, $n\ge N_1$ ならば $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{M+|b|+1}$, $n\ge N_2$ ならば $|b_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{M+|b|+1}$ とできる. $N_0:=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbb{N}$ ととると, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $n\ge N_0$ ならば

$$
\begin{aligned}
|a_nb_n-ab| &= |a_n(b_n-b)+(a_n-a)b| \\
&\le |a_n||b_n-b|+|a_n-a||b| \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\le M|b_n-b|+|a_n-a||b| \qquad (\because \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{は有界}) \\
&< \frac{M+|b|}{M+|b|+1}\varepsilon \qquad (\because n\ge N_0\ge N_1,\ n\ge N_0\ge N_2) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

すなわち, $|a_nb_n-ab|<\varepsilon$ が成り立つ.

(4) $b_n\to b$ $(n\to\infty)$ かつ $|b|\ne 0$ より, ある $N_1\in\mathbb{N}$ が存在して, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $n\ge N_1$ ならば $|b_n-b|<\dfrac{|b|}{2}$ とできるので, とくに $|b_n|\ge\dfrac{|b|}{2}$ が成り立つ.

任意の $\varepsilon>0$ に対して, $a_n\to a$, $b_n\to b$ $(n\to\infty)$ より, ある N_2, $N_3\in\mathbb{N}$ が存在して, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $n\ge N_2$ ならば $|a_n-a|<\dfrac{|b|}{4}\varepsilon$, $n\ge N_3$ ならば $|b_n-b|<\dfrac{|b|^2}{4|a|+1}\varepsilon$ とできる. $N_0:=\max\{N_1,N_2,N_3\}\in\mathbb{N}$ とおくと, すべての

[6] $|b|$ のかわりに $|b|+1$ を使っているのは, あとで, $|b|$ で割り算するときに $|b|=0$ だと面倒になるからである.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - a b_n}{b b_n}\right| \\ &= \left|\frac{(a_n - a)b - a(b_n - b)}{b b_n}\right| \\ &\leq \frac{|a_n - a||b| + |a||b_n - b|}{|b||b_n|} \qquad (\because \text{三角不等式}) \\ &\leq \frac{2}{|b|^2}(|b||a_n - a| + |a||b_n - n|) \\ &< \frac{2\varepsilon}{|b|^2}\left(\frac{|b|^2}{4} + \frac{|a||b|^2}{4|a| + 1}\right) \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{|b|^2}\left(\frac{|b|^2}{4} + \frac{|b|^2}{4}\right) = \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち, $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}\right| < \varepsilon$ が成り立つ. □

注意 2.41.
定理 2.40 の証明の **1.** の議論は書く必要のない考察部分である. そのため, 教科書には書いていないことが多い. しかし, 証明を自分で書けるようにするには, この 1. のアイデアを理解する必要がある. 特に本質的な部分は (2.12), (2.13), (2.14) のような, 証明に必要となる不等式を作り出すところである. この計算が微分積分学や解析学における「評価する」ことであり, よりよい評価 (不等式) を作ることが問題の解決につながることが多い.

高校で事実のみ学んだ「はさみうちの原理」の証明を与えよう. 直感的には明らかと思えるこの事実も, ε-N 論法を用いれば, 証明を与えることができる.

定理 2.42 (はさみうちの原理)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ をみたすとする. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ をみたすならば, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して, $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ が成り立つ.

証明.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a_n \to \alpha$ より, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_1$ ならば

$$\alpha - a_n \leq |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

とできる. 次に $b_n \to \alpha$ より, ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_2$ ならば

$$b_n - \alpha \leq |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

とできる. よって, $N_0 := \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ ととれば, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば $a_n \leq c_n \leq b_n$ より

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< a_n - \alpha \quad (\because n \geq N_0 \geq N_1) \\ &\leq c_n - \alpha \quad (\because a_n \leq c_n) \\ &\leq b_n - \alpha \quad (\because c_n \leq b_n) \\ &< \varepsilon \quad (\because n \geq N_0 \geq N_2), \end{aligned}$$

すなわち, $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ となる. □

2.7. 数列の収束条件

2.5 節や 2.6 では, 数列の収束極限がわかっていた. しかし, 一般には, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が与えられたときにその収束極限 a がわかるとは限らない. 他方で, 数列の収束の定義では $|a_n - a|$ を計算するのだから, a がわからなければ数列の収束を定義から議論することは難しい. この節では, 収束極限が一般にわからないときに, 数列が収束するための十分条件を与える.

2.7.1. 単調数列. 数列が発散するとき, 正/負の無限大に発散する場合と, 振動する場合がある. 振動するということは, 数列が増えたり減ったりすることだから, まずは振動しない, すなわち単調な数列について考えよう.

定義 2.43 (単調増加, 単調減少)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) **単調増加**であるとは, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことをいう. 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) **単調減少**であるとは, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \geq b_{n+1}$ が成り立つことをいう.

単調増加な数列や単調減少な数列は振動しないから, 数列が発散する場合は正/ 負の無限大に発散する場合に限られるだろうことが予想される. 実際に次が成り立つ.

定理 2.44.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界かつ単調増加であれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ に収束する. すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ が成り立つ.

証明.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界だから $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$ となる (実数の連続性). 上限の定義から, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a$ となるので, $|a_n - a| = a - a_n$ となる.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 上限の定義からある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $a - \varepsilon < a_{N_0}$ が成り立つ. 従って, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned}|a_n - a| &= a - a_n \\ &\leq a - a_{N_0} \quad (\because \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{は単調増加}) \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

すなわち, $|a_n - a| < \varepsilon$ となるので, $a_n \to a \quad (n \to \infty)$ が成り立つ. □

例 2.45.

数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. $e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とおき, **自然対数の底**という.

証明.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とおく.

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であることを示す. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad (\because \text{二項定理}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\end{aligned} \tag{2.15}$$

となる. $\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{n+1}$ より

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \end{aligned}$$

となるので, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加となる.

2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示す. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\because k \geq 1 \text{ に対して } k! \geq 2^{k-1}) \\ &= 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leq 3 \end{aligned}$$

となるので, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である.

1., **2.** と定理 2.44 より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. □

2.7.2. コンパクト性定理. コンパクト性は実数を特徴づける重要な性質である. コンパクトの正確な定義はここでは述べないことにするが, 次に述べる Bolzano-Weierstrass の定理がコンパクト性を示す重要な定理である. 定理を述べるために, 部分列の定義を述べる.

定義 2.46 (部分列)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から順番をかえずに一部を抜き出した数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**部分列**といい, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く.

例 **2.47.**
$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := (-1)^n$ とおいて, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. このとき.

$$\{a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots\} = \{-1, -1, -1, -1, \ldots\}, \quad \{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots\} = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$$

はそれぞれ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列である.

Bolzano-Weierstarss の定理は, 実数の有界な集合は点列コンパクトであることを述べた定理である. 正確には次で述べられる.

定理 **2.48** (Bolzano-Weierstrass の定理)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるとする. このとき, ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する.

証明**.**
1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界だから, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ. すると, $[-M, 0]$, $[0, M]$ のどちらか一方の区間には無限個の a_n がある. その方を $I_1 = [b_1, c_1]$ とおく. ただし, 両方とも無限個ある場合には, $[0, M]$ を選ぶ.

2. I_1 を $[b_1, (b_1 + c_1)/2]$, $[(b_1 + c_1)/2, c_1]$ の二つにわけると, どちらか一方の区間には無限個の a_n がある. その方を $I_2 = [b_2, c_2]$ ととる. ただし, 両方とも無限個ある場合には, $[(b_1 + c_1)/2, c_1]$ を選ぶ.

3. I_2 も同様に二つにわけると, どちらか一方の区間には無限個の a_n がある. その方を I_3 とおく. 以下, $I_4, I_5, \ldots$ と区間の列を作る.

4. $a_{n_1} \in I_1$, $a_{n_2} \in I_2$, $a_{n_3} \in I_3, \ldots$ として, 部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を作る. すると, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ は上に有界で単調増加, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ は下に有界で単調減少だから収束する (定理 2.44). $b_k \to b$, $c_k \to c$ $(k \to \infty)$ とすると,

$$c_k - b_k = \frac{M}{2^{k-1}} \tag{2.16}$$

となるから, (2.16) で $k \to \infty$ とすることで, $b = c$ がわかる. $k \in \mathbb{N}$ に対して $b_k \leq a_{n_k} \leq c_k$ だから, はさみうちの原理より, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束列であり, $a_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$ となることがわかる. □

定理 2.48 の証明で得られる部分列は, 収束する部分列のなかで, 極限が最大になるものである. これは, 区間の列を作るとき, 両方とも無限個の a_n がある場合には, 常に数直線における右側を選んだことによる. 逆に常に左側を選んでいたとすれば, 収束する部分列のなかで, 極限が最小になるものとなる. 証明に

おいて, 区間の列を作るとき, 両方とも無限個の a_n があるときはどっちを選んでいたとしてもその後の証明に困ることはない.

数列から収束する部分列を取ったときの極限は, 集積点という. つまり

定義 2.49 (集積点)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $a \in \mathbb{R}$ が**集積点**であるとは, ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ となることである.

例 2.50.
数列 $\left\{\sin\left(\frac{n}{4}\pi\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ の集積点は $0, \pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である.

数列の集積点の中で最大となるもの, 最小となるものはそれぞれその数列の上極限, 下極限という. より洗練された定義は, 次のように上限, 下限を用いて定義される.

定義 2.51 (上極限, 下極限)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**上極限** $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と**下極限** $\liminf_{n\to\infty} a_n$ をそれぞれ

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

で定義する.

注意 2.52.
上極限, 下極限をそれぞれ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ と書くこともある.

定理 2.53 (集積点と上極限, 下極限)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ最大, 最小の集積点となる.

証明.

1. $a := \limsup_{n\to\infty} a_n$ とおき, a が集積点であることを示す. $k \in \mathbb{N}$ に対してある $N_k \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$a \leq \sup_{m\geq N_k} a_m < a + \frac{1}{k}$$

が成り立つ. $n_1 := N_1, n_2 := \max\{N_2, n_1 + 1\}, n_3 := \max\{N_3, n_2 + 1\}, \ldots$ と定めると, $n_k \geq N_k$ だから $a \leq a_{n_k} \leq a + \dfrac{1}{k}$ となる. $k \to \infty$ とすればはさみうちの原理により, $a_{n_k} \to a\ (k \to \infty)$ がわかる.

2. a が最大の集積点であることを示す. $\tilde{a}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積点とすると, $\tilde{a}$ に収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a_{n_k} \leq \sup_{l\geq n_k} a_l$$

となるので, $k \to \infty$ とすれば, $\tilde{a} \leq a$ が成り立つ. □

数列の上極限と下極限が一致するとき, その数列は収束する. より強く, 次が成り立つ.

定理 2.54.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$ ならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である.

証明.
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $\inf_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq n} a_k$ だから, $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ が成り立つ. 仮定より $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ が成り立つから, はさみうちの原理より, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列であり,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つ. □

極限は存在するかどうか一般にはわからないが, 上極限, 下極限は ($\pm\infty$ を許せば) 常に存在するので, 専門的な極限の議論でよく用いられる.

2.7.3. Cauchy 列と実数の完備性. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば, $a_n - a_m$ は $n, m \to \infty$ としたときに 0 に収束するはずである. このことを定式化したものが, Cauchy 列というものである.

定義 2.55 (Cauchy 列)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy** 列であるとは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $[n, m \geq N_0$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon]$ が成り立つ」ことをいう.

数列 $\{a_n\}_{n-1}^{\infty}$ が収束列であればCauchy 列となることは比較的容易に証明できる (次の定理で証明を述べる). 逆に Cauchy 列であるときに数列が収束列であるかどうかは明らかではない.

定理 2.56 (実数の完備性)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することと, Cauchy 列であることは同値である.

定理 2.56 の証明のために, 有用となる命題を示す.

命題 2.57.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列ならば有界である.

証明.
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列だったから, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0$ ならば $|a_n - a_{N_0}| < 1$ が成り立つ. よって,

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N_0}| + |a_{N_0}| \leq 1 + |a_{N_0}|$$

となるから, $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_0-1}|, 1 + |a_{N_0}|\} > 0$ とおくと, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $|a_n| \leq M$ が成り立つ. □

命題 2.58.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列とする. ある収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である.

証明.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列だったことより, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $n, m \geq N_1$ であれば $|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ. 次に, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が a に収束するので, $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $k \in \mathbb{N}$ に対して $k \geq N_2$

ならば $|a_{N_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．そこで，$k_0 \in \mathbb{N}$ を $k_0 \geq N_2, n_{k_0} \geq N_1$ をみたすようにとると，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq n_{k_0}$ ならば三角不等式により

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \varepsilon$$

が成り立つ．従って，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束することが示された． □

定理 2.56 の証明.

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であるとき，Cauchy 列であることを示す．極限を a とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．従って，すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して，$n, m \geq N$ ならば三角不等式により

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である．

2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であることを示す．命題 2.57 より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界である．Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 2.48) より収束部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がとれる．命題 2.58 より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列となる． □

注意 2.59.

実数の完備性は実数の連続性から証明した．そして，注意 2.16 にもあるように，**実数の連続性は実数と有理数の違いを表している**ことに注意した．実は，実数と有理数の違いは次にあげる 4 つの性質であり，さらにそれらの 4 つの性質はすべて同値であることが知られている．すなわち，**どれを実数と有理数の違いとしてもよい**ことが知られている．

(1) 定理 2.28(実数の連続性)
(2) 定理 2.44(単調数列の収束性)
(3) 定理 2.48(Bolzano-Weierstrass)
(4) 定理 2.56 と定理 2.29(実数の完備性と Archimedes の原理)

第 3 章

関数と関数の極限

3.1. 関数と写像

3.1.1. 関数とは何か. 関数とは何かを定義するためには, 定義域をはっきりさせる必要がある.

定義 3.1 (関数)**.**
集合 X に対して, f が X **上の関数**であるとは, 「すべての $x \in X$ に対して, 実数 $f(x) \in \mathbb{R}$ がただ一つ定まる規則」をいう. このとき $f : X \to \mathbb{R}$ と書き, X を f の定義域という.

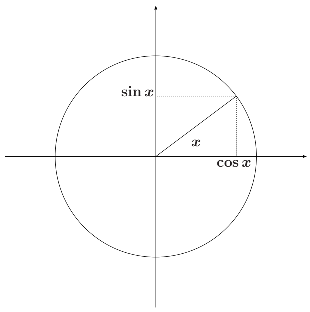
高校で学んだ関数を復習しよう

例 3.2 (指数関数)**.**
$\mathbb{R}$ 上の関数 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp(x) := e^x$$

で定める.

例 3.3 (三角関数)**.**
sin, cos は $\mathbb{R}$ 上の関数である. 単位円を用いて, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\sin x$ と $\cos x$ を定めるのであった. また, $\tan : \mathbb{R} \backslash \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots \right\} \to \mathbb{R}$ を, すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots \right\}$ に対して $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ と定めるのであった. 高校のとき, $\tan \dfrac{\pi}{2}$ を定めることができないことは (そのことが事実としてわかっていたとしても) 意識する必要がなかったが, tan の定義を定義するためには, 定義域が $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots \right\}$ であることを意識しなければならない.



注意 3.4.

例 3.2, 3.3 は厳密な定義というには問題が残っている. 例えば, $e^{\sqrt{2}}$ はどう定義すればよいのだろうか？ また, $x \in \mathbb{R}$ に対して x ラジアンは, 単位円の周の長さを用いて決めるのであるが, どうやって, 単位円の周の長さを求めればよいのであろうか？ この問題を解決するためには, 天下り的に無限級数を用いて定義する方法と, 図形との関係に注意して, 積分を用いて定義する方法がある. 詳しくは, [**8, 11, 7**] を参照せよ.

例 3.5.

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ と $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \qquad g(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in (0, \infty)) \tag{3.1}$$

と定めよう. 高校までの考えでは, f と g をわざわざ二つの文字を使って書く必要などないように思える. しかし, f と g は定義域がそれぞれ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ と $(0, \infty)$ と異なっているので別のものとみなす. すなわち, この二つの関数を同じ文字で書くことはできない.

$\mathbb{R}$ には和, スカラー倍, 積の計算ができた. この性質をそのまま関数にあてはめることができる.

定義 3.6.

集合 X 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}, g : X \to \mathbb{R}$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して, **和** $f + g : X \to \mathbb{R}$, **スカラー倍** $cf : X \to \mathbb{R}$, **積** $fg : X \to \mathbb{R}$ をそれぞれ $x \in X$ に対して

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (cg)(x) := cf(x), \quad (fg)(x) := f(x)g(x) \tag{3.2}$$

で定める.

線形代数にかかわる注意をしておく. $\mathbb{R}^X$ で集合 X 上の関数のなす集合とする. このとき, (3.2) によって定めた和とスカラー倍で, $\mathbb{R}^X$ は線形空間となる. この線形空間の部分空間は解析学における重要な研究対象になる.

3.1.2. 逆関数. 指数関数 exp, 三角関数 sin の逆関数を定義するために, 関数の像と単射を説明しよう.

定義 3.7 (像)**.**

集合 X と $f : X \to \mathbb{R}$, $A \subset X$ に対して, A の f による**像** $f(A)$ を

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

で定義する.

例えば,

$$\exp(\mathbb{R}) = \{\exp(x) : x \in \mathbb{R}\} = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

である. また,

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = \left\{\sin x : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right\} = [-1, 1]$$

となる.

注意 3.8.

$f : X \to \mathbb{R}$ の $A \subset X$ による像 $f(A)$ とは, あらっぽくいえば, $y = f(x)$ としたときの $x \in A$ に対する y の範囲 (値域) のことである.

定義 3.9 (単射)**.**

集合 X 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**単射**であるとは「すべての $x_1, x_2 \in X$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」となることをいう.

注意 3.10.

$f : X \to \mathbb{R}$ が単射というのは, 対偶を取れば

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

だから, 異なる二点の行き先は常に違うということ.

例 3.11.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in (0, \infty)),$$

で定めよう. 例 3.5 で説明したとおり, 関数 f と g は違うものであった. なぜ違うものとすべきかは, f は単射でないが, g は単射であることから説明ができる. このことを証明しよう.

g が単射であることを示す. 示すべきことは, 「任意の $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ に対して, $g(x_1) = g(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ となること」である. 任意の $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ に対して, $g(x_1) = g(x_2)$ を仮定すると, $x_1^2 = x_2^2$ となるので, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$ となる. $x_1, x_2 > 0$ **だから** $x_1 + x_2 > 0$ **となるので,** $x_1 - x_2 = 0$, すなわち, $x_1 = x_2$ が成り立つ. よって, g は単射であることがわかった.

次に, f が単射でないことを示すにはどうしたらよいか説明する. 示すべきことは単射の否定だから, 「ある $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ が存在して, $g(x_1) = g(x_2)$ かつ $x_1 \neq x_2$ となること」である[1]. g の単射の証明を見直すと, $x_1 + x_2 \neq 0$ であるこ

[1] 否定するとき, 任意は存在にかえる, 「A ならば B」は「A かつ B でない」にかえることを思い出そう.

とが鍵になっていた. だから, この部分がうまくいかないように作れば単射でないことが示せる. では, f が単射でないこと示そう.

$x_1 = -1$, $x_2 = 1 \in \mathbb{R}$ ととる. このとき, $f(x_1) = 1 = (-1)^2 = f(x_2)$ であるが, $x_1 \neq x_2$ となる. 従って, f は単射ではない[2]

他にも, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単射ではない. 実際に, $x = 0, \pi \in \mathbb{R}$ に対して, $\sin 0 = \sin \pi = 0$ だが, $0 \neq \pi$ である.

さて, $f : X \to \mathbb{R}$ が単射のとき, f の**逆関数** f^{-1} が $f(X)$ 上で定義できる. すなわち, $y \in f(X)$ に対して, $y = f(x)$ となる $x \in X$ を用いて

$$f^{-1}(y) := x$$

と定める.

例 3.12 (対数関数)**.**

exp は単射であり,

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

だから, exp の逆関数は $(0, \infty)$ 上で定義できる (真数条件). これを対数関数といい, $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ と書くのであった.

$$\begin{aligned} \log(\exp(x)) &= \log(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \exp(\log(y)) &= e^{\log y} = y \quad (y \in (0, \infty)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

であったことに注意せよ.

例 3.13 (逆三角関数)**.**

sin は $\mathbb{R}$ 上で単射でないため, 逆関数を作るためには (定義域に) 制限をかける必要がある. sin は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上で単射な関数になり,

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin x : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = [-1, 1]$$

となるので, sin の逆関数は $[-1, 1]$ 上で定義できる. これを**逆正弦関数**といい, $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ と書く.

$$\begin{aligned} &\arcsin(\sin(x)) = x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), \\ &\sin(\arcsin(y)) = y \quad (y \in [-1, 1]) \end{aligned}$$

[2]証明はたった 2 文でおわる. 「$g(x_1) = g(x_2)$ かつ $x_1 \neq x_2$ 」をみたす, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ の例を一つつくればよい

となるが,

$$\arcsin(\sin(x)) \neq x \quad (x \in \mathbb{R})$$

となることに注意すること ($\mathbb{R}$ にかえてはいけない). 同様にして, **逆余弦関数** $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, **逆正接関数** $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を定義することができる.

3.1.3. 単調関数. f が実数の部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ で定められているとき[3], 関数 f が単調増加, 単調減少であることを定義できる.

定義 3.14 (単調増加, 単調減少)**.**
実数の部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ で定められた関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が (広義) **単調増加**であるとは, 任意の $x, x' \in X$ が $x \leq x'$ ならば $f(x) \leq f(x')$ をみたすことをいう. 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が (広義) **単調減少**であるとは, 任意の $x, x' \in X$ が $x \leq x'$ ならば $f(x) \geq f(x')$ をみたすことをいう.

単調増加を単調非減少ということがある[4]. この定義だと定数関数, 例えば, $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = 1$ となる関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は, 違和感を持つかもしれないが, 単調増加かつ単調減少な関数となる.

単調増加, 単調減少の定義の不等号から等号をとったものは狭義単調増加, 狭義単調減少という. すなわち,

定義 3.15 (狭義単調増加, 狭義単調減少)**.**
実数の部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ で定められた関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**狭義単調増加**であるとは, 任意の $x, x' \in X$ が $x < x'$ ならば $f(x) < f(x')$ をみたすことをいう. 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**狭義単調減少**であるとは, 任意の $x, x' \in X$ が $x < x'$ ならば $f(x) > f(x')$ をみたすことをいう.

狭義単調増加であれば, 広義単調増加であることがわかる (各自たしかめよ). 狭義単調増加であることは, 逆関数が存在するための十分条件を与えている. すなわち, 次が成り立つ.

命題 3.16.
実数の部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ で定められた関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加ならば, f は単射である. また, f の逆関数 f^{-1} は狭義単調増加となる.

---

[3] より一般には, X に順序が定められているとき

[4] この用語を好まない人もいる. 非減少は減少しないということであって, 増加を意味しないからである

証明.

1. f が単射であることを示す. $x, x' \in X$ が $f(x) = f(x')$ をみたすとする. 背理法を用いて, $x = x'$ を仮定する. 必要なら, x と x' を入れかえて, $x < x'$ と仮定してよい. すると, f は狭義単調増加だから, $f(x) < f(x')$ が成り立つ. これは $f(x) = f(x')$ であったことに矛盾する. したがって, $x = x'$ が成り立つので, f は単射となる.

2. f^{-1} が狭義単調増加であることを示す. 任意の $y, y' \in f(X)$ に対して, $y < y'$ ならば $x := f^{-1}(y)$, $x' := f^{-1}(y')$ とおくと $f(x) = y$, $f(x') = y'$ となる. $x < x'$ が成り立つことをいうために, 逆に $x \geq x'$ とすると, f が単調増加だから $f(x) \geq f(x')$ が成り立つ. これは, $y < y'$ であることに矛盾するので, $x < x'$ となる. すなわち, $f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x')$ となるから, f^{-1} は狭義単調増加である. □

3.1.4. 関数の合成. $\exp(-x^2)$ や $\sin(x^2)$ など, 二つの関数を合成して新しい関数を作ることを考えよう.

定義 3.17 (関数の合成)**.**
実数の部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ と関数 $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ が $f(A) \subset B$ をみたすとき, 関数の**合成** $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in A$ に対して

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

で定義する.

定義における $f(A) \subset B$ の仮定は, $x \in A$ に対して $f(x) \in B$ となるために必要である. この仮定がないと, $g(f(x))$ を考えることができなくなるかもしれない. 例えば, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f(x) := x^3, \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) := \log x, \quad (x \in (0, \infty))$$

としたときに, $g \circ f$ を定めることができないということである ($f(0) = 0$ となり, 真数条件をみたさない).

逆関数と合成関数については次の性質がある. これは (3.3) の一般化である.

命題 3.18.
実数の部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : X \to \mathbb{R}$ は逆関数 f^{-1} を持つとする. このとき

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad (x \in X), \qquad (f \circ f^{-1})(x) = y, \quad (y \in f(X))$$

が成り立つ.

3.1.5. 複素関数への拡張. まずは, 指数関数についてよく知られた, 指数法則を述べよう.

定理 3.19 (指数法則)**.**
次の指数法則が成り立つ.

(1) すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $e^x e^y = e^{x+y}$
(2) すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $(e^x)^y = e^{xy}$

証明は, 指数関数とは何か？ に戻らないといけないため, 難しい. とりあえずは, 指数法則は認めて先に進もう. さらに, $z \in \mathbb{C}$ に対して, e^z が定まっているとして, 指数法則が $\mathbb{C}$ 上でも成りたつと仮定してみよう. すなわち, $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^z e^w = e^{z+w}, \quad (e^z)^w = e^{zw}$$

が成り立っているとしよう. すると, $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ だから, e^{iy} がわかれば,e^{x+iy} がわかることになる. e^{iy} は次の Euler の公式が知られている.

定理 3.20 (Euler の公式)**.**
すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つ.

Euler の公式を認めて, $x \in \mathbb{R}$ に対する e^{ix} が何か？ を無視しておくと,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

だから, 辺々足し算, 引き算をすることで次が得られる.

系 3.21.
すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

が成り立つ.

Euler の公式の応用として, 加法定理を証明してみよう.

定理 3.22 (加法定理)**.**
すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

が成り立つ.

証明.
$x, y \in \mathbb{R}$ に対して, Euler の公式と指数法則から

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y - \sin x \sin y &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}\right) = \cos(x+y)
\end{aligned}$$

となる. $\sin(x+y)$ も同様である. □

このように複素関数に話を広げると, 三角関数と指数関数を見通しよく扱うことができる.

3.2. 関数の極限

高校数学において,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

と計算する練習はしたであろう. 最後の計算だけを見てみると, $x=2$ をたんに代入しているだけのようにも見える. しかし, 最初の分数 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ は $x=2$ を代入すると分母が 0 になる. すなわち, $x=2$ で**定義ができていない.** それにもかかわらず, 最後の計算では $x=2$ を代入しているようにも見える. 極限の計算は, うまい計算をして, 分母が 0 になるなど, 定義ができない部分を消してから代入するということでよいのだろうか？

そもそもとして, **「近づく」と「代入する」は違う**はずである. それゆえに, 「近づく」をどのように定式化すればよいのだろうか？ この問題は, 19 世紀になって, 数列の極限と同様に, 極限の厳密な定義を与えることで結論が得られた.

定義 3.23 (関数の極限)**.**

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対し, f が $x \to x_0$ のときに $\alpha \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ とか $f(x) \to \alpha$ $(x \to x_0)$ と書く.

f が $x \to x_0$ のときに ∞ に発散するとは,「任意の $K > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) > K$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ とか $f(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$ と書く.

f が $x \to x_0$ のときに $-\infty$ に発散するとは,「任意の $K > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) < -K$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ とか $f(x) \to -\infty$ $(x \to x_0)$ と書く.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ を論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となる. 同様に $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (もしくは $-\infty$) を論理記号で書くと

$$\forall K > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > K \text{ (もしくは } f(x) < -\infty)$$

となる.

具体的な関数に対して, 関数の極限の証明の書き方を練習しよう.

例 3.24.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x$, $(x \in \mathbb{R})$ で定める. このとき, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) \to a \quad (x \to a)$ が成り立つ.

定義を確認しよう. 示すべきことは

示すこと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

である. 目標は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ が成り立つような $\delta > 0$ をみつけることである. そのためには, ε-N 論法と同様に, $\delta > 0$ をあとで決めることにして, どのような条件があれば示したいことが成り立つかを考察する必要がある.

証明.

1.(考察) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をあとで決める. すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ に対して, $0 < |x - a| < \delta$ を仮定する. すると

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta$$

となる. よって $\delta \leq \varepsilon$ であれば

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta \leq \varepsilon,$$

すなわち, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ. この考察を元に証明を書く.

2.(証明) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon > 0$ とおく. すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ に対して, $0 < |x - a| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - a| &= |x - a| \\ &< \delta \qquad (\because |x - a| < \delta) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

すなわち, $|f(x) - a| < \varepsilon$ となるので, $f(x) \to a \quad (x \to a)$ が成り立つ. □

例 3.25.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ が成り立つ.

定義を確認しよう. 示すべきことは

示すこと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow \left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

である. $x \neq 0$ に対して $\left| \sin \dfrac{1}{x} \right| \leq 1$ に注意すると $\left| x \sin \dfrac{1}{x} - 0 \right| \leq |x|$ となる. $x = 0$ を代入していないことに注意しておこう. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, すなわち $x \neq 0$ だから $\sin \dfrac{1}{x}$ を定めることができて, 三角関数のもつ性質を使うことができるのである.

証明.

1.(考察) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をあとで決める. すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $0 < |x - 0| < \delta$ を仮定する. すると

$$\begin{aligned} \left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| &= |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\ &\leq |x| < \delta \end{aligned}$$

となる. よって $\delta \leq \varepsilon$ であれば

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \delta \leq \varepsilon,$$

すなわち, $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ が成り立つ. この考察を元に証明を書く.

2.(証明) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon > 0$ とおく. すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $0 < |x - 0| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| &= |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\
&\leq |x| \qquad \left(\because \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1\right) \\
&< \delta \qquad (\because |x| < \delta) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

すなわち, $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ となるので, $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ が成り立つ. □

もう少し面倒な例をやってみよう.

例 3.26.

$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ が成り立つ.

定義を確認しよう. 示すべきことは

示すこと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow \left| x^2 - 1 \right| < \varepsilon$$

である.

証明.

1.(考察) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をあとで決める. すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ に対して, $0 < |x - 1| < \delta$ を仮定する. すると

$$\begin{aligned}
|x^2 - 1| &= |x - 1||x + 1| \\
&= |x - 1||(x - 1) + 2| \\
&\leq |x - 1|(|x - 1| + 2) \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \delta(\delta + 2) \qquad (\because |x - 1| < \delta)
\end{aligned}$$

となる. $\delta \leq 1$ を仮定すると $|x^2-1| < 3\delta$ だから $3\delta \leq \varepsilon$ も仮定すれば $\left|x^2-1\right| < \varepsilon$ が成り立つ. この考察を元に証明を書く.

2.(証明) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{3}, 1\right\} > 0$ とおく. すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ に対して, $0 < |x-1| < \delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
|x^2-1| &= |x-1||x+1| \\
&= |x-1||(x-1)+2| \\
&\leq |x-1|(|x-1|+2) \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \delta(\delta+2) \qquad (\because |x-1| < \delta) \\
&\leq \delta(1+2) \qquad (\because \delta \leq 1) \\
&\leq \varepsilon \qquad (\because \delta \leq \frac{\varepsilon}{3})
\end{aligned}
$$

すなわち, $|x^2-1| < \varepsilon$ となるので, $\lim_{x\to 0} x^2 = 1$ が成り立つ. □

上記の例 3.24, 3.25, 3.26 の論法を **ε-δ 論法**という.

注意 3.27.

数列の極限の場合と同様に, 例 3.24, 3.25, 3.26 の証明で, $\delta > 0$ をみつける計算 (証明中の **1.**) については, 証明では書かなくてもよい.

定理 3.28.

開区間 $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ となることは「すべての数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対して[5], $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ならば $f(x_n) \to \alpha$ $(n \to \infty)$ となること」と同値である.

証明.

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ を仮定して,「すべての数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対して, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ならば $f(x_n) \to \alpha$ $(n \to \infty)$ となること」を示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ より, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \tag{3.4}$$

が成り立つ. $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ よりある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_0 \quad \text{ならば} \quad |x_n - x_0| < \delta \tag{3.5}$$

が成り立つ. (3.4) と (3.5) より $n \geq N_0$ ならば $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ が成り立つ.

2. 「すべての数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対して, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ならば $f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$ となること」を仮定して, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ が成り立つことを示すために, 背理法を用いて $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq A$ を仮定する. すると, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, すべての $\delta > 0$ に対して, ある $x_\delta \in I \setminus \{x_0\}$ が存在して, $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ かつ $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$ が成り立つ. すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\delta = \dfrac{1}{n}$ ととると, ある $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ が存在して, $0 < |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ が成り立つ. $n \to \infty$ とすると, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ となるが, $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$ だから $f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$ **とならない**. これは仮定に矛盾する. □

定理 3.28 を用いると, 数列の極限で成立することはほぼそのまま成り立つ. 例えば, $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して, $f(x) + g(x)$ が $x \to x_0$ としたときにどうなるかを調べるために, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ となる数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ を任意にとって, 数列 $f(x_n) + g(x_n)$ の収束を調べればよい. 結果として, 次が得られる.

定理 3.29.

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} g(x)$ が存在するとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\displaystyle \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

(2) $c \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle \lim_{x \to x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \to x_0} f(x)$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$

定理 3.29 について, 引き算や (分母が 0 にならない条件のもとで) 割り算についても同様の結果が成立する. また, 定理 3.28 を用いずに ε-δ 論法を用いて直接定理 3.29 を証明することもできる (各自たしかめよ).

定理 3.29 の (2) は (3) の特別な場合 ($g(x) = c$ となる関数を考えればよい) であるが, (1) と (2) の性質をまとめて, 極限操作は**線形**であるというために (2) の性質は重要である. 一般に $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V に対して, $T : V \to \mathbb{R}$ が**線形**であるとは

$$T(f + g) = Tf + Tg, \quad (f, g \in X), \qquad T(cf) = xTf, \quad (f \in X, c \in \mathbb{R})$$

が成り立つことをいう.

定理 3.30.

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f, g, h : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} g(x)$ が存在するとする.

(1) 任意の $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して, $f(x) \leq g(x)$ ならば, $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$ が成り立つ.

(2) (はさみうちの原理) 任意の $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$ ならば, $\lim_{x \to x_0} h(x)$ も存在して,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

が成り立つ.

関数の極限に対する Cauchy の判定条件は少々面倒な記述になる.

定理 3.31 (Cauchy の判定条件)**.**

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x \to x_0} f(x)$ が存在することは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x, x' \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ かつ $0 < |x' - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$」が成り立つことと同値である.

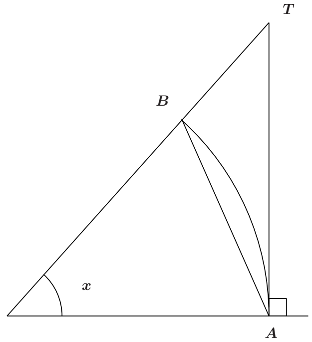
$\sin x$ の微分の計算に必要となる, 次の例を取りあげよう.

例 3.32.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

証明の方針.

半径 1 の円弧を考える. $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ において, $\overline{AB} \leq$ 弧 $AB \leq \overline{AT}$ である. 余弦定理と倍角公式から $\overline{AB} = \sqrt{2 - 2\cos x} = 2\sin\dfrac{x}{2}$ となる. ラジアンの定義より, 弧 $AB = x$ となる. tan の定義より, $\overline{AT} = \tan x$ となる. 以上をまとめると, $\dfrac{1}{\tan x} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ より $\dfrac{\sin x}{\tan x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$,



すなわち,

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \cos\frac{x}{2} \tag{3.6}$$

となる. $-\dfrac{\pi}{4} < x < 0$ のときは, (3.6) の x のかわりに $-x$ を代入すれば

$$\cos(-x) \le \frac{\sin(-x)}{-x} \le \cos\left(-\frac{x}{2}\right)$$

から, やはり (3.6) がなりたつ. よって, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \setminus \{0\}$ で (3.6) が成り立つので, $x \to 0$ とすると, $\cos x \to 1$, $\cos\dfrac{x}{2} \to 1$ よりはさみうちの原理から $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ $(x \to 0)$ が成り立つ. □

関数の極限の定義にある, $|x - x_0| < \delta$ は x と x_0 との距離が x_0 の左側と右側の両方で δ 未満となっている. 左側と右側の片側のみの極限を取ることを考えよう.

定義 3.33 (片側極限)**.**
開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対し, f が $x \to x_0 + 0$ のときに $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < x - x_0 < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\displaystyle\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \alpha$ とか $f(x) \to \alpha$ $(x \to x_0 + 0)$ と書く ($x \to x_0 + 0$ のかわりに $x \downarrow x_0$ と書くこともある).

f が $x \to x_0 - 0$ のときに $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < x_0 - x < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\displaystyle\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \alpha$ とか $f(x) \to \alpha$ $(x \to x_0 - 0)$ と書く ($x \to x_0 - 0$ のかわりに $x \uparrow x_0$ と書くこともある).

$f(x) \to \alpha$ $(x \to x_0 + 0)$ を論理記号で書くと

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して} \\ 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \end{gathered}$$

となる. $f(x) \to \alpha$ $(x \to x_0 - 0)$ を論理記号で書くと

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して} \\ 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \end{gathered}$$

となる.

片側極限と通常の極限には下記の性質がある,

命題 3.34.
開区間 $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対し, 以下は同値となる.

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ が存在する.

(2) $\lim_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0-0} f(x)$ が共に存在して, $\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x)$.

証明.
(1) ならば (2) は各自考えよ. (2) ならば (1) を示す. $f(x) \to \alpha$ $(x \to x_0 + 0)$ とするときに, $f(x) \to \alpha$ $(x \to x_0)$ を示せばよい. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $f(x) \to \alpha$ $(x \to x_0 + 0)$ だから, ある $\delta_1 > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して, $0 < x - x_0 < \delta_1$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ. また, $f(x) \to \alpha$ $(x \to x_0 - 0)$ だから, ある $\delta_2 > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して, $0 < x_0 - x < \delta_2$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ. よって, $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ とおくと, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して, $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば, $0 < x - x_0 < \delta_1$, $0 < x_0 - x < \delta_2$ のどちらも成立するので, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ. □

定義 3.35 (無限大での極限)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し, f が $x \to \infty$ のときに $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $R > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $x > R$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$ とか $f(x) \to \alpha$ $(x \to \infty)$ と書く.

f が $x \to -\infty$ のときに $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $R > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $x < -R$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$ とか $f(x) \to \alpha$ $(x \to -\infty)$ と書く.

$f(x) \to \alpha$ $(x \to \infty)$ を論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists R > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} \text{ に対して } x > R \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となる. $f(x) \to \alpha$ $(x \to -\infty)$ を論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists R > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} \text{ に対して } x < -R \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となる.

注意 3.36.
f が (正の/負の) 無限大に発散することの定義も定義することができる. 各自定義を書いてみよ.

3.3. 連続関数

3.3.1. 連続関数. 連続関数とは, 直感的にはグラフがつながっていることであるが, 高校の教科書で確認してみると, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ が成り立つことであった. 定義としてまとめておこう.

定義 3.37 (関数の連続)**.**
$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ に対して, f が $x_0 \in I$ で**連続**であるとは, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ が成り立つことをいう. f が I **上連続**であるとは, 「任意の $x_0 \in I$ に対して, f は x_0 で連続」が成り立つことをいう.

注意 3.38.
f が x_0 で連続であることを関数の極限を用いずに論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \text{ に対して}$$
$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となる. 極限の定義に基づくならば, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ や $0 < |x - x_0| < \delta$ とすべきであるが, $x = x_0$ ととることができて, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ は自動的に成り立っている. 言い換えると, 極限のときと違って連続のときは $x = x_0$ を代入してよい. 同様に, f が I 上連続であることを論理記号で書くと

$$\forall x_0 \in I, \forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \text{ に対して}$$
$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となる. x_0 が δ より先に決まることに注意せよ. この注意は, 後に一様連続の概念を学ぶときにまた確認することになる.

例 3.39.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^3 - 1$ で定義する. このとき, f は $x = 2$ で連続となる.

定義を確認しよう. 示すべきことを論理記号で書くと

示すこと

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} \text{ に対して } |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon$$

である. 従って, $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ となるような $\delta > 0$ を見つけるための考察が必要となる. $|f(x) - f(2)| = |x^3 - 8| = |x - 2||x^2 + 2x + 4|$ だから $x^2 + 2x + 4 = (x-2)^2 + 6(x-2) + 12$ と変形する ($x^2 + 2x + 4$ を $x - 2$ で割り算するのと同じ) と, $|x - 2| < \delta$ を用いて評価を作ることができる.

証明.

1(考察). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ をあとで決める. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $|x-2| < \delta$ を仮定する. すると

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |x-2||x^2+2x+4| \\ &= |x-2||(x-2)^2 + 6(x-2) + 12| \\ &\leq |x-2|(|x-2|^2 + 6|x-2| + 12) \qquad (\because \text{三角不等式}) \\ &\leq \delta(\delta^2 + 6\delta + 12) \qquad (\because |x-1| < \delta) \end{aligned}$$

となる. $\delta \leq 1$ を仮定すると $|x^2-1| < 19\delta$ だから $19\delta \leq \varepsilon$ も仮定すれば $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ が成り立つ. この考察を元に証明を書く.

2.(証明) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{19}, 1\right\} > 0$ とおく. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $|x-2| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |x-2||x^2+2x+4| \\ &= |x-2||(x-2)^2 + 6(x-2) + 12| \\ &\leq |x-2|(|x-2|^2 + 6|x-2| + 12) \qquad (\because \text{三角不等式}) \\ &\leq \delta(\delta^2 + 6\delta + 12) \qquad (\because |x-1| < \delta) \\ &\leq 19\delta \qquad (\because \delta \leq 1) \\ &\leq \varepsilon \qquad (\because \delta \leq \frac{\varepsilon}{19}) \end{aligned}$$

すなわち, $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ となるので, f は $x = 2$ で連続である. □

注意 3.40.

例 3.39 について, 証明を書くだけなら講義ノートの 2. のみでよいが, δ をどうとったかがわかるように 1. も書いておくとよい.

例 3.41.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^3 - 1$ で定義する. このとき, f は $\mathbb{R}$ 上連続となる.

定義を確認しよう. 示すべきことを論理記号で書くと

示すこと

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \text{ と } \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} \text{ に対して}$$
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

である.

証明.

任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3x_0^2}, 1\right\} > 0$ とおく. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $|x - x_0| < \delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(2)| &= |x - x_0||x^2 + x_0 x + x_0^2| \\
&= |x - x_0||(x - x_0)^2 + 3x_0(x - x_0) + 3x_0^2| \\
&\leq |x - x_0|(|x - x_0|^2 + 3|x_0||x - x_0| + 3x_0^2) \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \delta(\delta^2 + 3|x_0|\delta + 3x_0^2) \qquad (\because |x - 1| < \delta) \\
&\leq \delta(1 + 3|x_0| + 3x_0^2) \qquad (\because \delta \leq 1) \\
&\leq \varepsilon \qquad (\because \delta \leq \frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3x_0^2})
\end{aligned}
$$

すなわち, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となるので, f は x_0 で連続となる. x_0 は任意だったので, f は $\mathbb{R}$ 上連続となる. □

特殊な例として, 1 点だけで連続な関数を取り上げよう.

例 3.42.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$
f(x) := \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}
$$

で定義する. f は $x = 0$ で連続, $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ では不連続となる.

注意 3.43.

例 3.42 はグラフを書くことが難しいので, ε-δ 論法を使わないと, 証明するのは困難である.

例 3.42 の証明.

1. f が $x = 0$ で連続となることを示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta := \min\{\varepsilon, 1\}$ とおく. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $|x| < \delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(0)| &= |f(x) - 0| \\
&= |f(x)| \\
&\leq |x| < \delta = \varepsilon
\end{aligned}
$$

となる. 実際, $x \in \mathbb{Q}$ のとき, $|f(x)| = |x|$ となる. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のときは $f(x) = 0$ より $|f(x)| = 0 \leq |x|$ となる. 従って, f は $x = 0$ で連続となる.

2. f が $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ で連続とならないことを示す.

$\varepsilon := \dfrac{|x_0|}{2}$ とおく. すべての $\delta > 0$ に対して $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \mathbb{Q}$ をひとつとると, $|x - x_0| < \delta$ かつ

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |0 - f(x_0)| \\ &= |x_0| > \frac{|x_0|}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となるので, f は x_0 で連続にならない. □

3.3.2. 連続関数の性質. 連続関数同士の和, スカラー倍, 積, 合成関数はまた連続関数となる. 定理としてまとめよう.

定理 3.44.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする.

(1) f,g が $x \in \mathbb{R}$ で連続ならば, すべての $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f + g, \lambda f, fg$ も x で連続である.

(2) f, g が $\mathbb{R}$ 上連続ならば, $g \circ f$ も $\mathbb{R}$ 上連続である.

証明.
(2) のみ示す. 任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $g \circ f$ が $x = x_0$ で連続となることを示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, g は $y_0 = f(x_0)$ で連続だから, $\delta_1 > 0$ が存在して, すべての $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|y - f(x_0)| < \delta_1 \text{ ならば } |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon \tag{3.7}$$

が成り立つ. 次に, この $\delta_1 > 0$ に対し f が $x = x_0$ で連続だから, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|x - x_0| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \tag{3.8}$$

が成り立つ. よって, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $|x - x_0| < \delta$ ならば (3.8) より, $|f(x) - f(x_0)| < \delta_1$ だから (3.7) より $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$, すなわち, $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$, となる. よって, $g \circ f$ は $x = x_0$ で連続となる. □

3.4. 閉区間上の連続関数

有界閉区間上の連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ には重要な性質がある. 高校数学で紹介があった「中間値の定理」と「最大値・最小値の存在」である.

3.4.1. 中間値の定理. 中間値の定理は, 連続関数のグラフがつながっていていることを示す定理である. 高校においては, 直感的に成り立つこととしていたが, 今までの議論をもとに証明することができる.

定理 3.45 (中間値の定理)**.**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続で $f(a) < f(b)$ ならば「任意の $c \in (f(a), f(b))$ に対して, ある $x_0 \in [a,b]$ が存在して $f(x_0) = c$」が成り立つ.

証明.
任意の $c \in (f(a), f(b))$ に対して

$$E := \{x \in [a,b] : f(x) \leq c\}$$

とおく. $x_0 := \sup E$ とおくと, $[a,b]$ が閉区間なので $x_0 \in [a,b]$ となる. 以下, $f(x_0) = c$ となることを示す.

1. $f(x_0) \leq c$ を示す. $x_0 = \sup E$ より, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ が存在して, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ とできる. すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n \in E$ より $f(x_n) \leq c$ となる. よって, $n \to \infty$ とすると, f は $[a,b]$ 上連続だから $f(x_0) \leq c$ が得られる.

2. $f(x_0) \geq c$ を示す. $f(x_0) \leq c < f(b)$ より, $x_0 \neq b$ である. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n' := x_0 + \dfrac{b - x_0}{n}$ とおくと, $x_0 < x_n' \leq b$ となる. $x_0 = \sup E$ より, $x_n' \notin E$ だから, $f(x_n') > c$ となる. $n \to \infty$ とすると, $x_n' \to x_0$ だから, f が $[a,b]$ 上連続であることより $f(x_0) \geq c$ となる.

1., **2.** より $f(x_0) = c$ が成り立つ. □

例 **3.46.**
$k = 0,1,2$, $c_k \in \mathbb{R}$ に対して, 方程式 $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$ は実数解を持つ. 実際, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ $x \in \mathbb{R}$ とおく.$M := \max\{|c_0|, |c_1|, |c_2|\} + 1$ とおくと, f は $[-2M, 2M]$ 上連続であり,

$$\begin{aligned}
f(-2M) &= -8M^3 + 4c_2M^2 - 2c_1M + c_0 \\
&\leq -8M^3 + 4M^3 + 2M^3 + M^3 \quad (\because |c_K| \leq M \text{ と } M \geq 1) \\
&= -M^3 < 0, \\
f(2M) &= 8M^3 + 4c_2M^2 + 2c_1M + c_0 \\
&\geq 8M^3 - 4M^3 - 2M^3 - M^3 \quad (\because |c_K| \leq M \text{ と } M \geq 1) \\
&= M^3 > 0,
\end{aligned}$$

すなわち, $f(-2M) < 0 < f(2M)$ となるから, 中間値の定理より, ある $x_0 \in [-2M, 2M]$ が存在して, $f(x_0) = 0$ となる.

3.4.2. Weierstrass の最大値定理. 有界閉区間上の連続関数は, グラフの見た目を考えると最大値と最小値があるように見える. これを証明しよう.

定理 3.47 (Weierstrass の最大値定理)**.**
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば関数 f の最大値, 最小値が存在する. すなわち,

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

が成り立つ.

証明.
最大値の存在を示す.

1. $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$w とおくとき, $M < \infty$ を示す[6]. $M = \infty$ と仮定すると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$ が存在して, $f(x_n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ とできる. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界だから, Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 2.48) より収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ とおくと, $x_{n_k} \in [a, b]$ より, $x_0 \in [a, b]$ となる. f は $[a, b]$ 上連続だから

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad (k \to \infty)$$

となる. 他方で, $f(x_{n_k}) \geq n_k$ より

$$f(x_{n_k}) \to \infty \quad (k \to \infty)$$

となり, $f(c) \in \mathbb{R}$ となることに矛盾する.

2. M の定義から $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$ が存在して, $f(x_n) \to M$ $(n \to \infty)$ が成り立つ. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界だから, Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 2.48) より収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ とおく. 以下, $f(x_0) = M$ を示す. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset [a, b]$ より, $x_0 \in [a, b]$ となる. f は $[a, b]$ 上連続だから

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad (k \to \infty)$$

となる. 他方で, $f(x_n) \to M$ $(n \to \infty)$ だから

$$f(x_{n_k}) \to M \quad (k \to \infty)$$

[6] $f([a, b])$ が上に有界となることを示すのと同じ.

となるので, $f(x_0) = M$ となる. よって, $f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ は最大値となる. □

3.4.3. 一様連続性. $I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上連続のとき, 一般に定義でとれる $\delta > 0$ は $x_0 \in I$ で異なる.

例 **3.48.**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^2$ で定めると f は $\mathbb{R}$ 上連続となる. $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続となることを ε-δ 論法で証明するとき, $\delta > 0$ がどう取れるかをみてみよう.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ をあとで決める. $x \in \mathbb{R}$ に対して, $|x - x_0| < \delta$ を仮定すると

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \\ &= |(x - x_0)(x - x_0 + 2x_0)| \\ &\leq |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|) \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta(\delta + 2|x_0|) \quad (\because |x - x_0| < \delta)\end{aligned}$$

となる. $\delta \leq 1$ と $(1 + 2|x_0|)\delta < \varepsilon$ を仮定すれば

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta(\delta + 2|x_0|) \leq \varepsilon$$

となる. この仮定をみたすには, $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}, 1\right\} > 0$ ととればよいが, $|x_0|$ が大きくなれば δ はいくらでも小さくなることがわかる. すなわち

$$\frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} \to 0, \quad (|x_0| \to \infty)$$

となる.

例 **3.49.**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x$ で定めたとき, f は $\mathbb{R}$ 上連続となる. $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, f が x_0 で連続となることを ε-δ 論法で証明するとき, $\delta > 0$ がどう取れるかをみてみよう.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ をあとで決める. $x \in \mathbb{R}$ に対して, $|x - x_0| < \delta$ を仮定すると

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta \quad (\because |x - x_0| < \delta)$$

となる. $\delta \leq \varepsilon$ を仮定すれば

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \leq \varepsilon$$

となる. 従って, $\delta := \varepsilon > 0$ ととればよいが, $x_0 \in \mathbb{R}$ がどの値であっても δ は小さくならない (0 にならない) ことがわかる.

例 3.49 はよりよい連続性ということである. これを定式化しよう.

定義 3.50 (一様連続)**.**
$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上一様連続であるとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, すべての $x, x' \in I$ に対して, $|x - x'| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$」が成り立つことをいう.

$f : I \to \mathbb{R}$ が I 上一様連続であることを論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x, x' \in I \text{ に対して}$$
$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

となる.

例 3.51.
例 3.49 の関数 f は $\mathbb{R}$ 上一様連続となる.

証明.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta := \varepsilon > 0$ ととる. すべての $x, x' \in \mathbb{R}$ に対して $|x - x'| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(x')| = |x - x'| < \delta = \varepsilon,$$

すなわち, $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ となるので, f は $\mathbb{R}$ 上一様連続となる. □

一般に関数が一様連続かどうかを定義に従って示すのは面倒になることが多い. しかし, 次の強力な結果がある.

定理 3.52.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が $[a, b]$ 上連続ならば, f は $[a, b]$ 上一様連続である.

注意 3.53.
定理 3.52 は閉区間であることが重要である. 開区間では成り立たない.

定理 3.52 の証明.
背理法で示す. つまり, f が $[a, b]$ 上一様連続でないと仮定する.

1. f が $[a, b]$ 上一様連続でないことを論理記号で書くと, $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, すべての $\delta > 0$ に対して, $x_\delta, x'_\delta \in [a, b]$ が存在して, $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$ かつ $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon_0$ が成り立つ.

2. **1.** でとれる $\varepsilon_0 > 0$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\delta = \dfrac{1}{n}$ とおく．すると, $x_n, x'_n \in [a,b]$ が存在して, $|x_n - x'_n| < \dfrac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$ とできる．

3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ は有界だから Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 2.48) より収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．$x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ とすると,

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

となるから, $x'_{n_k} \to x_0$ がわかる．

4. f は $[a,b]$ 上連続だから

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \quad f(x'_{n_k}) \to f(x_0), \quad (k \to \infty)$$

となる．他方, **2.** より $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ であり, ε_0 は n によらないから $k \to \infty$ とすると

$$\varepsilon_0 \leq |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

となり, $\varepsilon_0 > 0$ であったことに矛盾する． □

注意 3.54.

定理 3.52 は連続関数のグラフから決まる面積が定められることを示すのに使う (後期でやる).