微分積分学 A 演習問題　第 1 回

問題 1.1.
$\sqrt{3}$ は有理数ではないことを証明せよ.

問題 1.2.
自然数 n に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ を数学的帰納法で示せ. つぎに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$ を求めよ.

問題 1.3.
自然数 n に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を数学的帰納法で示せ. つぎに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$ を求めよ.

問題 1.4.
自然数 n に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ を数学的帰納法で示せ. つぎに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$ を求めよ.

問題 1.5.
次の文の間違いを指摘し, 下線部を修正して正しい文に書きかえよ.

(1) 「すべての学生が合格する」の否定は「<u>すべての学生は合格しない</u>」である.
(2) 「クラスに誕生日が同じ学生が少なくとも一組存在する」の否定は
「<u>クラスに誕生日が異なる学生が少なくとも一組存在する</u>」である. (注意: 「少なくとも一組存在しない」は日本語としては正しくない. 「存在しない」を使わずに書き換えよ)
(3) 「60 点以上ならば合格する」の否定は「<u>60 点未満ならば合格しない</u>」である.
(4) 「りんご かつ みかんが好き」の否定は「<u>りんご かつ みかんが好きではない</u>」である.

微分積分学 A 演習問題 第 2 回

問題 2.1 (提出課題)**.**
実数 x に対して, 次を示せ.

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t\,dt$$

問題 2.2 (提出課題)**.**
実数 x と自然数 n に対して, 次を示せ.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt$$

問題 2.3.
自然数 n と実数 x に対して, 次を示せ (ヒント: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ を使う).

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

問題 2.4.
自然数 n と実数 x に対して, 次を示せ (ヒント: $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ を使う).

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

問題 2.5.
自然数 n と正の実数 x に対して, 次を示せ.

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{x^n}$$

問題 2.6.
実数 x と自然数 n に対して次を示せ.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

問題 2.7.
実数 x と自然数 k に対して次を示せ (ヒント: 整数 k に対して

$$\cos(k\pi) = (-1)^k, \quad \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1}, \quad \sin(k\pi) = \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

が役に立つ. 問題 2.3, 2.4, 2.6 は認めてよい).

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\int_0^x (x-t)^{2k-1}\sin t\,dt,$$

問題 2.8.
実数 x と自然数 k に対して次を示せ (問題 2.7 と同じヒントを用いてよい).

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\int_0^x (x-t)^{2k}\sin t\,dt.$$

微分積分学 A 演習問題　第 3 回

問題 3.1 (提出課題)**.**
関数 $f(x)$ が区間 I において微分可能であるとき, 次が成り立つことを平均値の定理を用いて示せ.

(1) I でつねに $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は I で増加する.
(2) I でつねに $f'(x) < 0$ ならば, $f(x)$ は I で減少する.
(3) I でつねに $f'(x) = 0$ ならば, $f(x)$ は I で定数である.

問題 3.2 (提出課題)**.**
関数 $f(x)$ は閉区間 $a \le x \le b$ において連続, 開区間 $a < x < b$ において微分可能で, $f(a) = f(b)$ を仮定する. このときに

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.1}$$

をみたす $a < c < b$ が存在することを, Weierstrass の最大値定理を用いて示せ.

注意.
問題 3.2 は, $f(a) = f(b)$ の仮定をせずとも成り立つ.

問題 3.3.
問題 3.2 と同じ記号を使うとき, 平均値の定理をみたす $a < c < b$ をみつけよ (ヒント: つまり, (3.1) を c について解けということ).

(1) $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b > 0$.
(2) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b > 0$.

問題 3.4.
正の実数 $x > 0$ に対して, 次を示せ.

$$e^x \ge 1 + x$$

問題 3.5.
関数 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ の増減を調べ, グラフの概形を書け.

問題 3.6.
関数 $f(x) = e^{-x} \sin x \quad (0 \le x \le 2\pi)$ の増減を調べ, グラフの概形を書け.

問題 3.7.
Weierstarss の最大値定理は関数 $f(x)$ が**閉区間** $a \le x \le b$ 上**連続**であることが本質的である. 次をみたす関数 $f(x)$ を作って, **閉区間** $a \le x \le b$ 上**連続**の仮定をはずすとえ反例があることを確かめよ.

(1) 関数 $f(x)$ は $0 < x < 1$ 上連続であるが, 最大値, 最小値が存在しない (ヒント: $x = 0, 1$ なら最大値, 最小値になるのに... となる関数を考える)
(2) 関数 $f(x)$ は $0 \le x \le 1$ 上連続ではなく, 最大値, 最小値が存在しない (ヒント: グラフを書けばよいこととする. 不連続なところで最大値, 最小値になるのに... となる関数を考える).

微分積分学 A 演習問題　第 4 回

問題 4.1 (提出課題)**.**
　実数の和に関する性質, 積に関する性質, 和と積に関する性質 (分配法則), 順序に関する性質, 順序と和積に関する性質を述べよ.

問題 4.2 (提出課題)**.**
　$a \in \mathbb{R}$ の絶対値 $|a|$ の定義を述べよ.

問題 4.3 (提出課題)**.**
　実数の三角不等式を述べよ.

問題 4.4.
　$a, b \in \mathbb{R}$ に対して三角不等式に似た不等式

$$|a - b| \leq |a| - |b|$$

は成り立つだろうか？ 成り立つならば証明をし, 成り立たないなら反例をあげよ.

問題 4.5.
　$(-1) \times (-1) = 1$ となることを, 実数の性質から証明したい. 次の問いに答えよ.

(1) $a \in \mathbb{R}$ に対して $a0 = 0$ を示せ (ヒント: (S3) より $a(0 + 0) = a0$. これに (SP) を使うとどうなるか？).
(2) $a \in \mathbb{R}$ に対して, $(-1)a = -a$ を示せ (ヒント: $a + (-1)a = 0$ を示せばよい).
(3) $(-1)(-1) = 1$ を示せ (ヒント:$(-1)(1 + (-1)) = 0$ を使う).

問題 4.6.
　$a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, $a \leq b$, $c \leq 0$ ならば $ac \geq bc$ を示せ (ヒント: $-c \geq 0$ に (OP) を使い, そのあとに (OS) を 2 回使う).

問題 4.7 (アンサイクロペディア "1 = 2" より)**.**
　次の間違いを指摘せよ.
　$1 - 3 = 4 - 6$ だから 両辺に $\dfrac{9}{4}$ を加えると

$$1 - 3 + \frac{9}{4} = 4 - 6 + \frac{9}{4}$$

となる. 式を変形すると

$$1^2 - \frac{6}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2^2 - \frac{12}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

となる. 両辺を因数分解して

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$$

となるから, 両辺の平方根をとって

$$1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2}$$

となる. よって, 両辺に $\dfrac{3}{2}$ を加えると $1 = 2$ となる.

問題 4.8.
　$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $|a + b|^2$, $(|a| + |b|)^2$ を計算することにより, 三角不等式を証明せよ.

微分積分学 A 演習問題　第 5 回

問題 5.1 (提出課題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A が上に有界であることの定義を書け.
(2) 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の上限 $\alpha := \sup A$ を論理記号を用いて書け.
(3) 実数の連続性の公理を述べよ.
(4) Archimedes の原理を述べよ.

問題 5.2 (提出課題)**.**
$A = [0, 1)$ とする. $\max A$ が存在しないこと, $\min A = 0$ となることを証明せよ.

問題 5.3 (提出課題)**.**
$A = [0, 1)$ とする. $\sup A = 1$ となることを証明せよ. なお, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 5.4.
$A = (-2, 3)$ とする. $\sup A = 3$ となることを証明せよ. なお, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 5.5.
$A = (-2, 3)$ とする. $\inf A = -2$ となることを証明せよ. なお, 証明すべきことを書いてから証明を書くこと.

問題 5.6.
実数 a, b は $a < b$ をみたすとする. $I = (a, b)$ とするとき $\sup I$ を求め, その証明を与えよ.

問題 5.7.
実数 a, b は $a < b$ をみたすとする. $I = (a, b)$ とするとき $\inf I$ を求め, その証明を与えよ.

問題 5.8.
一般に数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

と書く. $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := 1 - \dfrac{1}{n}$ とおくとき, $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ を求めて, 証明を与えよ (ヒント: 講義の例のように, 中点を取るというアイデアはうまくいかない. Archimedes の原理を使う必要があるが, どのように記述すればよいか?).

定理 5.1 (有理数の稠密性)**.**
すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x < y$ ならば, ある $q \in \mathbb{Q}$ が存在して, $x < q < y$ とできる.

問題 5.9.
$A := \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ と定める. $\sup A = \sqrt{2}$ となることの証明を与えよ. なお, 証明には, 有理数の稠密性を用いる. このことにより, 有理数の部分集合の上限は一般に有理数にならないことがわかる.

微分積分学 A 演習問題　第 6 回

問題 6.1 (提出課題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束することの定義を書け.
(2) 収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が (正の) 無限大に発散することの定義を書け.

問題 6.2 (提出課題)**.**
$\dfrac{2n}{n+1} \to 2 \ (n \to \infty)$ が成り立つことの証明を書け.

問題 6.3.
a は自分の学生番号の 1 の位, b は自分の学生番号の 10 の位とする. 自然数 n に対して $a_n = \dfrac{3n-a}{2n+b}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ[1].

問題 6.4.
自然数 n に対して $a_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2}\right)\dfrac{1}{n^2}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 6.5.
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ となることを示そう (ε-N 論法を用いなくてよい).

(1) $x > 0$ とする. すべての $n \in \mathbb{N}$ について
$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$
が成り立つことを数学的帰納法で示せ.
(2) $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ に対して, $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ とおく. このとき $h_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$ を示せ (ヒント: $1 + h_n = \sqrt[n]{n}$ に (1) を使う).
(3) はさみうちの原理を認めて, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ となることを示せ.

問題 6.6.
実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = r^n$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを証明せよ (ε-N 論法を用いなくてよい). ただし, log を使わずに証明すること (ヒント: $r = \dfrac{1}{1+x}$ と書きかえて問題 6.5 の (1) の不等式を使う)

問題 6.7.
自然数 n に対して $a_n = -\dfrac{1}{n}, b_n = \dfrac{1}{n}$ とおく.

(1) すべての n について, $a_n < b_n$ であることを示せ.
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ. ただし, ε-N 論法を用いなくてよい.
(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < b_n$ であっても, 一般に $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ とはならないことを説明せよ.

[1]余力があれば, $a, b > 0$ の仮定のもとに証明を書いてみよ.

微分積分学A 演習問題　第7回

問題 7.1 (提出課題)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a+b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 7.2 (提出課題)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. また, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$, $|b_n| \leq M$ が成り立つとする[2]. このとき, 数列 $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ab に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 7.3.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a-b$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 7.4.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束したとする. このとき $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ を ε-N 論法を用いて証明せよ (ヒント: 三角不等式を用いる).

問題 7.5.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, $a \in \mathbb{R}$ に収束するとし, $a \neq 0$ を仮定する. また, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \geq \dfrac{|a|}{2}$ が成り立つとする[3]. このとき, 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $\dfrac{1}{a}$ に収束することを ε-N 論法を用いて示せ.

問題 7.6.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば, 有界である. つまり, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つことを示せ.

問題 7.7.
収束数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ が成り立つとする. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ となることを示せ.

問題 7.8.
収束数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ を仮定する. このとき, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_0$ ならば $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$ が成り立つことを示せ.

問題 7.9.
任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, 有理数列 $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して, $\lim_{k\to\infty} q_k = x$ とできることを示せ (ヒント: 有理数の稠密性を使う. $k \in \mathbb{N}$ に対して, $x < x + \dfrac{1}{k}$ である)

問題 7.10.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n > 0$ をみたすとする. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$ が同値であることを示せ.

---

[2]ただし, この仮定をする必要はない. 問題 7.6 も参照せよ.
[3]ただし, この仮定をする必要はない. 問題 7.8 も参照せよ.

微分積分学 A 演習問題　第 8 回

問題 8.1 (提出課題)**.**

次の各問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調増加であることの定義を書け.
(2) 有界な単調数列の収束性に関する定理を述べよ.
(3) 自然対数の底の定義を述べよ.
(4) Bolzano-Weierstrass の定理を述べよ.

問題 8.2 (提出課題)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界かつ単調増加となるならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

となることを示せ.

問題 8.3.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界かつ単調減少となるならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

となることを示せ.

問題 8.4.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに有界であるとする. このとき, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ がともに収束列となるような部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がとれることを証明せよ.

問題 8.5 (優収束定理)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とおく.

(1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加となることを示せ.
(2) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \le b_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k < \infty$ をみたすとする. このとき $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ.

問題 8.6.

次が正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a \in \mathbb{R}$ に収束し, ある正定数 $K > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < K$ と仮定する. このとき, $a < K$ が成り立つ.
(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ をみたすとする. このとき, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が成り立つ.

問題 8.7.

次をみたす数列の例を与えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.
(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.
(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するが $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は発散する.
(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが, $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = 0$ となる.
(5) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するが, 収束する値がそれぞれ異なる 4 つの収束部分列がとれる.

微分積分学 A 演習問題　第 9 回

問題 9.1 (提出課題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べよ.
(2) 実数の完備性に関する定理を述べよ.

問題 9.2 (提出課題)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であるとき, Cauchy 列であることを証明せよ.

問題 9.3.
$r, q, x \in \mathbb{R}$, $r \neq \pm 1$ に対して, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + q \\ \quad a_0 = x > 0 \end{cases}$$

を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を求めよ.
(2) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を調べることで, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束するための r に関する条件を求めよ. ただし, 縮小写像の原理は用いないこと.
(3) 縮小写像の原理を用いて, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための r に関する条件を求めよ.

問題 9.4.
数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して, ある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}|$$

をみたすとする. このとき, $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $m > n$ ならば

$$|a_m - a_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|a_1 - a_0|$$

となることを示せ.

問題 9.5.
$A > 1$, $x > 0$ に対して漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n + A} \\ \quad a_0 = x > 0 \end{cases}$$

を考える. 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束することを示せ.

問題 9.6.
関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

をみたすとする. このとき, 漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ \quad a_0 = x > 0 \end{cases}$$

により定まる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束することを示せ.

問題 9.7.
a, b, c, d は $c > 0$, $ad - bc \neq 0$ をみたすとする. このとき, $\dfrac{an+b}{cn+d} \to \dfrac{a}{c}$ $(n \to \infty)$ となることの ε-N 論法による証明を与えよ.

微分積分学 A 演習問題　第 10 回

問題 10.1 (提出課題)**.**

実数の部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $A \subset X$ に対して, f の A による像 $f(A)$ の定義を述べよ.
(2) f が単射であることの定義を述べよ.
(3) f が (広義) 単調増加であることの定義を述べよ.

問題 10.2 (提出課題)**.**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in (0,\infty))$$

で定める.

(1) 像 $f([-2,1])$ を求めよ.
(2) f は単射でないこと, g は単射となることを示せ.

問題 10.3 (提出課題)**.**

次を求めよ.

(1) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(2) $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)$
(3) $\arctan(1)$
(4) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)\right)$

問題 10.4.

Euler の公式と指数法則をみとめて, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, 次の加法定理を示せ.

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y.$$

問題 10.5.

$a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $a^x := \exp(x \log a)$ と定義する. 任意の $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $(ab)^x = a^x b^x$ となることを, 定義に基づいて示せ.

問題 10.6.

任意の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, ある奇関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とある偶関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して, $f = g + h$ と書けることを示せ (ヒント: 書けるとしたらどうなるか？).

問題 10.7.

指数法則と逆関数の性質を用いて, 「任意の $a, b > 0$ に対して $\log(ab) = \log a + \log b$ を示せ.

問題 10.8.

$a > 0$, $a \neq 1$ に対して, 底の変換公式

$$\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$$

を導け.

問題 10.9.

三角関数, 指数関数の Taylor-Maclaurin 展開

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

の x に形式的に $i\theta$ を代入することで, Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ を導け. ただし, i は虚数単位である.

微分積分学 **A** 演習問題　　<u>第 11 回</u>

問題 11.1 (提出課題)**.**
$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して, 次の定義を ε - δ 論法で述べよ.
(1) f が $x \to x_0$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.
(2) f が $x \to x_0$ のときに, ∞ に発散する.

問題 11.2 (提出課題)**.**
$\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 11.3 (提出課題)**.**
$\displaystyle\lim_{x\to 1} x^2$ を求め ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 11.4.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x}$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 11.5.
$\displaystyle\lim_{x\to -2} x^2$ を求め ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

以下の問題では $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して, $f(x) \to \alpha$, $g(x) \to \beta \quad (x \to x_0)$ とする.

問題 11.6.
$|f(x)| \to |\alpha| \quad (x \to x_0)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 11.7.
$(f(x) + g(x)) \to \alpha + \beta \quad (x \to x_0)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 11.8.
ある $M > 0$ が存在して, すべての $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ に対して $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ が成り立つと仮定する[4]. このとき, $(f(x)g(x)) \to \alpha\beta \quad (x \to x_0)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 11.9.
$(f(x)g(x)) \to \alpha\beta \quad (x \to x_0)$ となることの ε-δ 論法を用いた別証を与えたい.
(1) $(f(x) - \alpha)(g(x) - \beta) + \alpha(g(x) - \beta) + \beta(f(x) - \alpha)$ を展開せよ.
(2) (1) の計算をもとにして, $(f(x)g(x)) \to \alpha\beta \quad (x \to x_0)$ となることを示せ.

問題 11.10.
$\alpha > 0$ とする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ に対して
$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > \frac{\alpha}{2}$$
とできることを示せ.

---
[4] この仮定は実は必要ない.

微分積分学 A 演習問題　第 12 回

問題 12.1 (提出課題)**.**
次の定義を ε-δ 論法で述べよ.

(1) $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ に対して, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ が $x \to x_0 + 0$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.
(2) $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ に対して, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ が $x \to x_0 - 0$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x \to \infty$ のときに, $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.
(4) $I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in I$ で連続.

問題 12.2 (提出課題)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3 - 1$ で定義する. f が $x = 2$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 12.3 (提出課題)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3 - 1$ で定義する. f が $\mathbb{R}$ 上連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 12.4.
$\displaystyle\lim_{x\to -1+0} \frac{|x^2-1|}{x+1}$, $\displaystyle\lim_{x\to -1-0} \frac{|x^2-1|}{x+1}$ を求めよ.

問題 12.5.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3 + 2$ で定義する. f が $x = -1$ で連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 12.6.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3 + 2$ で定義する. f が $\mathbb{R}$ 上連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 12.7.
$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上連続ならば, $|f| : I \to \mathbb{R}$ も I 上連続であることを示せ. なお, 任意の $x \in I$ に対して, $|f|(x) := |f(x)|$ で定義する.

問題 12.8.
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

を示せ.

問題 12.9.
$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ が I 上連続であれば, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ も連続になることを示せ. なお, $x \in I$ に対して

$$\max\{f,g\}(x) := \max\{f(x),g(x)\}, \quad \min\{f,g\}(x) := \min\{f(x),g(x)\}$$

と定義する.

問題 12.10.
$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ が I 上連続であるとする. 「すべての $x \in I \cap \mathbb{Q}$ に対して $f(x) = g(x)$」が成り立つならば, 「すべての $x \in I$ に対して $f(x) = g(x)$」となることを示せ.

微分積分学 A 演習問題　　第 13 回

問題 13.1 (提出課題)**.**
次の定理の主張を述べよ.

(1) 中間値の定理
(2) Weierstrass の最大値定理

問題 13.2 (提出課題)**.**
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 上連続であるとき, $g \circ f$ も $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ.

問題 13.3.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であれば, $f + g$ も $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 13.4.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であれば, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して λf は $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 13.5.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続とするとき

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

となることを示せ.

問題 13.6.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^3 + x - 1$ とおく. このとき, $f(x) = 0$ となる実数解 $x \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ. どの範囲に実数解があるか？

問題 13.7.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続とする. $f(a)f(b) < 0$ ならば, $f(x) = 0$ となる実数解 $x \in [a, b]$ が存在することを示せ.

問題 13.8.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であれば, fg も $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続となることを示せ.

問題 13.9.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続とするとき, f の像 $f([a, b])$ が閉区間となることを示せ.

微分積分学 A 演習問題　第 14 回

問題 14.1 (提出課題)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) $I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上一様連続であることの定義を述べよ.
(2) Heine-Cantor の定理の主張を書け.

問題 14.2 (提出課題)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$ で定めたとき, f は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ.

問題 14.3.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := 3x + 2$ で定める. このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ.

問題 14.4.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \sqrt{x^2 + 1}$ で定める. このとき, f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを示せ (ヒント: $x, x' \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{|x + x'|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x'^2+1}} \leq \dfrac{|x| + |x'|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x'^2+1}} \leq 1$ となることを使う).

問題 14.5.
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が **Lipschitz** 連続, すなわち, ある定数 $L > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (a, b)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

をみたすとする. このとき, f は (a, b) 上一様連続であることを示せ.

問題 14.6.
$0 < \alpha < 1$ に対して $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が α 次 **Hölder** 連続, すなわち, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in (a, b)$ に対して

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|^{\alpha}$$

をみたすとする. このとき, f は (a, b) 上一様連続であることを示せ.

問題 14.7.
$f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in (0, 1)$ に対して $f(x) := \sin \dfrac{1}{x}$ とおく.

(1) $x \in (0, 1)$ に対して, 微分 $\dfrac{df}{dx}(x)$ を求めよ.
(2) 導関数 $\dfrac{df}{dx} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ は有界とならないことを示せ.

注意.
実は「開区間 I 上で定義された関数は, 導関数が I 上有界ならば I 上一様連続」が示せる. 対偶を取れば「I 上一様連続でなければ, 導関数は I 上有界でない」が得られる. 「導関数は有界でない」からといっても, 一様連続にならないことは示せないが (導関数は有界でないが Hölder 連続となることがある), 問題 14.7 では, f が $(0, 1)$ 上一様連続にならないことを実際に示すことができる.

微分積分学A 演習問題　<u>第15回</u>

問題 15.1.
$\dfrac{e^x}{1-2x}$ の Taylor-Maclaurin 展開を x^4 の項まで求めよ. すなわち

$$\frac{e^x}{1-2x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

としたときに, $a_0, \dots, a_4$ を求めよ.

問題 15.2.
次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x - \sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{(\cos x - 1)^3}$

問題 15.3.
自然数 n と実数 x に対して

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

を示せ.

問題 15.4.
$\log(1+x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を別の方法で形式的に求めよう.

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \cdots$$

を積分することにより

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

を示せ (級数が収束する x の範囲はとりあえず気にしなくてよい).

問題 15.5.
極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}$ を求めよ.

問題 15.6.
$a, b > 0$ とする. $I := (-a-1, b)$ とするとき $\sup I$, $\inf I$ を求め, その証明を与えよ.

問題 15.7.
次の集合の上限, 下限を求めよ.

(1) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

(2) $\left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < x + 1\right\}$

(3) $\{3n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$

(4) $\left\{\sin \dfrac{n\pi}{4} : n \in \mathbb{Z}\right\}$

(5) $\left\{\dfrac{1}{m} + (-1)^n \dfrac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

問題 15.8.
$a, b > 0$ とする. $\dfrac{2n + a + 1}{n + b} \to 2 \ (n \to \infty)$ となることの ε-N 論法による証明を与えよ.

問題 15.9.

自然数 n に対して $a_n := \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ となることの証明を ε-N 論法を用いて証明せよ. (ヒント: アイデアは問題 6.5)

問題 15.10.

次の各問いに答えよ.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x^2 - 2x$ で定める. $a, b > 0$ に対して $f((-a, b+1))$ を求めよ.
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \exp(-x^2)$ で定める. $a, b > 0$ に対して $f((-a-3, b+2])$ を求めよ.
(3) $\arctan(\tan(\pi))$ を求めよ.
(4) $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ.

問題 15.11.

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2x}{x}$
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$
(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$
(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$
(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{x^2 + x}{|x|}$
(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{x^2 + x}{|x|}$
(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x}$
(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x}$
(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x^2 + 5}$
(10) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 5}{x + 1}$
(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$
(12) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$
(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$
(14) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$
(15) $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$
(16) $a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(bx)}{\sin(ax)}$
(17) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}}$
(18) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{\cos x}{x}$
(19) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{\cos x}{x}$
(20) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x}$
(21) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{|x|}{x}$
(22) $a \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

問題 15.12.

$\displaystyle\lim_{x\to -1} \left((x+1)\sin\frac{1}{x+1}\right)$ を求め, ε-δ 論法を用いて証明を与えよ.

問題 15.13.

$f : (0,2) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $g : (0,2) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ に対して, $f(x) \to \alpha$, $g(x) \to \beta \quad (x \to 1)$ とする. $(f(x) - g(x)) \to \alpha - \beta \quad (x \to 1)$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 15.14.

$I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in I$ で右連続であるとは

$$f(x) \to f(x_0) \quad (x \to x_0 + 0)$$

と教科書に書かれている. ε-δ 論法による定義を書け.

問題 15.15.
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が **Lipschitz** 連続, すなわち, ある定数 $L>0$ が存在して, 任意の $x,x'\in(a,b)$ に対して
$$|f(x)-f(x')|\le L|x-x'|$$
をみたすとする. このとき, f は (a,b) 上連続であることを示せ.

問題 15.16.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して
$$f(x):=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$
で定める. f は $x=0$ で連続になるかどうかを説明せよ.

問題 15.17.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x^3+2x^2-3x$ で定義する. f が $\mathbb{R}$ 上連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 15.18.
$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して
$$f(x):=\frac{1}{x}$$
で定義する.

(1) f が $(0,1)$ 上連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.
(2) f の最大値が存在しないことを説明せよ.

問題 15.19.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=2x-3$ で定義する. f が $\mathbb{R}$ 上一様連続となることを ε-δ 論法を用いて示せ.

問題 15.20.
次の性質を持つ関数の例をあげよ (定義域をきちんと明記すること).

(1) $x=0$ で右連続だが, $x=0$ で連続でない.
(2) 有界だが最小値が存在しない.
(3) 連続だが一様連続でない.