

微分積分学 A 定期試験

2023年8月3日 第3時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい.

- (1) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow a$) の定義を述べなさい.
- (2) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
 $f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow a$) の定義を述べなさい.
- (3) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow a-0$) の定義を述べなさい.
- (4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow \infty$) の
定義を述べなさい.
- (5) $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で連続
であることの定義を ε - δ 論法で述べなさい.
- (6) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, Weierstrass の最大
値定理の主張を述べなさい.

(7) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 中間値の定理の主張を述べなさい.

(10) $\arccos\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$ を求めなさい.

(8) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が $[a, b]$ 上一様連続であることの定義を述べなさい.

(11) $y = \arctan x$ ($x \in \mathbb{R}$) のグラフの概形を書きなさい.

(9) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) := -x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) で定める. 像 $f([-3, 2])$ を求めなさい.

(12) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 2} - x)$ を求めなさい.

(13) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 5x - 2}$ を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$ を求めなさい.

(15) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} \sin(x^3)$ を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。

問題 2.

$x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$ となることを ε - δ 論法で示したい.

(1) $x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$ の ε - δ 論法を用いた定義を述べなさい.

(2) $x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$ を ε - δ 論法を用いて示しなさい.

問題 3.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) := 2x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) で定義する. f が $x = 1$ で連続となることを ε - δ 論法で示したい.

- (1) 示すべきこと (f が $x = 1$ で連続となることの ε - δ 論法を用いた定義) を述べなさい. なお答えに “ $f(x)$ そのもの” は使わないこと ($2x^2$ は使ってよい).
- (2) f が $x = 1$ で連続となることを ε - δ 論法で示しなさい.

問題 4.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を, $f(x) := \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) で定義する. f が \mathbb{R} 上一様連続であることを示したい.

- (1) 示すべきこと (f が \mathbb{R} 上一様連続であることの定義) を述べなさい. なお答えに “ $f(x)$ そのもの” は使わないこと ($\sin x$ は使ってよい).
- (2) f が \mathbb{R} 上一様連続であることを示しなさい. なお, $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $|\sin \theta| \leq |\theta|$ は断わりなしに使ってよい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。