

微分積分学 A 中間試験 (1・2限)

2023年6月15日 第2時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい. 答えのみを書くこと.

(1) Archimedes の公理を述べなさい.

(2) Cantor の公理を述べなさい.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する, すなわち $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) であることの定義を述べなさい.

(4) 集合 $S \subset \mathbb{R}$ が上に有界であることの定義を述べなさい.

(5) 空でない集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対して Weierstrass の定理を述べなさい. なお, 必要に応じて, $S_U := \{M \in \mathbb{R} : M \text{ は } S \text{ の上界}\}$ を用いてよい.

(6) α が集合 $S \subset \mathbb{R}$ の下限 $\alpha = \inf S$ であることの, ε 論法を用いた定義を述べなさい.

(7) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調減少であることの定義を述べなさい.

(10) 有界な数列に対する Bolzano-Weierstrass の定理を述べなさい.

(8) 単調増加な数列の収束性に関する定理を述べなさい.

(11) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べなさい.

(9) 自然対数の底 e の定義を述べなさい.

(12) 実数の完備性に関する定理を述べなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(13) $a_n = \frac{1}{n^3}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1))$
で定められた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限值を求めなさい.

(14) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
で定められた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限值を求めなさい.

(15) 漸化式 $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 初項 $a_0 = 5$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する. その極限值を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。

問題 2.

$\frac{2n+6}{4n+7} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow \infty$) となることを ε - N 論法で示したい.

- (1) $\frac{2n+6}{4n+7} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow \infty$) の ε - N 論法を用いた定義を述べなさい.
- (2) $\frac{2n+6}{4n+7} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow \infty$) を ε - N 論法を用いて示しなさい.

問題 3.

収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とおく.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$ となることの ε - N 論法による定義を述べなさい.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$ となることを ε - N 論法を用いて示しなさい.

問題 4.

$A := (6, 15)$ とおく. $\sup A = 15$ を示したい.

(1) $\sup A = 15$ の定義を述べなさい.

(2) $\sup A = 15$ を証明しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。