

# 微分積分学 A 中間試験 (3・4限)

2023年6月15日 第3時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

## 問題 1.

次の問いに答えなさい. 答えのみを書くこと.

(1) Archimedes の公理を述べなさい.

(2) Cantor の公理を述べなさい.

(3) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $a \in \mathbb{R}$  に収束する, すなわち  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であることの定義を述べなさい.

(4) 集合  $S \subset \mathbb{R}$  が上に有界であることの定義を述べなさい.

(5) 空でない集合  $S \subset \mathbb{R}$  に対して Weierstrass の定理を述べなさい. なお, 必要に応じて,  $S_U := \{M \in \mathbb{R} : M \text{ は } S \text{ の上界}\}$  を用いてよい.

(6)  $\alpha$  が集合  $S \subset \mathbb{R}$  の下限  $\alpha = \inf S$  であることの,  $\varepsilon$  論法を用いた定義を述べなさい.

(7) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が (広義) 単調減少であることの定義を述べなさい.

(10) 有界な数列に対する Bolzano-Weierstrass の定理を述べなさい.

(8) 単調増加な数列の収束性に関する定理を述べなさい.

(11) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が Cauchy 列であることの定義を述べなさい.

(9) 自然対数の底  $e$  の定義を述べなさい.

(12) 実数の完備性に関する定理を述べなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(13)  $a_n = \frac{1}{n^3}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1))$   
で定められた数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の極限值を求めなさい.

(14)  $a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$   
で定められた数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の極限值を求めなさい.

(15) 漸化式  $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 初項  $a_0 = 5$  で定められた数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  は収束する. その極限值を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。

問題 2.

$\frac{2n+6}{3n+7} \rightarrow \frac{2}{3}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となることを  $\varepsilon$ - $N$  論法で示したい.

- (1)  $\frac{2n+5}{3n+7} \rightarrow \frac{2}{3}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) の  $\varepsilon$ - $N$  論法を用いた定義を述べなさい.
- (2)  $\frac{2n+5}{3n+7} \rightarrow \frac{2}{3}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を  $\varepsilon$ - $N$  論法を用いて示しなさい.

## 問題 3.

収束する数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して,  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  とおく.

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$  となることの  $\varepsilon$ - $N$  論法による定義を述べなさい.
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$  となることを  $\varepsilon$ - $N$  論法を用いて示しなさい.

**問題 4.**

$A := (6, 15)$  とおく.  $\inf A = 6$  を示したい.

- (1)  $\inf A = 6$  の定義を述べなさい.
- (2)  $\inf A = 6$  を証明しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。