微分積分学 A 中間追試験

2023 年 6 月 29 日 第 5 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい. 答えのみを書くこと.

(1) Archimedes の公理を述べなさい.

(2) Cantor の公理を述べなさい.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する, すなわち $a_n \to a \quad (n \to \infty)$ であることの定義を述べなさい.

(4) 集合 $S \subset \mathbb{R}$ が下に有界であることの定義を述べなさい.

(5) 空でない集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対して Weierstrass の定理を述べなさい. なお, 必要に応じて, $S_U := \{M \in \mathbb{R} : M$ は S の上界 $\}$ を用いてよい.

(6) α が集合 $S \subset \mathbb{R}$ の下限 $\alpha = \inf S$ であることの定義を述べなさい.

学生番号　　　　　　名前

(7) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調減少であることの定義を述べなさい.

(8) 単調増加な数列の収束性に関する定理を述べなさい.

(9) 自然対数の底 e の定義を述べなさい.

(10) 有界な数列に対する Bolzano-Weierstrass の定理を述べなさい.

(11) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べなさい.

(12) 実数の完備性に関する定理を述べなさい.

(13) $a_n = \dfrac{1}{n^4}(1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2))$

で定められた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めなさい.

(14) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めなさい.

(15) 漸化式 $a_n = -\sqrt{12 + a_{n-1}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$，初項 $a_0 = 2$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する．その極限値を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 2.

$\dfrac{2n+9}{6n-5} \to \dfrac{1}{3} \quad (n \to \infty)$ となることを ε-N 論法で示したい.

(1) $\dfrac{2n+9}{6n-5} \to \dfrac{1}{3} \quad (n \to \infty)$ の ε-N 論法を用いた定義を述べなさい.

(2) $\dfrac{2n+9}{6n-5} \to \dfrac{1}{3} \quad (n \to \infty)$ を ε-N 論法を用いて示しなさい.

学生番号　　　　　　　名前

問題 3.

収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$a := \lim_{n\to\infty} a_n, b := \lim_{n\to\infty} b_n$ とおく.

(1) $\lim_{n\to\infty}(3a_n - 2b_n) = 3a - 2b$ となることの ε-N 論法による定義を述べなさい.

(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n - 2b_n) = 3a - 2b$ となることを ε-N 論法を用いて示しなさい.

問題 4.

$a < b$ をみたす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$A := (a, b)$ とおく．$\sup A = b$ を示したい.

(1) $\sup A = b$ の定義を述べなさい.

(2) $\sup A = b$ を証明しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．