微分積分学 AB 講義ノート (抜粋)

このプリントについて. このノートは微分積分学 AB の講義ノートにおける, 定義や定理を抜き出したものである. 定義や定理の意味, 証明はここでは述べていないため, このノートのみで勉強をするのは不十分である. 各自, ノートや参考文献等を元にして, 自分用のノートを作成して欲しい.

第 1 章

実数と数列の極限

1.1. イントロダクション -円周率を求めてみよう-

定義 1.1 (円周率)**.**
すべての円について, **円周率** π を

$$\pi := \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$$

で定める.

注意 1.1.
どの円についても, $\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ は等しい.

注意 1.2.
$A = B$ は「A と B が等しい」と「A を B で定める」の二つの意味がある. この違いを明確にするため,

$$\begin{aligned} A &= B \quad A \text{ と } B \text{ が等しい.} \\ A &:= B \quad A \text{ を } B \text{ で定める.} \end{aligned}$$

と書きわけることにする.

定理 1.1 (Archimedes)**.**
すべての自然数 n に対して

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{2}{S_n} + \frac{2}{s_n}$$
$$s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n$$

が成り立つ.

例 1.1.

$n=2$ のとき, s_2, S_2 を求める.

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{2}{\frac{1}{S_1}+\frac{1}{s_1}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{6}} \\ &= 2 \div (1 \div 4\sqrt{3} + 1 \div 6) \simeq 6.4310 \end{aligned}$$

$$s_2 = \sqrt{S_2 s_1} = \sqrt{6.4310 \times 6} \simeq 6.2117$$

1.2. 実数の構成

1.2.1. 集合論の基礎. 詳細は [Mzn] を参照せよ.

例 1.2 (よく使う集合)**.**

次の集合はどの教科書, 専門書でも標準的に使われる.

- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合
- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集合
- $\emptyset$: 元が一つもない集合 (**空集合**という)

例 1.3.

$$-3 \in \mathbb{Z}, \quad -3 \notin \mathbb{N}, \quad \frac{9}{4} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

例 1.4.

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 次の記号を用いる.

(1) $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: **開区間**という

(2) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: **閉区間**という.

例 1.5.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ となる.

1.2.2. Dedekind の切断. 詳細は小平 [Kod] を見よ.

定義 1.2 (有理数の切断).

$\mathbb{Q}$ の部分集合 A, B が**有理数の切断**であるとは, 次の 4 条件をみたすことをいう.

1. $A \cup B = \mathbb{Q}$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. すべての $a \in A$, $b \in B$ に対して $a < b$.
4. A に最大値はない. すなわち, すべての $a \in A$ に対して, $a' \in A$ が存在して, $a < a'$ が成り立つ.

このとき, $\langle A, B \rangle$ と書くことにする.

例 1.6.

$A_1 := \{a \in \mathbb{Q} : a < \frac{1}{2}\}$, $B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b \geq \frac{1}{2}\}$ とすると, $\langle A_1, B_1 \rangle$ は有理数の切断になる. このとき, B_1 に最小値 $\frac{1}{2}$ がある.

例 1.7.

$A_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a < 0$ または $a^2 < 2\}$, $B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b > 0$ かつ $b^2 \geq 2\}$ とすると, $\langle A_2, B_2 \rangle$ は有理数の切断になる. このとき, B_1 に最小値はない.

定義 1.3 (実数).

有理数の切断を実数という. 実数全体のなる集合を $\mathbb{R}$ で表す.

定義 1.4 (実数の等号, 大小).

$x, y \in \mathbb{R}$ に対して, 有理数の切断を用いて $x = \langle A, B \rangle$, $y = \langle A', B' \rangle$ と書く.
$x = y$ であるとは, $A = A'$ が成り立つことをいう.
$x \leq y$ であるとは, $A \subset A'$ が成り立つことをいう.
$x < y$ であるとは, 「$x \leq y$ かつ $x \neq y$」が成り立つことをいう.

定理 1.2 (有理数の稠密性).

すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x < y$ ならば, ある $q \in \mathbb{Q}$ が存在して, $x < q < y$ とできる.

例 1.8.

$x := \sqrt{2}$, $y := \sqrt{3}$ とするとき, $q := 1.6 \in \mathbb{Q}$ とすれば, $x < q < y$ とできる. 定理 1.2 は y が $\sqrt{2}$ より少しでも大きければ, いつでも $q \in \mathbb{Q}$ をみつけて $x < q < y$ とすることができることを主張している.

1.3. 実数の性質と上限. 下限

定義 1.5 (有界).

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A が**上に有界**であるとは「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべ

ての $a \in A$ に対して $a \leq M$ が成り立つ」ことをいう．このときの M を A の**上界**という．

A が**下に有界**であるとは「ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $a \geq m$ が成り立つ」ことをいう．このときの m を A の**下界**という．

A が**有界**であるとは, 「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $|a| \leq M$ が成り立つ」ことをいう．

例 1.9.

$A := (0, 1)$ は有界である．

例 1.10.

$B := (0, \infty)$ は上に有界ではない．

例 1.11.

$C := (-\infty, 3)$ は下に有界ではない．

定義 1.6.

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の**上界の集合** A_u と**下界の集合** A_l を

$$A_u := \{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$
$$A_l := \{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

と定める．

注意 1.3.

定義 1.6 の記号は一般的ではないので, 使うときは上界, 下界と明記すること．

例 1.12.

$A := [0, 1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ とするとき, A の上界の集合 A_u と下界の集合 A_l は

$$\begin{aligned} A_u &= \{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in [0,1) \text{ に対して } a \leq M\} \\ &= [1, \infty), \\ A_l &= \{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in [0,1) \text{ に対して } a \geq m\} \\ &= (-\infty, 0] \end{aligned}$$

となる．

定義 1.7 (最大, 最小)**.**

$A \subset \mathbb{R}$ に対して A の一番大きな数と一番小さな数をそれぞれ A の**最大値**, **最小値**といい, $\max A$, $\min A$ と書く．

例 1.13.
$A := [0,1)$ に対して, $\max A$ は存在しない. $\min A = 0$ となる.

定義 1.8 (上限, 下限)**.**
$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の**上限** $\sup A$, **下限** $\inf A$ を, A の上界の集合 A_u, 下界の集合 A_l に対して

$$\sup A := \min A_u = \min\{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$
$$\inf A := \min A_l = \min\{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

により定義する.

定理 1.3 (実数の連続性)**.**
上に有界な空でない実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は, 実数の上限 $\sup A$ が存在する.

注意 1.4.
定理 1.3 の「実数」を「有理数」に取りかえると成立しない. つまり, 定理 1.3 は実数と有理数の違いを表している.

定理 1.4 (Archimedes の原理)**.**
すべての $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varepsilon N_0 > 1$ が成り立つ.

例 1.14.
$A := [0,1)$ に対して, $\sup A = 1$ となる.

注意 1.5.
存在をしめすことは「成り立つものを見つける」と同じことである. 例 1.14 の証明では, $1-\varepsilon < a_0$ となる $a_0 \in A$ をみつければよい. $a_0 \in A$ より $0 \leq a_0 < 1$ をみたして, $1-\varepsilon < a_0$ となるものをみつければよい.

注意 1.6.
例 1.14 の証明で, $a_0 := 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ とすると $\varepsilon > 0$ がとてもおおきいときに $1 - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ となって, $a_0 \notin A$ となってしまうことがある. これを防ぐために, $a_0 := \max\{1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$ としてある.

1.4. 数列の極限

1.4.1. 数列の極限と基本的な性質.

定義 1.9 (数列の極限 (ε-N 論法))**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に**収束する**とは「任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して [$n \geq N_0$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$] が成り立つ」ことをいう. これを論理記号で書くと

$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

となる．数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が実数 a に収束するとき, $\lim_{n\to\infty} a_n := a$ とか

$$a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

と書く.

例 1.15.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ が成り立つ.

例 1.16.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 0$ が成り立つ.

注意 1.7.

例 1.15, 例 1.16 の証明で, $N_0 \in \mathbb{N}$ をみつける計算については, 証明では書かなくてよいが, 解析学で非常に重要な部分である.

例 1.17.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとき, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ が成り立つ.

定義 1.10 (数列の発散)**.**

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は**発散する**という.

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**(正の) 無限大に発散する**とは「任意の実数 $M \in \mathbb{R}$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_0$ ならば $a_n > M]$ が成り立つ」ことをいう．これを論理記号で書くと

$\forall M \in \mathbb{R}$ に対して $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0 \Longrightarrow a_n > M$

となる．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とか

$$a_n \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

と書くことがある.

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**負の無限大に発散する**とは「任意の実数 $m \in \mathbb{R}$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_0$ ならば $a_n < -m]$ が成り立つ」ことをいう．これを論理記号で書くと

$\forall m \in \mathbb{R}$ に対して $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0 \Longrightarrow a_n < -m$

となる．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とか

$$a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$$

と書くことがある.

注意 1.8.

定義 1.10 の M, m は実数全体でとらずに, $M > 0$, $m > 0$ におきかえてもよい.

定理 1.5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 次が成り立つ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 収束先はただ一つしかない. つまり, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ ならば, $a = b$ が成り立つ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 有界である. つまり, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ.

(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ が成り立ち, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ a, b に収束するならば, $a \leq b$ が成り立つ.

注意 1.9.

定理 1.5 の (3) の不等号 $\leq$ を $<$ にかえることはできない.

定理 1.6.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとき, 次が成り立つ.

(1) $a_n + b_n \to a + b$ $(n \to \infty)$.

(2) $a_n - b_n \to a - b$ $(n \to \infty)$.

(3) $a_n b_n \to ab$ $(n \to \infty)$.

(4) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ ならば $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ $(n \to \infty)$.

定理 1.7 (はさみうちの原理)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n \leq c_n$ をみたすとする. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ をみたすならば, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して, $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ が成り立つ.

1.4.2. 単調数列.

定義 1.11 (単調増加, 単調減少)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) **単調増加**であるとは, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことをいう. 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) **単調減少**であるとは, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \geq b_{n+1}$ が成り立つことをいう.

定理 1.8.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界かつ単調増加であれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ に収束する. すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ が成り立つ.

例 1.18.

数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とおき, **自然対数の底**という.

1.4.3. コンパクト性定理.

定義 1.12 (部分列)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から順番をかえずに一部を抜き出した数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**部分列**といい, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く.

例 1.19.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := (-1)^n$ とおいて, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. このとき.

$$\{a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots\} = \{-1, -1, -1, -1, \ldots\}$$

や

$$\{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots\} = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$$

は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列である.

定理 1.9 (Borzano-Weierstrass)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるとする. このとき, ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する.

1.4.4. Cauchy 列と実数の完備性.

定義 1.13 (Cauchy 列)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy 列**であるとは, 「任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $[n, m \geq N_0$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon]$ が成り立つ」

定理 1.10 (実数の完備性)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することと, Cauchy 列であることは同値である.

注意 1.10.

Borzano-Weierstrass の定理は実数の完備性に関する定理 1.10 を用いずに証明することができる.

1.4.5. 数列と漸化式.

例 1.20.

漸化式 $s_1 = 6$, $S_1 = 4\sqrt{3}$,

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{2}{S_n} + \frac{2}{s_n}$$
$$s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n$$

で定められる $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

注意 1.11.

例 1.20 の数列の収束先が円周率に等しいことを示すのは別の (難しい) 問題である.

定理 1.11 (縮小写像の原理)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, ある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}|$$

をみたすとする. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である.

第 2 章

関数と関数の極限

2.1. いろいろな関数

2.1.1. 関数とは何か.

定義 2.1 (関数)**.**
集合 X に対して, f が X 上の**関数**であるとは,「すべての $x \in X$ に対して, 実数 $f(x) \in \mathbb{R}$ がただ一つ定まる規則」のことをいう. このとき $f : X \to \mathbb{R}$ と書く.

例 2.1 (指数関数)**.**
$\mathbb{R}$ 上の関数 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp(x) := e^x$$

で定める.

例 2.2 (三角関数)**.**
$\sin$, $\cos$ は $\mathbb{R}$ 上の関数である. 単位円を用いて, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\sin x$ と $\cos x$ を定めるのであった. また, $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots \right\} \to \mathbb{R}$ を, すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots \right\}$ に対して

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

と定めるのであった.

注意 2.1.
例 2.1, 2.2 の定義は厳密な定義ではない.

2.1.2. 逆関数.

定義 2.2 (像)**.**
集合 X と $f : X \to \mathbb{R}$ に対して, f の**像** $f(X)$ を

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}$$

で定義する.

注意 2.2.
$f : X \to \mathbb{R}$ の像とは, あらっぽくいえば, $y = f(x)$ としたときの y の範囲のこと.

定義 2.3 (単射)**.**
集合 X 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**単射**であるとは「すべての $x_1, x_2 \in X$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」となることをいう.

注意 2.3.
$f : X \to \mathbb{R}$ が単射というのは, 対偶を取れば

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

だから, 異なる二点の行き先は常に違うということ.

例 2.3 (対数関数)**.**
exp は単射であり,

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

だから, exp の逆関数は $(0, \infty)$ 上で定義できる. これを対数関数といい, $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ と書くのであった.

$$\log(\exp(x)) = \log(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$\exp(\log(y)) = e^{\log y} = y \quad (y \in (0, \infty))$$

であったことに注意せよ.

例 2.4 (逆三角関数)**.**
sin は $\mathbb{R}$ 上で単射でないため, 逆関数を作るためには (定義域に) 制限をかける必要がある. sin は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上で単射な関数になり,

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin x : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = [-1, 1]$$

となるので, sin の逆関数は $[-1, 1]$ 上で定義できる. これを逆正弦関数といい, $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ と書く.

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$
$$\sin(\arcsin(y)) = y \quad (y \in [-1, 1])$$

となるが,

$$\arcsin(\sin(x)) \neq x \quad (x \in \mathbb{R})$$

となることに注意すること ($\mathbb{R}$ にかえてはいけない). 同様にして, 逆余弦関数 $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, 逆正接関数 $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を定義することができる.

2.1.3. 指数関数.

定理 2.1 (指数法則)**.**
次の指数法則が成り立つ.
(1) すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $e^x e^y = e^{x+y}$
(2) すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $(e^x)^y = e^{xy}$

系 2.1.
すべての $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $(ab)^x = a^x b^x$ となる.

定理 2.2 (Euler の公式)**.**
すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つ.

系 2.2.
すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

が成り立つ.

定理 2.3 (加法定理)**.**
すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

が成り立つ.

2.2. 関数の極限

定義 2.4 (関数の極限)**.**
開区間 $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ とする.

f が $x \to x_0$ のときに $A \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ とか $f(x) \to A$ $(x \to x_0)$ と書く. 論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

となる.

f が $x \to x_0$ のときに ∞ に発散するとは,「任意の $K > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) > K$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ とか $f(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$ と書く. 論理記号で書くと

$$\forall K > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > K$$

となる.

f が $x \to x_0$ のときに $-\infty$ に発散するとは,「任意の $K > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) < -K$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ とか $f(x) \to -\infty$ $(x \to x_0)$ と書く. 論理記号で書くと

$$\forall K > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -K$$

となる.

例 2.5.

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

例 2.6.

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

定理 2.4.

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ となることは「すべての数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対して[1], $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ならば $f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$ となること」と同値である.

定理 2.5.

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ とする.

(1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$

(2) $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = AB$

[1] すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ となるということ.

例 2.7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

定義 2.5 (片側極限)**.**

開区間 $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I$, 関数 $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ とする.

f が $x\to x_0+0$(または $x\downarrow x_0$) のときに $A\in\mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, すべての $x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して $0<x-x_0<\delta$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A$ とか $f(x)\to A$ $(x\to x_0+0)$ と書く ($x\to x_0+0$ のかわりに $x\downarrow x_0$ と書いてもよい). 論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon>0 \text{ に対して } \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall x\in I\setminus\{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0<x-x_0<\delta\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

となる.

f が $x\to x_0-0$(または $x\uparrow x_0$) のときに $A\in\mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, すべての $x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して $0<x_0-x<\delta$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A$ とか $f(x)\to A$ $(x\to x_0-0)$ と書く ($x\to x_0-0$ のかわりに $x\uparrow x_0$ と書いてもよい). 論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon>0 \text{ に対して } \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall x\in I\setminus\{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0<x_0-x<\delta\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

となる.

定義 2.6 (無限大での極限)**.**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とする.

f が $x\to\infty$ のときに $A\in\mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $K>0$ が存在して, すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $x>K$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x\to\infty}f(x)=A$ とか $f(x)\to A$ $(x\to\infty)$ と書く. 論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon>0 \text{ に対して } \exists K>0 \text{ s.t. } \forall x\in\mathbb{R} \text{ に対して } x>K\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

となる.

f が $x\to-\infty$ のときに $A\in\mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $K>0$ が存在して, すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $x<-K$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$ とか $f(x)\to A$ $(x\to-\infty)$ と書く. 論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon>0 \text{ に対して } \exists K>0 \text{ s.t. } \forall x\in\mathbb{R} \text{ に対して } x<-K\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

となる.

注意 2.4.

無限大に発散する場合にも同様にして定義ができる. 各自定義を書いてみよ.

2.3. 連続関数

2.3.1. 連続関数.

定義 2.7 (関数の連続)**.**

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ とする.

f が $x_0 \in I$ で**連続**であるとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I$ に対して $|x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. 論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \text{ に対して}$$
$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となる.

f が I **上連続**であるとは, 「任意の $x_0 \in I$ に対して, f は x_0 で連続」が成り立つことをいう. 論理記号でしっかり書くと

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \text{ に対して}$$
$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となる. x_0 が δ より先に決まることに注意せよ.

命題 2.1.

$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ とする. このとき, f が x_0 で連続であることと $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ が成り立つことは同値である.

例 2.8.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^3 - 1$ で定義する. このとき, f は $x = 2$ で連続となる.

注意 2.5.

例 2.8 について, 証明を書くだけなら講義ノートの 2. のみでよいが, δ をどうとったかがわかるように 1. も書いておくとよい.

例 2.9.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \left(x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ x = \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ は互いに素}\right) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ または } x = 0) \end{cases}$$

で定義する. f は $x=0$ で連続, $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ では不連続となる.

注意 2.6.
例 2.9 はグラフで書くことが難しいので, ε-δ 論法を使わないと, 証明するのは困難である.

2.3.2. 連続関数の性質.

定義 2.8 (関数の和とスカラー倍)**.**
$I \subset \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}, g : I \to \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ とする. このとき関数の**和** $f+g : I \to \mathbb{R}$, **スカラー倍** $\lambda f : I \to \mathbb{R}$, 積 $fg : I \to \mathbb{R}$ をそれぞれ任意の $x \in I$ に対して

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x)$$

で定義する.

定義 2.9 (関数の合成)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする. このとき関数の**合成** $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

で定義する.

定理 2.6.
簡単のため $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする.

(1) f,g が $x \in \mathbb{R}$ で連続ならば, すべての $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f+g$, λf, fg も x で連続である.
(2) f, g が $\mathbb{R}$ 上連続ならば, $g \circ f$ も $\mathbb{R}$ 上連続である.

2.4. 閉区間上の連続関数

2.4.1. 中間値の定理.

定理 2.7 (中間値の定理)**.**
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続で $f(a) < f(b)$ ならば「任意の $c \in [f(a), f(b)]$ に対して, ある $x_0 \in [a, b]$ が存在して $f(x_0) = c$」が成り立つ.

例 2.10.
$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ が連続で, 「すべての $x \in [0, 1]$ に対して, $0 \leq f(x) \leq 1$」が成り立つとする. このとき, 方程式 $x = f(x)$ は $[0, 1]$ 上に解を持つ.

注意 2.7.

$I=[a,b]$ が閉区間でないと, 証明で困るところは, $x_0\in I$ となるかどうか？である. 開区間でも似た定理は作れるが, 証明がかなり複雑になる.

2.4.2. Weierstrass の定理.

定理 2.8 (Weierstrass の定理)**.**

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続ならば関数 f の最大値, 最小値が存在する. すなわち,

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) := \sup\{f(x) : x\in[a,b]\} = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$
$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) := \inf\{f(x) : x\in[a,b]\} = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

が成り立つ.

2.4.3. 一様連続性.

例 2.11.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x^2$ で定めると f は $\mathbb{R}$ 上連続となる. $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを ε-δ 論法で証明するとき, $\delta>0$ の取り方は x_0 の取り方によって異なる.

例 2.12.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x$ で定めたとき, f は $\mathbb{R}$ 上連続となる. $x_0\in\mathbb{R}$ に対して, f が x_0 で連続となることを ε-δ 論法で証明するとき, $\delta>0$ の取り方は x_0 の取り方によらない.

定義 2.10 (一様連続)**.**

$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$ が I **上一様連続**であるとは, 「任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ が存在して, すべての $x,\ x'\in I$ に対して, $|x-x'|<\delta$ ならば $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$」が成り立つことをいう. 論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon>0 \text{ に対して } \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall x,x'\in I \text{ に対して}$$
$$|x-x'|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

となる.

例 2.13.

例 2.12 の関数 f は $\mathbb{R}$ 上一様連続となる.

注意 2.8.

一様連続の定義の $\delta>0$ をみつけるためには, 例 2.12 の計算が必要である.

定理 2.9.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続ならば, f は $[a,b]$ 上一様連続である.

注意 2.9.
定理 2.9 は閉区間であることが重要である. 開区間では成り立たない.

注意 2.10.
定理 2.9 は連続関数のグラフから決まる面積が定められることを示すのに使う (後期でやる).

2.5. 雑多な話題

2.5.1. 上極限, 下極限.

定義 2.11 (集積点)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $a \in \mathbb{R}$ が**集積点**であるとは, ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ となることである.

例 2.14.
数列 $\left\{\sin\left(\dfrac{n}{4}\pi\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ の集積点は $0, \pm 1, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である.

定義 2.12 (上極限, 下極限)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**上極限** $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ と**下極限** $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ をそれぞれ

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

で定義する.

注意 2.11.
上極限, 下極限をそれぞれ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ と書くこともある.

定理 2.10 (集積点と上極限, 下極限)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ最大, 最小の集積点となる.

定理 2.11.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

であれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である.

定義 2.13 (上半連続, 下半連続)**.**

$I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が**上半連続**であるとはすべての I 上の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} f(a_n) \leq f\left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)$$

が成り立つことをいう.

$f : I \to \infty$ が**下半連続**であるとはすべての I 上の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ に対して,

$$f\left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} f(a_n)$$

が成り立つことをいう.

2.5.2. 級数.

定義 2.14 (級数)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, **級数** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは, $N \in \mathbb{N}$ に対して, 第 N 部分和 $S_N := \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \cdots + a_N$ について, $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ が収束することをいう. このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$ と書く.

例 2.15.

$0 < r < 1$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ は収束して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$ となる.

定理 2.12 (Cauchy の判定条件)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することと, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $m \geq n \geq N_0$ ならば $|a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$」が成り立つことは同値である.

系 2.3.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば, $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ である.

注意 2.12.

系 2.3 の逆は成り立たない. 例えば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は収束しない.

2.5.3. 連続関数と集合論.

定理 2.13.

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in I$ で連続であることと,「任意の $f(x_0) \in J$ となる開区間 $J \subset \mathbb{R}$ に対して, $x_0 \in I_0$ となる, ある開区間 $I_0 \subset I$ が存在して, $I_0 \subset f^{-1}(J)$」は同値である.

第 3 章

高校の微分積分

3.1. 微分とその応用

3.1.1. 微分の計算手法.

例 3.1.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=\sqrt{x^2+1}$ で定めるとき, $f'(x)$ を三通りの方法で求める.

3.1.2. Taylor-Maclaurin 展開.

例 3.2.

e^x に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

となる.

例 3.3.

$\cos x$ に対して

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

となる.

例 3.4.

$\log(1+x)$ に対して

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

となる.

定理 3.1 (Taylor-Maclaurin 展開)**.**

無限回微分可能な $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ と $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{x^k}\left(f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)\right) \to 0 \quad (x\to 0)$$

が成り立つ.

例 3.5.

Taylor-Maclaurin 展開を用いると

$$\frac{\cos x - 1}{\log(1+x) - x} \to 1 \quad (x \to 0)$$

がわかる.

3.1.3. 凸関数と不等式.

例 3.6.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^2$ で定めると, f は凸関数である.

定理 3.2.

無限回微分可能な関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して, 次は同値である.

(1) f が凸関数.
(2) すべての $x, y \in I$ と $0 < \lambda < 1$ に対して,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

例 3.7 (相加, 相乗平均と Young の不等式)**.**

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := -\log x$ で定めると, f は凸関数である. この事実から $x, y > 0$ に対して, 相加相乗平均の不等式

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

と Young の不等式

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} x^q$$

が示せる. ただし, $1 < p < \infty$ は定数で, $\dfrac{1}{q} := 1 - \dfrac{1}{p}$ で定数 q を定めるものとする.

例 3.8.

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := x^3$ で定めると, f は凸関数である. この事実から $x, y > 0$ に対して,

$$(x+y)^3 \leq 4(x^3 + y^3)$$

を示せる.

3.2. 積分とその応用

3.2.1. 積分の計算手法.

例 3.9.
$n, m \in \mathbb{N}$ に対して, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx$ を二通りの方法で求める.

3.2.2. 常微分方程式.

例 3.10.
$\lambda = \lambda(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ として, 常微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t)x(t), & t > 0 \\ x(0) = a > 0 \end{cases}$$

を考える.

例 3.11.
非線形常微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t), & t > 0 \\ x(0) = a > 0 \end{cases}$$

を考える.

3.2.3. 区分求積法.

例 3.12.
$\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ を微分を用いずに求める.

3.2.4. 錐の体積.

第 4 章

Riemann 積分

この講義における Riemann 積分の理論展開は, 吹田・新保 [SuiShi] とは異なる. 笠原 [Kas], 小池 [Koi], 小林 [Kob] を参照せよ.

4.1. Riemann 積分の定義

定義 4.1 (分割)**.**
$\Delta := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ を $[a,b]$ の**分割**という.

定義 4.2 (Riemann 積分)**.**
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ にたいして

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) : \Delta = \{x_0, \ldots, x_n\} \text{ は } [a,b] \text{ の分割}\Big\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\Big\{\sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) : \Delta = \{x_0, \ldots, x_n\} \text{ は } [a,b] \text{ の分割}\Big\}$$

とおき, **Riemann 下積分**, **Riemann 上積分**という. $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ のとき, f は $[a,b]$ 上 **Riemann 積分可能**であるといい,

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

と定める.

定義 4.3 (分割の長さ)**.**
$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ に対して

$$|\Delta| := \max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$$

を分割 Δ の**長さ**という.

定理 4.1 (Darboux)**.**
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ について, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ に対して $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}),$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon > \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

とできる.

系 4.1 (区分求積法)**.**
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が **Riemann 積分可能**ならば

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

が成り立つ.

注意 4.1.
区分求積法は f が Riemann 積分可能でないと成立しない. 計算法はあとでやることにして, どのような関数が Riemann 積分可能か考える.

定義 4.4 (振動量)**.**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $A \subset [a,b]$ に対して,

$$\operatorname*{osc}_{x\in A} f(x) := \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x)$$

を A における f の**振動量**という.

命題 4.1.
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ について, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $[a,b]$ の分割 Δ が存在して

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

とできるならば, f は Riemann 積分可能である.

定理 4.2.
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続ならば f は Riemann 積分可能である.

定理 4.3.
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が有界で単調減少 (単調増加) ならば, f は Riemann 積分可能である.

例 4.1.
$\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ を区分求積法を用いて原始関数を用いずに (つまり, 微分の逆演算を計算することなく) 求める.

4.2. Riemann 積分の性質

定理 4.4 (区間加法性)**.**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < c < b$ に対して, f が $[a,c]$, $[c,b]$ 上 Riemann 積分可能ならば, f は $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能であり,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

が成り立つ.

定理 4.5.
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能であり, すべての $x \in [a,b]$ に対して $f(x) \leq g(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ.

定理 4.6.
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続であり, すべての $x \in [a,b]$ に対して, $f(x) \geq 0$ とする. このとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ ならば任意の $x \in [a,b]$ に対して, $f(x) = 0$ が成り立つ.

定義 4.5.

定理 4.7 (積分の線形性)**.**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能であるとする. このとき,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha f + \beta g$ は積分可能で

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ.

定理 4.8 (積分平均値定理)**.**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

(1) f が $[a, b]$ 上 Riemann 積分可能ならば, $\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \lambda \le \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ が存在して

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a)$$

が成り立つ.

(2) f が $[a, b]$ 上連続ならば, $c \in [a, b]$ が存在して

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

が成り立つ.

4.3. 不定積分

定義 4.6 (不定積分)**.**

有界で Riemann 積分可能な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $x \in [a, b]$ に対して

$$F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

で定義する. この関数 F を f の**不定積分**という.

注意 4.2.

上端と下端のない積分記号 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は**原始関数**と呼ぶのが正しい.

定理 4.9.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は有界で Riemann 積分可能とする. $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ を f の不定積分, すなわち

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad (x \in [a, b])$$

とすると, F は $[a, b]$ 上連続となる.

注意 4.3.

定理 4.9 の証明の区間加法性について, 正確には

$$\int_a^y f(\xi)\,d\xi - \int_a^x f(\xi)\,d\xi = \int_a^y f(\xi)\,d\xi + \int_x^a f(\xi)\,d\xi = \int_x^y f(\xi)\,d\xi$$

と式変形している. この変形は厳密には示していないこと ($\displaystyle\int_x^a f(\xi)\,d\xi$ は $x > a$ だから定義されていないとか定理 4.4 は $a < x$ だからそのまま用いることができないとか) を用いている. これらを厳密に示すことは, 面倒なだけなので認めて先に進めることにする. ただし, 積分の向きを考えることは有用なので, 次の定義を与えることにする.

定義 4.7.

有界で Riemann 積分可能な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

と定義する.

定理 4.10 (微分積分学の基本定理 その 1)**.**

連続な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ を f の不定積分, すなわち

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad (x \in [a, b])$$

とする. このとき, すべての $x \in (a, b)$ に対して

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

となる.

注意 4.4.

定理 4.10 で, 結論の極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ は F の x での微分である. つまり, 連続関数の不定積分は (端点を除いて) 微分可能となる.

第 5 章

微分

5.1. 微分とその性質

定義 5.1 (微分)**.**
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ と $x_0\in(a,b)$ に対して, f が $x=x_0$ で**微分可能**であるとは,
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
が存在することである. このとき, $f'(x_0):=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ と書き, f の x_0 における**微分係数**という.

f が (a,b) **上微分可能**であるとは, すべての $x\in(a,b)$ に対して, f が x で微分可能であることをいう. このとき, $x\in(a,b)$ に対して
$$\frac{df}{dx}(x):=f'(x)$$
と書く. このようにして定めた関数 $\dfrac{df}{dx}:(a,b)\to\mathbb{R}$ を f の**導関数**という.

以下,
$$C(a,b):=\{f:(a,b)\to\mathbb{R},\ f\text{ は }(a,b)\text{ 上連続}\}$$
$$C^1(a,b):=\left\{f:(a,b)\to\mathbb{R},\ f\text{ は }(a,b)\text{ 上微分可能},\ \frac{df}{dx}\text{は }(a,b)\text{ 上連続}\right\}$$
と書くことにする.

5.1.1. 微分と接線.

定理 5.1.
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ と $x_0\in(a,b)$ に対して, f が $x=x_0$ で微分可能であることと,「ある定数 $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在して,
$$f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+R(x)(x-x_0)$$
と書いたときに $R(x)\to 0\ (x\to x_0)$」は同値である. このとき, $\lambda=f'(x_0)$ となる.

系 5.1.
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が $x_0\in(a,b)$ で微分可能ならば, x_0 で連続になる.

5.1.2. 微分の公式.

定理 5.2.
$f,g\in C^1(a,b)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ に対して, 次が成り立つ.
(1) $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
(2) $(\lambda f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$
(3) (積の微分公式) $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

注意 5.1.
定理 5.2 の (1), (2) より, 微分は線形である.

定理 5.3 (合成関数の微分公式, chain role)**.**
$f=f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g=g(y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 上微分可能ならば $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\frac{d(g\circ f)}{dx}(x)=\frac{dg}{dy}(f(x))\frac{df}{dx}(x)$$

が成り立つ.

注意 5.2.
定理 5.3 は $y=f(x)$, $z=g(y)$ と書くと, 形式的に

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

と書ける.

例 5.1.
$x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

定理 5.4 (逆関数の微分公式)**.**
$f:(a,b)\to(c,d)$ は全単射で微分可能であるとする. $x_0\in(a,b)$ にたいして $f'(x_0)\neq 0$ ならば $y_0=f(x_0)$ としたときに, f の逆関数 f^{-1} は y_0 で微分可能であり,

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

となる.

注意 5.3.
定理 5.4 は $y = f(x)$ と書いたときに, 形式的に

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

と書ける.

定理 5.5 (パラメータ微分)**.**
$\phi, \psi \in C^1(a,b)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ とする. ϕ は狭義単調増加で $x_0 = \phi(t_0)$ とすると

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\phi'(t_0)}$$

となる.

注意 5.4.
定理 5.5 は, 形式的に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

と書ける.

5.2. 平均値定理

以下

$$C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ は } [a,b] \text{ 上連続 }\}$$

と書く.

定理 5.6 (Rolle の定理)**.**
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ が $f(a) = f(b)$ ならば, ある $\xi \in (a,b)$ が存在して, $f'(\xi) = 0$ が成り立つ.

定理 5.7 (微分平均値定理)**.**
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ に対して, ある $\xi \in (a,b)$ が存在して,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

が成り立つ.

5.2.1. 微積分の基本定理.

定理 5.8 (微積分の基本定理 その 2)**.**

$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$, $\frac{df}{dx} \in C([a,b])$ に対して

$$\int_b^a f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

が成り立つ.

5.2.2. 平均値の定理の応用.

系 5.2.

$f \in C^1(a,b)$ に対して,「f が (a,b) 上単調増加」であることと「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) \geq 0$」は同値となる.

系 5.3.

$f \in C^1(a,b)$ に対して,「f が (a,b) 上定数関数, すなわち, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in (a,b)$ に対して $f(x) = c$」であることと「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$」は同値となる.

5.2.3. 極大・極小.

定義 5.2 (極大・極小)**.**

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ とする. f が $x = c$ で**極大** (**極小**) であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a,b)$ に対して

$$0 < |x - c| < \delta \text{ ならば } f(x) < f(c) \quad (f(x) > f(c))$$

が成り立つことをいう.

定理 5.9.

$f \in C^1(a,b)$, $c \in (a,b)$ に対し, f が $x = c$ で極大 (極小) ならば $f'(c) = 0$ となる.

定理 5.10 (極大・極小の判定)**.**

$f \in C^1(a,b)$, $c \in (a,b)$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a,b)$ に対して

$$c - \delta < x < c \text{ ならば } f'(x) > 0$$
$$c < x < c + \delta \text{ ならば } f'(x) < 0$$

が成り立つとする. このとき, f は $x = c$ で極大となる.

f が $x = c$ で極大 (極小) ならば $f'(c) = 0$ となる.

5.3. 高階導関数と Taylor の定理

定義 5.3.

$f \in C^1(a,b)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ が $x_0 \in (a,b)$ で微分可能なとき,

$$f''(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{df}{dx}(x_0+h) - \frac{df}{dx}(x_0)}{h}$$

とかく. $f''(x_0)$ を f の x_0 における**第 2 次微分係数**という. また, $\dfrac{df}{dx}$ が (a,b) 上微分可能なとき, $x \in (a,b)$ に対し

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) := f''(x)$$

と書く. $\dfrac{d^2 f}{dx^2} : (a,b) \to \mathbb{R}$ を f の **2 階導関数**という.

3 次微分係数, 3 階導関数なども同様にして定義する. 以下, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C^n(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R},\ f \text{ は } (a,b) \text{ 上 } n \text{ 回微分可能}, \ \frac{d^n f}{dx^n} \text{ は } (a,b) \text{ 上連続} \right\}$$

と書く.

例 5.2.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $\dfrac{d^n(\arcsin)}{dx^n}(0)$ を求める.

定理 5.11 (Taylor の定理)**.**

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(a,b)$ は $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\dfrac{d^k f}{dx^k} \in C[a,b]$ をみたすとする. このとき

$$f(b) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^n + R_n$$

と書いたときに, ある $a < \theta < b$ が存在して

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(b-a)^n$$

が成り立つ.

注意 5.5.

定理 5.11 で $n = 1$ とすると, $a < \theta < b$ が存在して

$$f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)$$

となるが, これは平均値の定理 (定理 5.7) である.

定理 5.12 (Taylor-Maclaurin 展開)**.**
$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(-1,1)$, $x \in (-1,1)$ に対して

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n$$

と書くと

$$\frac{R_n}{x^n} \to 0 \quad (x \to 0)$$

が成り立つ.

例 5.3.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ となる.

5.4. de l'Hospital の定理

例 5.4.
$f, g \in C^1(-1,1)$ が, $f(0) = g(0) = 0$ かつ $g'(0) \neq 0$ とする. このとき

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理 5.13 (de l'Hospital の定理)**.**
$a \in \mathbb{R}$ に対し, $f, g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ とする.

(1) $f(x), g(x) \to 0$ $(x \to a)$ であり $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.
(2) $f(x), g(x) \to \infty$ $(x \to a)$ であり $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

標語的にいうと, $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形ならば,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ.

例 5.5.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ となることを de l'Hospital の定理を用いて示す.

注意 5.6.
例 5.5 で

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{0}$$

としてはいけない. de l'Hospital の定理は極限が**不定形のときにしか使ってはいけない.**

5.5. 凸関数

定義 5.4 (凸関数)**.**
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が**凸関数**であるとは, 任意の $x,y\in[a,b]$ と $0<\lambda<1$ に対して

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

が成り立つことをいう.

定理 5.14.
$f\in C([a,b])\cap C^1(a,b)$ とする. このとき, f が $[a,b]$ 上凸関数であることと $\dfrac{df}{dx}$ が (a,b) 上単調増加であることは同値である.

系 5.4.
$f\in C^2(a,b)$ が $\dfrac{d^2f}{dx^2}\geq0$ をみたすならば, f は $[a,b]$ 上凸関数である.

第 6 章

広義積分

6.1. 広義積分の例

6.1.1. 非有界な関数の積分.

例 6.1.

$f:(0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$f(x):=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad (x\in(0,1])$$

で定義する．このときに $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ をどう定めるのがよいだろうか？

定義 6.1 (広義積分)**.**

$f:(a,b]\to\mathbb{R}$ は $(a,b]$ 上連続とする．このとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

で定義する． この積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)$ は**広義積分**といい，極限が存在するときは, $\displaystyle\int_a^b f(x)$ は**収束する**という．極限が存在しないときは, $\displaystyle\int_a^b f(x)$ は**発散する**という．

例 6.2.

$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ を求める．

例 6.3.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ は発散する．

6.1.2. 無限区間の積分.

例 6.4.

$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{x^2} \quad (x \in [1, \infty))$$

で定義する．このときに $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ をどう定めるのがよいだろうか？

定義 6.2 (広義積分)**.**

$f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ は $[a, \infty)$ 上連続とする．このとき,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

で定義する． この積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)$ は**広義積分**といい, 極限が存在するときは, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)$ は**収束する**という．極限が存在しないときは, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)$ は**発散する**という．

定理 6.1.

$\alpha > 0$ とすると, 次が成り立つ

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} < \infty & (0 < \alpha < 1) \\ \infty & (\alpha \geq 1) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} < \infty & (\alpha > 1) \\ \infty & (0 < \alpha \leq 1) \end{cases}$

例 6.5.

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ は収束する．

注意 6.1.

実は

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

となることが知られている．この広義積分は偏差値など確率・統計, 偏微分方程式などいろいろなことに関係のある積分である．

6.2. 絶対収束と条件収束

例 6.6.

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in[0,\infty)$ に対して

$$f(x):=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x>0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

とおく．このとき $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束するが, $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ は発散する．

定義 6.3 (絶対収束, 条件収束)**.**

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ が収束するとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は**絶対収束**するという．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束するが, 絶対収束しないとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は**条件収束**するという．

定理 6.2.

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．このとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束するならば, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束する．

定理 6.3.

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．$\lambda>1$ に対して, $K>0$ が存在して, すべての $x\in[0,\infty)$ に対して, $x^\lambda|f(x)|\le K$ が成り立つと仮定する．このとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束する．

系 6.1.

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．ある $\lambda>1$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\lambda f(x)$ が存在するならば, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束する．

例 6.7.

$s>0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束する (絶対収束する)．

定義 6.4 (Γ-関数)**.**
$s > 0$ に対して
$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx$$
と定義する. $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を **Γ-関数**という.

命題 6.1.
Γ-関数について, 次が成り立つ.

(1) $\Gamma(1) = 1$;
(2) $s > 0$ に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

参考文献

[Iid] 飯高 茂, 微積分と集合 そのまま使える答えの書き方, 講談社, 1999.
[Uch1] 内田 伏一, 集合と位相, 裳華房, 1986.
[Uch2] 内田 伏一, 位相入門, 裳華房, 1997.
[Kas] 笠原 晧司, 微分積分学, サイエンス社, 1974.
[Kur] 黒田 成俊, 微分積分, 共立出版, 2002.
[Koi] 小池 茂昭, 微分積分, 数学書房, 2010.
[Kod] 小平 邦彦, 軽装版 解析入門 I, 岩波書店, 2003.
[Kob] 小林 昭七, 微分積分読本 1 変数, 裳華房, 2000.
[SuiShi] 吹田 信之, 新保 経彦理工系の微分積分, 学術図書, 1996.
[Tak] 高木 貞治, 定本 解析概論, 岩波書店, 2010.
[Mzn] 水野 将司, 数学入門 AB 集合論と論理学, 2014 年度講義ノート.
[HaiWan1] E. Hainar, G. Wanner, 蟹江幸博 訳, 解析教程 (上), 丸善, 2006.
[HaiWan2] E. Hainar, G. Wanner, 蟹江幸博 訳, 解析教程 (下), 丸善, 2006.
[Ste] Ian Stewart, 芹沢 正三 (翻訳), 現代数学の考え方, 筑摩書房, 2012.