第3章 高校の微分積分

§3.1 微分とその応用

例3.1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対し $f(x):=\sqrt{x^2+1}$ で定める。$f'(x)$ を求める。

1. $g(x):=x^2+1$, $h(y)=\sqrt{y}$ とすると $f=h\circ g$ だから

$$f'(x)=h'(g(x))g'(x) \quad \text{(合成関数微分)}$$
$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

2. (対数微分) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ に $\log$ をとると

$$\log f(x)=\frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

両辺 x で微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}.$$

$$\therefore f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

3. $(f(x))^2=x^2+1$ より x で微分すると

$$2f(x)f'(x)=2x$$

$$\therefore f'(x)=\frac{x}{f(x)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

∴ 微分するにもやり方はいろいろある ☒

〈Taylor-Maclaurin展開〉

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \quad (*)$$

とかけたとして $a_0, a_1, a_2, \cdots$ を求めよう。

$(*)$ に $x=0$ を代入すると $\boxed{a_0 = f(0)}$ となる。

$(*)$ を x で微分すると

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots \quad (**)$$

となるから $(**)$ に $x=0$ を代入して $\boxed{a_1 = f'(0)}$ となる。

$(**)$ を x で微分すると

$$f''(x) = 2a_2 + 3\times 2 a_3 x + 4\times 3\, a_4 x^2 + \cdots \quad (***)$$

となるから $(***)$ に $x=0$ を代入して $\boxed{a_2 = \frac{f''(0)}{2}}$ となる。

$(***)$ を x で微分すると

$$f'''(0) = 3!\, a_3 + (4\times 3\times 2)\, a_4 x + \cdots \quad (****)$$

となるから $(****)$ に $x=0$ を代入して $\boxed{a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}}$ となる。

よって

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

と推測できる。

例3.2

e^x に対して $(e^x)^{(n)} = \frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$ より

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

となる。 ▨

例3.3

$\cos x$ に対して

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x & n=1,5,9,13\cdots \\ -\cos x & n=2,6,10,14\cdots \\ \sin x & n=3,7,11,15\cdots \\ \cos x & n=4,8,12,16\cdots \end{cases}$$

より

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

となる。 ☒

例3.4

$\log x$ に対して

$$(\log(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

より

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

となる。 ☒

この例の $\cdots$ は どこまで正しいのだろうか？

定理3.1 (Taylor-Maclaurin展開)

無限回微分可能な $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ と $k\in\mathbb{N}$ に対し

$$\frac{1}{x^k}\left(f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)\right) \to 0 \quad (x \to 0)$$

が成り立つ。 ☒

Taylor-Maclaurin展開を用いると、極限が求められるときがある。

例3.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\log(1+x)-x}$$ を求めてみる.

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+R_1(x)$$
$$\log(1+x)= x-\frac{1}{2}x^2+R_2(x)$$
として $R_1(x)$, $R_2(x)$ を定めると, 定理3.1より
$$\frac{R_1(x)}{x^2},\quad \frac{R_2(x)}{x^2}\to 0 \quad (x\to 0)$$
となる. よって
$$\frac{\cos x-1}{\log(1+x)-x} = \frac{-\frac{1}{2}x^2+R_1(x)}{-\frac{1}{2}x^2+R_2(x)}$$
$$= \frac{1-\frac{2R_1(x)}{x^2}}{1-\frac{2R_2(x)}{x^2}} \to 1 \quad (x\to 0)$$
がわかる. ☑

〈凸関数と不等式〉

$I:=(a,b)\subset\mathbb{R}$ に対し, $f:I\to\mathbb{R}$ が凸関数であるとは, $\forall x\in I$ に対して $f''(x)\geq 0$ となることであった.

例3.6

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対し $f(x):=x^2$ で定めると, f は凸関数である. ☑

凸関数はグラフでいうとどんな性質なのか?

定理3.2

$f: I \to \mathbb{R}$ は無限回微分可能とする。このとき、次は同値

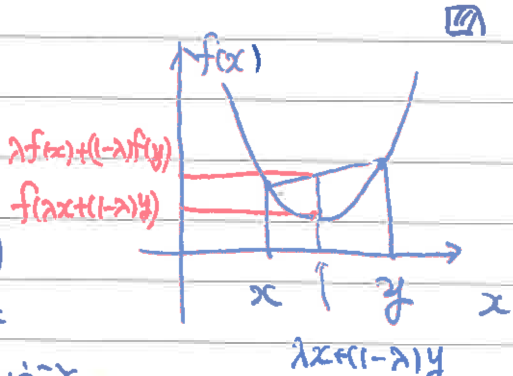
(1) f が凸関数

(2) $\forall x, y \in I$, $0 < \forall \lambda < 1$ に対して

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

図

定理3.2の(2)が主張していることは、右図のように、グラフ上の2点 $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ をむすんだ線分が、常にグラフの上側にあるということ。



例3.7 (相加,相乗平均とYoungの不等式)

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in(0,\infty)$ に対して $f(x) := -\log x$ で定めると $\forall x\in(0,\infty)$ に対して $f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$ となるから凸関数である。よって $1<p<\infty$ に対し、$\lambda=\frac{1}{p}$ として定理3.2を用いると $\forall x, y>0$ に対して

$$-\log\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)y\right) \le -\frac{1}{p}\log x-\left(1-\frac{1}{p}\right)\log y$$

となる。$\frac{1}{q} := 1-\frac{1}{p}$ とおき、両辺 exp をとると

$$\exp\left(\frac{1}{p}\log x+\frac{1}{q}\log y\right) \le \exp\left(\log\left(\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y\right)\right)$$

より

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \quad -(*)$$

が得られる。$p=2$とすれば$q=2$となり相加相乗平均の不等式

$$\sqrt{xy} \leqq \frac{x+y}{2}$$

が得られる。また $a, b \geqq 0$ に対して
$(*)$で $x = a^p$, $y = b^q$ とすれば

$$ab \leqq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad -(**)$$

が得られる。$(**)$をYoungの不等式という ∎

例3.8

$f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $\forall x \in [0, \infty)$ に対して
$f(x) := x^3$ で定めると、fは凸関数で
ある(各自)。よって $\forall a, b \geqq 0$ に対して

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$$

だから

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqq \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}b^3$$

となり

$$(a+b)^3 \leqq 4(a^3 + b^3)$$

がわかる。 ∎

§3.2 積分とその応用

例3.9

$m,n\in\mathbb{N}$に対し $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx$ を求める.

1. 和積公式より

$$\cos(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left(\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)\right)$$

より

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m+n)x)\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2(m+n)}\left[\sin((m+n)x)\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)x)\,dx$$
$$=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi & m=n.\end{cases}\quad(\text{各自})$$

2. $\cos(mx)=\frac{1}{2}(e^{imx}+e^{-imx})$

$\cos(nx)=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx})$

より

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(m+n)x}+e^{i(m-n)x}+e^{i(n-m)x}+e^{-i(n+m)x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4i(m+n)}\left[e^{i(m+n)x}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{4i(m+n)}\left[e^{-i(m+n)x}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(m-n)x}+e^{-i(n-m)x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(m-n)x}+e^{-i(n-m)x}\right)dx\quad(\because \text{Euler の公式})$$
$$=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi & m=n\end{cases}\quad(\text{各自})$$

〈常微分方程式〉

$x = x(t)$ として常微分方程式

$$(*)\quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t))g(t) & t > 0 \\ x(0) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

を考える。$f(x)$ が 0 になるかはとりあえず気にしないことにして t を τ にとりかえて

$$\frac{x'(\tau)}{f(x(\tau))} = g(\tau)$$

とする。両辺 $0 \leq \tau \leq t$ で積分すると

$$\int_0^t \frac{x'(\tau)}{f(x(\tau))} d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad -(**)$$

となる。左辺で $\xi = x(\tau)$ と変数変換すると

$$\begin{array}{c|c} \tau & 0 \to t \\ \xi & x(0) \to x(t) \end{array}, \quad d\xi = x'(\tau) d\tau$$

で $x(0) = a$ より

$$((**)\text{の左辺}) = \int_a^{x(t)} \frac{1}{f(\xi)} d\xi$$

となり、この積分が求められれば $(*)$ の解が求められる。

例3.10

$\lambda = \lambda(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ として

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t)x(t), & t > 0 \\ x(0) = a > 0 \end{cases}$$

を考える。

$$\frac{x'(\tau)}{x(\tau)} = \lambda(\tau)$$

より $0 \leq \tau \leq t$ で積分すると

$$\int_0^t \frac{x'(\tau)}{x(\tau)} d\tau = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau .$$

$$(\text{左辺}) = \int_a^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi} = \log|x(t)| - \log|a|$$

より

$$\log|x(t)| = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau + \log a .$$

となる。従って

$$|x(t)| = \exp\left(\int_0^t \lambda(\tau) d\tau + \log a\right)$$
$$= a \cdot \exp\left(\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right)$$

となる。$-x(t) = a\exp\left(\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right)$ とすると $t \to 0$ として $-x(0) = a$ となり初期条件をみたさない。

$$\therefore x(t) = a\exp\left(\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right).$$

例3.11

非線形方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x'(t) = x^2(t), & t > 0 \\ x(0) = a > 0 \end{cases}$$

を考える。

$$\frac{x'(\tau)}{x^2(\tau)} = 1$$

より $0 \leq \tau \leq t$ で積分すると

$$\int_0^t \frac{x'(\tau)}{x(\tau)}d\tau = \int_0^t d\tau = t.$$

$$(\text{左辺}) = \int_a^{x(t)} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{a}$$

より

$$-\frac{1}{x(t)} = t - \frac{1}{a}$$

だから

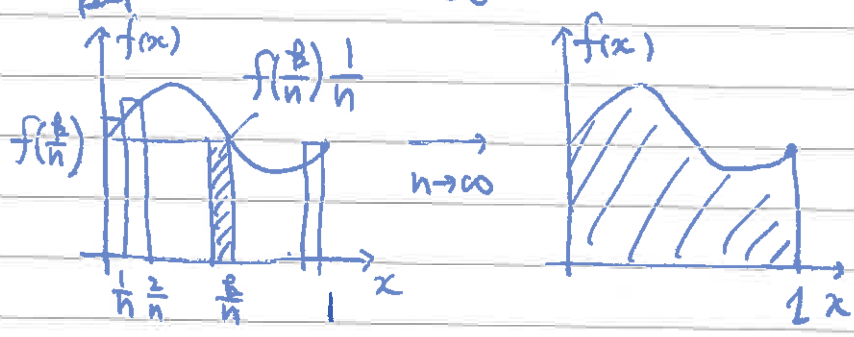
$$x(t) = \frac{a}{1-at} \quad \text{—} (**)$$

がわかる。$t=\frac{1}{a}$ で $(**)$ の右辺は ∞ になる。このとき、$(*)$ の解は $T=\frac{1}{a}$ で爆発するという。

〈区分求積法〉

$f:[0.1] \to \mathbb{R}$ に対し

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx \quad (n\to\infty)$$



$f(x) \geq 0$ のとき、$\int_0^1 f(x)dx$ は $[0.1]$ 上のグラフの下側の面積

例3.12

$\int_0^1 x\,dx$ を微分を用いずに求める.

右図より

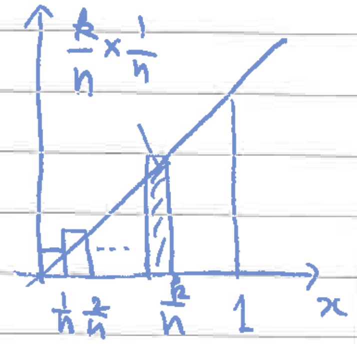
$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} n(n+1) \right)$

$\to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$

より $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ となる. 答



〈錐の体積〉

右図のような底面積 S, 高さ h の錐の体積 V を求める.

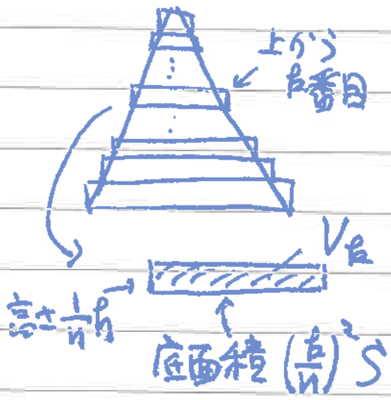
アイデア1

h を右図のように n 等分する.

上から k 番目のブロックの体積 V_k は 相似比 $h : \frac{k}{n}h = 1 : \frac{k}{n}$ に注意して

$V_k = \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 S \right) \left(\frac{1}{n} h \right)$

$= \frac{k^2}{n^3} S h$.



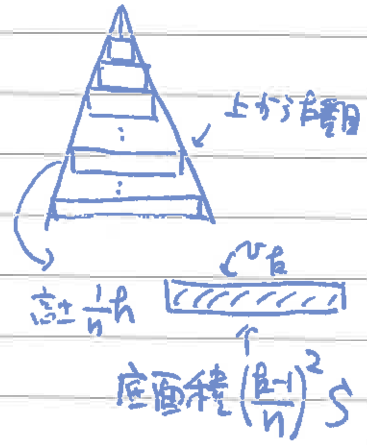
kについて和をとって $n\to\infty$ とすると

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{Sh}{n^3}\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right) \to \frac{1}{3}Sh \quad (n\to\infty)$$

となる。

アイデア2

hを右図のようにn等分すると、
上からk番目のブロックの
体積 v_k は



$$v_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 S \cdot \frac{1}{n}h$$
$$= \frac{(k-1)^3}{n^3} Sh.$$

kについて和をとって $n\to\infty$ とすると

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{Sh}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$
$$= \frac{Sh}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{Sh}{n^3}\left(\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right)$$
$$\to \frac{1}{3}Sh \quad (n\to\infty)$$

となる。どちらのアイデアでも同じ値に収束した。

$\boxed{\text{疑問}}$

アイデア1とアイデア2は常に同じ値になるのか？

$\boxed{\text{答え}}$

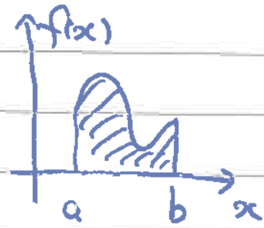
ちがう！ 大雑把にいうと

同じ値になる $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ (Riemann)積分可能.

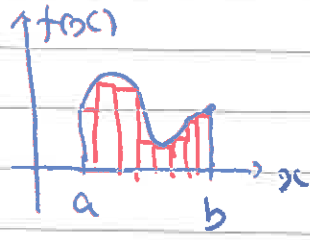
第4章 Riemann積分

〈目標〉

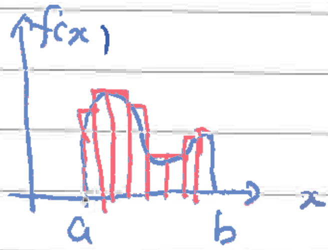
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して
面積を定義したい。



困ること



内側から近づける



外側から近づける。

@これらは一致するのか？

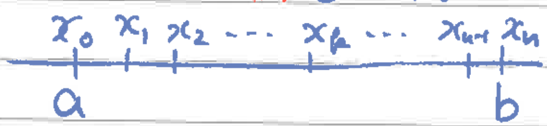
以下 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ とする。

§4.1 Riemann積分の定義

定義4.1（分割）

$$\Delta=\{x_0,x_1,\dots,x_n : a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$$

を $[a,b]$ の分割という。 図



定義4.2（Riemann積分）

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx := \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k-x_{k-1}) : \Delta=\{x_0,\dots,x_n\}\text{は}[a,b]\text{の分割}\right\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\left\{ \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\,(x_k - x_{k-1}) \;:\; \Delta=\{x_0,\cdots,x_n\}は[a,b]の分割 \right\}$$

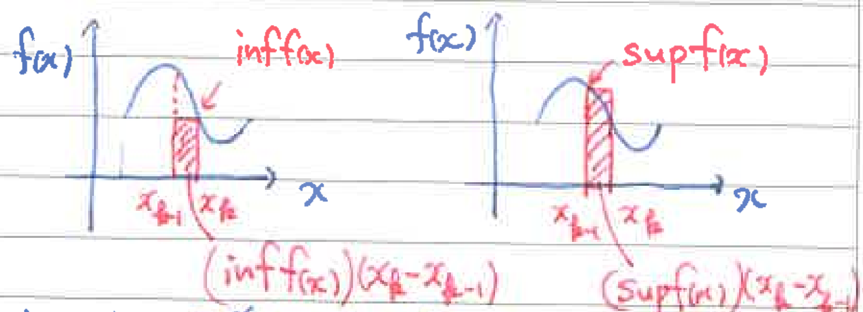
とおき、Riemann下積分、Riemann上積分という。

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ のときRiemann積分可能であるといい、

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

と定める。 ■

〈下積分、上積分のイミ〉



赤い部分を集めてそれぞれ上限、下限をとる。

〈Riemann積分可能のイミ〉

「内側からどんな分割を考えても」
「外側からどんな分割を考えても」
その極限が同じ値になるときに
面積(積分)が定められるということ。

Riemann積分を求めるにはどうしたらよいか？
を考える。

定義 4.3 (分割の長さ)

$[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_0,\cdots,x_n\}$ に対し

$$|\Delta| := \max_{k=1,2,\cdots,n}(x_k-x_{k-1})$$

を分割 Δ の長さという □

定理 4.1 (Darboux)

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について.
$\forall\varepsilon>0$ に対し $\exists\delta>0$ s.t.
$[a,b]$ 上の $\forall$分割 $\Delta=\{x_0,\cdots,x_n\}$ に対し
$|\Delta|<\delta$ ならば

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\varepsilon<\sum_{k=1}^{n}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k-x_{k-1})$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\varepsilon>\sum_{k=1}^{n}\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k-x_{k-1})$$

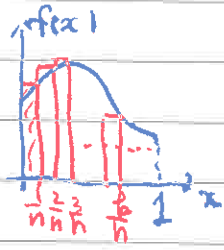
が成り立つ □

〈Darboux の定理のよいところ〉
$\exists$分割 Δ なる 上限.下限の定義から従う.
$\forall$分割 Δ で $|\Delta|<\delta$ なら成り立つこと
がよいところ.

系4.1 (区分求積法)

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ が Riemann積分可能 ならば

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$



が成り立つ. □

講義でやらない

定理4.1の証明

$M := \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$ とおく．記号の簡略化のため，$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \cdots, x_n\}$ に対し
$s[\Delta] := \sum_{k=1}^{m} \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) (x_k - x_{k-1})$ とおく．

1. $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists \Delta_\varepsilon = \{y_0, \cdots, y_m\}$: $[a,b]$ の分割 s.t.
$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < s[\Delta_\varepsilon]$$
とできる．$d := \min_{k=1,\cdots,m} (y_k - y_{k-1})$ として
$\delta := \min\left\{ d, \frac{\varepsilon}{2mM} \right\}$ とおく．

2. $[a,b]$ の $\forall$ 分割 Δ に対し
$$\int_a^b f(x)\,dx - 2\varepsilon < s[\Delta]$$
を示す．そのために，
$$s[\Delta \cup \Delta_\varepsilon] - s[\Delta] < \varepsilon$$
を示す．

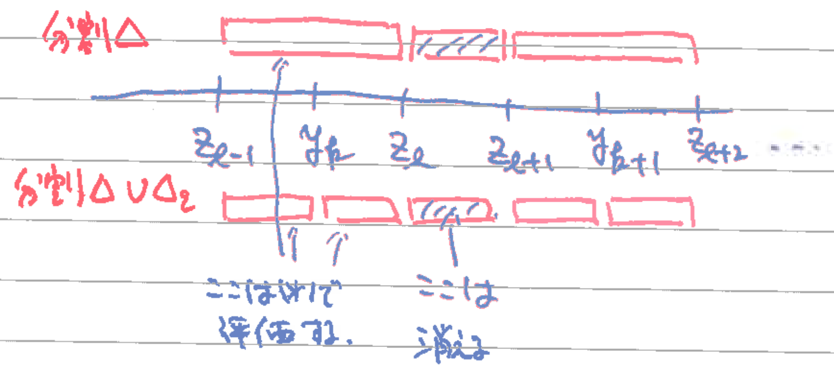
3. $\forall y_k \in \Delta_\varepsilon$ に対し $\exists z_\ell \in \Delta$ s.t.
$z_{\ell-1} \le y_k \le z_\ell$ とできる．$y \in \Delta_\varepsilon$ が $y \ne y_k$ なら，$|y_k - y| \ge d$ と $|z_\ell - z_{\ell-1}| < d$ より
$z_{\ell-1} \le y \le z_\ell$ とはならない．
$z_{\ell-1} \le y_k \le z_\ell$ のとき，
$$\inf_{z_{\ell-1} \le x \le y_k} f(x)(y_k - z_{\ell-1}) + \inf_{y_k \le x \le z_\ell} f(x)(z_\ell - y_k)$$
$$- \inf_{z_{\ell-1} \le x \le z_\ell} f(x) \underbrace{(z_\ell - z_{\ell-1})}_{=(z_\ell - y_k) + (y_k - z_{\ell-1})}$$

$\le 2M(z_\ell - z_{\ell-1}) \le 2M|\Delta|$ —(*)

となるから

$s[\Delta\cup\Delta_\varepsilon] - s[\Delta] \le 2Mm|\Delta| < \varepsilon$

が得られる.



4. 他方、分割の定義より

$s[\Delta_\varepsilon\cup\Delta] > s[\Delta_\varepsilon] > \int_a^b f(x)dx - \varepsilon$

だから

$$
\begin{aligned}
s[\Delta] &= s[\Delta] - s[\Delta\cup\Delta_\varepsilon] + s[\Delta\cup\Delta_\varepsilon] \\
&\ge -\varepsilon + \int_a^b f(x)dx - \varepsilon \\
&= \int_a^b f(x)dx - 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

となる □

系4.1の証明

$\forall\varepsilon>0$に対し、定理4.1の$\delta>0$について$n\in\mathbb{N}$を$\frac{1}{n}<\delta$となるようにとる. $\Delta:=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\}$とすれば$|\Delta|=\frac{1}{n}<\delta$だから

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx - \varepsilon &< \sum_{k=1}^{n} \inf_{\frac{k-1}{n}\le x\le\frac{k}{n}} f(x)\,\frac{1}{n} \\
&\le \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

より

$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ となる. □

注意 4.1

区分求積法は f が Riemann 積分可能でないと成立しない。 ☑

区分求積法を使うために、どのような関数が Riemann 積分可能かを考えよう。

定義 4.4 (振動量)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $A\subset[a,b]$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{x\in A} f(x) := \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x)$$

を A における f の振動量という ☑

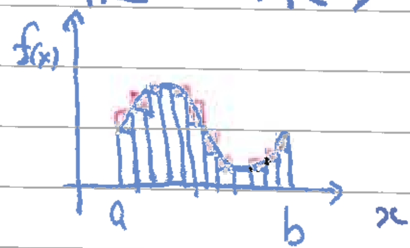
命題 4.1

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について、${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対し、${}^{\exists}\Delta=\{x_0,\cdots,x_n\}$：$[a,b]$ の分割 s.t.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\right)(x_k-x_{k-1})<\varepsilon$$

$\Longrightarrow$ f は Riemann 積分可能 ☑

〈命題4.1のイミ〉



赤い部分が小さい
$\Rightarrow$ Riemann 積分可能

準義でやらない

命題4.1の証明

${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対して、仮定でとれる $\Delta=\{x_0,\cdots,x_n\}$ をとると、Riemann 上積分、下積分の定義より、

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)\,(x_k - x_{k-1})$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)\,(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon \quad -(*)$$

となる．(*)の左辺は ε に依らないので

$\varepsilon \downarrow 0$ とすると

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$$

となる $\square$

定理4.2

$f : [a.b] \to \mathbb{R}$ が $[a.b]$ 上連続

$\Longrightarrow$ f はRiemann積分可能．

証明

f は $[a.b]$ 上連続より一様連続となる．

${}^\forall \varepsilon > 0$ に対し，${}^\exists \delta > 0$ s.t. ${}^\forall x, x' \in [a.b]$ に対し

$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

とできる．$N \in \mathbb{N}$ を $\frac{b-a}{N} < \delta$ となるようにとり，

$$\Delta = \{x_0 = a,\ x_1 = a + \tfrac{1}{N}(b-a),\ x_2 = a + \tfrac{2}{N}(b-a), \cdots$$
$$x_k = a + \tfrac{k}{N}(b-a),\ \cdots,\ x_N = b\}$$

を $[a.b]$ の分割とすると，$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N} < \delta$

だから

$$\operatorname*{osc}_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \leq \sup_{x_{k-1} \leq x, x' \leq x_k} |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

となり

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\right)(x_k-x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\frac{b-a}{N}=\varepsilon$$

が得られる．命題4.1より f はRiemann積分可能である．

□

講義でやらない

__定理4.3__

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は有界で単調減少（単調増加）

$\Longrightarrow$ f は Riemann 積分可能

__証明__

$M:=f(a)-f(b)>0$ とおく，$\forall\varepsilon>0$ に対し，

$N\in\mathbb{N}$ を $\frac{M(b-a)}{N}<\varepsilon$ となるようにとる．

定理4.2の証明の分割 Δ と同じものをとると

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\,(x_k-x_{k-1}) \le |\Delta|\sum_{k=1}^{N}\left(f(x_{k-1})-f(x_k)\right)$$

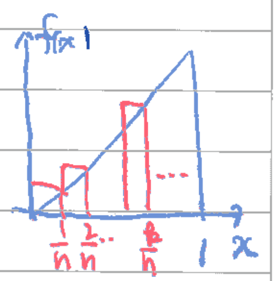
$$=\frac{b-a}{N}\left(f(a)-f(b)\right)<\varepsilon$$

となるので命題4.1より f はRiemann積分可能である

□

__例4.1__

$\int_0^1 x\,dx$ を区分求積法で求める．



$f(x)=x$ として

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

（各自）

$$\therefore \int_0^1 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

と微分を用いずに求められる．

$\boxtimes$

§4.2 Riemann積分の性質

以下、関数は常に有界なもののみ考える。

$[a,b]$上の分割 $\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ と

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し

$$s_\Delta(f) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\,(x_k - x_{k-1})$$

$$S_\Delta(f) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\,(x_k - x_{k-1})$$

と書く。

定理4.4 (区間加法性)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<c<b$

〈仮定〉

fは$[a,c]$, $[c,b]$上Riemann積分可能

〈結論〉

fは$[a,b]$上Riemann積分可能で

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$\blacksquare$

証明 $\forall \varepsilon>0$を固定する。

1. (下積分の評価)

$\underline{\int}_a^c f(x)\,dx$, $\underline{\int}_c^b f(x)\,dx$ の定義より

$\exists \Delta : [a,c]$の分割,

$\exists \Delta' : [c,b]$の分割 s.t.

$$\underline{\int}_a^c f(x)\,dx - \varepsilon \le s_\Delta(f),$$

$$\underline{\int}_c^b f(x)\,dx - \varepsilon \le s_{\Delta'}(f)$$

とできる. $\Delta \cup \Delta'$ は $[a,b]$ の分割だから

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx - 2\varepsilon$$

$$\leq s_\Delta(f) + s_{\Delta'}(f)$$

$$\leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{---} (*)$$

が成り立つ。

2. (上積分の評価)

1. と同様にして

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx + 2\varepsilon \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{---} (**)$$

が得られる.

3. f は $[a,c]$, $[c,b]$ 上 Riemann 積分可能より

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx,$$

$$\underline{\int_c^b} f(x)\,dx = \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$$

が成り立つ. $(*)$, $(**)$ より

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + 2\varepsilon$$

$$\leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + 4\varepsilon$$

となるので. $\varepsilon \downarrow 0$ とすると それぞれの積分が ε に依らないことに注意すると

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

— (***)

が得られる. 他方

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

だから, (***) の不等式はすべて等号になる.
よって f は $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

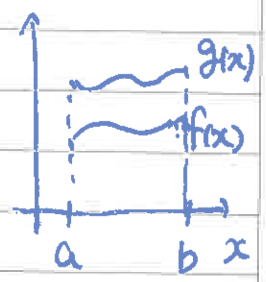
となる. □

定理4.5

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann積分可能, $\forall x \in [a,b]$ に対して $f(x) \le g(x)$ ($f \le g$ とかく)

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

証明



$[a,b]$ の $\forall$ 分割 Δ に対し,

$$s_\Delta(f) \le s_\Delta(g) \quad (\because f \le g)$$
$$\le \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b g(x)\,dx \quad (\because g \text{ はRiemann積分可能})$$

より Δ について sup をとれば

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

となる. f は Riemann 積分可能より.

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

となる. □.

定理4.6

$f:[a.b]\to\mathbb{R}$, 連続, $\forall x\in[a.b]$ に対し $f(x)\geq 0$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \forall x\in[a.b] \text{ に対し } f(x)=0.$$

$(f\equiv 0$ とかく$)$ ■

証明

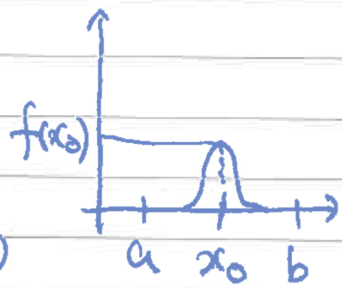
背理法で示す. つまり,

「$\forall x\in[a.b]$ に対し $f(x)=0$」

の否定

「$\exists x_0\in[a.b]$ s.t. $f(x_0)\neq 0$」

を仮定する. $f(x_0)>0$ と f が x_0 で連続であることより



$\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in[a.b]$ に対して

$|x-x_0|<\delta$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$

とできる. とくに, $|x-x_0|<\delta$ ならば

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{—}(*)$$

とできる. よって

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \quad \left(\begin{array}{l}\text{定理4.4}\\ \text{定理4.5}\end{array}\right)$$

$$\geq 2\delta\,\frac{f(x_0)}{2} \quad \left(\begin{array}{l}\because \text{定理4.5}\\ \text{と}(*)\end{array}\right)$$

$= \delta f(x_0) > 0$

となり $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ に矛盾する □

定理4.7 (積分の線形性)

$f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, Riemann積分可能.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ はRiemann積分可能で

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

図

証明

線形性を示すには $f+g$ と αf が Riemann積分可能であることを示せばよい

1. $f+g$ が Riemann積分可能であることを示す. 定理4.1(Darbouxの定理)より,

$\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\exists \delta > 0$ s.t.

$\forall$分割 Δ に対し $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx - 2\varepsilon$$

$$\leq s_\Delta(f) + s_\Delta(g)$$

$$\leq s_\Delta(f+g) \qquad \left(\because \inf_{I_k} f + \inf_{I_k} g \leq \inf_{I_k} (f+g) \quad I_k = [x_{k-1}, x_k] \right)$$

$$\leq \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\,dx$$

となる. 従ってとくに

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx - 2\varepsilon$$
$$\leq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\,dx$$

だから $\varepsilon \downarrow 0$ とすると

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx \leq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))dx$$

が得られる。同様にして

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx \geq \overline{\int_a^b} (f(x)+g(x))dx$$

となるから、$f+g$ はRiemann積分可能となる。

2. $\alpha=0$ のとき、αf が積分可能なことは自明なので、$\alpha \neq 0$ で αf がRiemann積分可能であることを示す。定理4.1 (Darbouxの定理) より、${}^\forall \varepsilon>0$ に対し ${}^\exists \delta>0$ s.t. ${}^\forall$分割 Δ に対し $|\Delta|<\delta$ ならば

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon \leq s_\Delta(f)$$

が成り立つ。$\alpha>0$ と $\alpha<0$ に場合わけする。

$\alpha>0$ のとき、

$$\alpha \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \alpha\varepsilon \leq \alpha s_\Delta(f)$$
$$= s_\Delta(\alpha f)$$
$$\leq \underline{\int_a^b} (\alpha f(x))\,dx$$

より $\varepsilon \downarrow 0$ とすると、

$$\alpha \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} (\alpha f(x))dx.$$

が成り立つ. 同様にして

$$\alpha \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \overline{\int_a^b} (\alpha f(x))\,dx$$

も成り立つので αf は Riemann 積分可能となる.

$\alpha < 0$ のとき

$$\alpha \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \alpha\varepsilon \geq \alpha s_\Delta(f)$$
$$= S_\Delta(\alpha f) \quad (\because \alpha < 0)$$
$$\geq \overline{\int_a^b} (\alpha f(x))\,dx$$

より $\varepsilon \downarrow 0$ とすると

$$\alpha \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \overline{\int_a^b} (\alpha f(x))\,dx$$

が成り立つ. 同様にして

$$\alpha \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} (\alpha f(x))\,dx$$

も成り立つので αf は Riemann 積分可能となる.

$\square$

定理 4.8 (積分平均値定理)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

(1) f は $[a, b]$ 上 Riemann 積分可能

$$\Longrightarrow \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq {}^{\exists}\lambda \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) \ \text{s.t.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a)$$

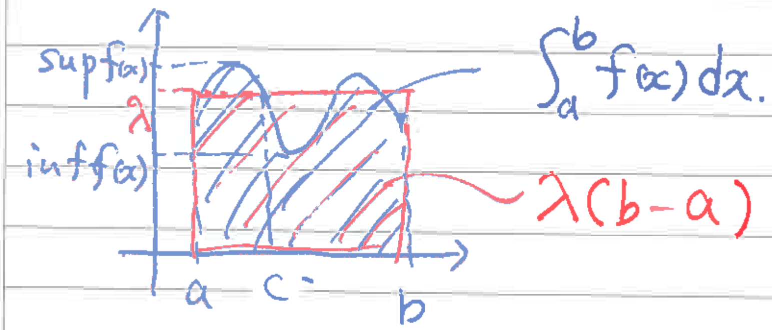
(2) f が $[a.b]$ 上連続

$\Longrightarrow\ {}^{\exists}c\in[a.b]$ s.t.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

▨

<u>定理4.8の意味</u>



▨ と ▨ の面積が等しくなるように

λ をとることができる.

<u>定理4.8の証明</u>

(1) ${}^{\forall}x\in[a.b]$ に対して

$$m := \inf_{y\in[a.b]} f(y) \le f(x) \le \sup_{y\in[a.b]} f(y) =: M$$

だから $[a.b]$ で積分すると、定理4.5より

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

だから

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

となる.

よって

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

となるので、

$$\lambda := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

とおけば

$$\lambda(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

が得られる。

(2) fは連続なので最大値と最小値がある(定理2.8)。よって(1)と同様にλをとることで

$$\inf_{y\in[a,b]} f(y) \leq \lambda \leq \sup_{y\in[a,b]} f(y),$$

$$\lambda(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

がわかる。連続関数における中間値の定理(定理2.7)より $\exists c \in [a,b]$ s.t. $\lambda = f(c)$ とできるので

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

となる。 $\square$

§4.3 不定積分

高校の教科書では、不定積分(または原始関数)を先に学んでから、定積分と面積を学んだ。しかし、この講義では積分は面積を求める計算であることを重視するため、定積分(Riemann積分)を先に扱った(微分をあとまわしにしたのも同じ理由)。さて $\int f(x)\,dx$ (上端と下端のないもの)は何か？について考える。

定義4.6 (不定積分)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 有界, Riemann積分可能, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ を $x\in[a,b]$ に対し

$$F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

で定義する。この関数 F を f の不定積分という。 ☑

注意4.2

上端と下端のない積分記号 $\int f(x)\,dx$ は原始関数と呼ぶのが正しい。 ☑

定理4.9

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 有界, Riemann積分可能, F: f の不定積分, i.e.

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad (x\in[a,b])$$

$\Longrightarrow$ F は $[a,b]$ 上連続. ☑

証明

fが有界なので

$$M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty$$

とおく.

$\forall x, y \in [a,b]$に対して

$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_a^y f(z)dz - \int_a^x f(z)dz\right|$$

$$= \left|\int_x^y f(z)dz\right| \quad \left(\because \text{区間加法性 定理4.4}\right)$$

$$\leq \left|\int_x^y |f(z)|dz\right| \quad \left(\because \text{積分の三角不等式}\right)$$

$$\leq M \left|\int_x^y dz\right| \quad \left(\because |f(x)| \leq M \text{ 定理4.5}\right)$$

$$= M|y-x|$$

$$\to 0 \qquad (y \to x)$$

だから

$$F(y) \to F(x) \qquad (y \to x)$$

となるので Fはxで連続となる □

注意4.3

定理4.9の証明の区間加法性は,

正確には

$$\int_a^y f(z)\,dz - \int_a^x f(z)\,dz$$

$$= \int_a^y f(z)dz + \int_x^a f(z)dz = \int_x^y f(z)dz$$

と式変形している．この変形は厳密には示していないこと（$\int_x^a f(\xi)\,d\xi$ は $x>a$ だから定義していないとか，定理4.4は $a<x$ だからそのまま用いることができないとか）を用いている。これらを厳密に示すことは面倒なだけなので認めて先に進めることにする．ただし，積分の向きを考えることは有用なので，次の定義を与える ☑

定義 4.7

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$，有界，Riemann積分可能

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

☑

定理 4.10（微分積分学の基本定理 その1）

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$，連続

$F:[a,b]\to\mathbb{R}$，f の不定積分，i.e.

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad (x\in[a,b])$$

$\Rightarrow$ ${}^\forall x\in(a,b)$ に対し

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

☑

注意 4.4

定理4.10で結論の極限は不定積分 F の x での微分である．つまり，連続関数の不定積分は（端点をのぞいて）微分可能となる

☑

定理4.10の証明

$\forall \varepsilon > 0$に対し、fはxで連続なので
$\exists \delta > 0$ s.t. $\forall \xi \in [a, b]$に対し
$|\xi - x| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ —(*)
とできる。そこで $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$に対し
$0 < |h| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi - f(x) \right| \quad (\because \text{区間加法性})$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(\xi) - f(x)) d\xi \right| \quad \left(\because \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) d\xi = f(x)\right)$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |f(\xi) - f(x)| d\xi \right| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{|h|} \left| \int_x^{x+h} d\xi \right| \quad (\because (*))$$

$$= \varepsilon$$

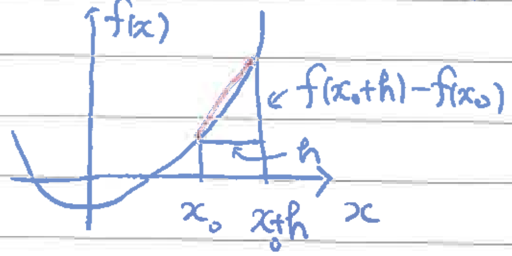
となるので

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

となる □

第5章　微分

§5.1 微分とその性質



$0<|h|<1$ に対し
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
は、グラフ $y=f(x)$ の $x=x_0$ の接線の傾きを近似している。

定義5.1（微分）

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$

f が $x=x_0$ で**微分可能**

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ が存在する。

このとき、$\displaystyle f'(x_0):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

とかき、f の x_0 における**微分係数**という。

f が (a,b) 上**微分可能**

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ f は $\forall x\in(a,b)$ について微分可能。

このとき、$x\in(a,b)$ に対し

$$\frac{df}{dx}(x):=f'(x)$$

とかく。$\frac{df}{dx}:(a,b)\to\mathbb{R}$ を f の**導関数**という ☑

以下

$C^0(a.b) := \{f : (a.b) \to \mathbb{R},\ f$は$(a.b)$上連続$\}$

$C^1(a.b) := \{f : (a.b) \to \mathbb{R},\ f$は$(a, b)$上微分可能, $\frac{df}{dx}$は$(a.b)$上連続$\}$

とかく。

〈微分と接線〉

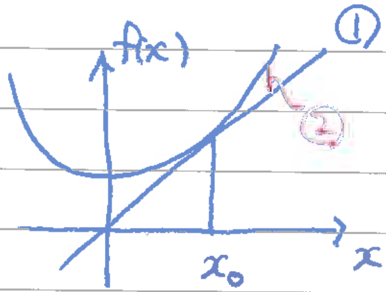
$f \in C^1(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$ に対して

$$R(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

とおく。このとき、

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{①} + \underbrace{R(x)(x - x_0)}_{②}$$

となるが、$x \to x_0$ としたとき、$R(x) \to 0$ がわかる。



①は一次関数
(グラフ $y = f(x)$ の $x = x_0$ での接線。)
②は誤差である。

①, ②の性質と微分可能性は同値になる。

<u>定理5.1</u>

$f : (a.b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a.b)$

fが $x = x_0$ で微分可能。

$\Longleftrightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t

同値 $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + R(x)(x - x_0)$

とかいたときに $R(x) \to 0$ $(x \to x_0)$

さらにこのとき $\lambda = f'(x_0)$ となる $\boxed{//}$

証明

$\Rightarrow$) $\lambda = f'(x_0)$ とおくと $x \neq x_0$ に対し

$$R(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$$

となるから、微分の定義より $R(x) \to 0$ $(x \to x_0)$.

$\Leftarrow$) $R(x) \to 0$ $(x \to x_0)$ より

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

となるから f は x_0 で微分可能で $f'(x_0) = \lambda$ となる $\boxed{//}$

系 5.1

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in (a, b)$ で微分可能

$\Rightarrow$ f は x_0 で連続.

証明

定理 5.1 より $R(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ とおくと

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &= |f'(x_0)(x-x_0) + R(x)(x-x_0)| \\ &\leq (|f'(x_0)| + |R(x)|)\,|x-x_0| \\ &\to 0 \quad (x \to x_0) \end{aligned}$$

となる. 最後の極限は $|R(x)| \to 0$ $(x \to x_0)$ となることを用いた $\square$.

〈微分の公式〉

定理5.2

$f, g \in C^1(a,b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

(3) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(積の微分公式) ☒

注意5.1

定理5.2の(1),(2)より微分は線形である ☒

証明

(3)のみ示す. $0<|h|<1$ に対し

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} + \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))g(x_0)}{h}$$

となる. ここで f は x_0 で連続(系5.1)より $f(x_0+h) \to f(x_0)$ $(h\to 0)$ となるので

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$\to f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \quad (h\to 0)$$

となる. □

定理5.3 (合成関数の微分公式, Chain rule)

$f=f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g=g(y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$上微分可能

$$\Rightarrow \frac{d(g\circ f)}{dx}(x)=\frac{dg}{dy}(f(x))\frac{df}{dx}(x) \quad (x\in\mathbb{R}).$$

□

注意5.2

定理5.3は. $y=f(x)$, $z=g(y)$とかくと形式的に

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

とかける

□

証明 $x_0\in\mathbb{R}$に対し

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R_f(x)(x-x_0) \quad -(*)$$

$$g(y)=g(f(x_0))+g'(f(x_0))(y-f(x_0)) \quad -(**)$$
$$+R_g(y)(y-f(x_0))$$

とかくと. 定理5.1より

$$R_f(x)\to 0 \qquad (x\to x_0)$$

$$R_g(y)\to 0 \qquad (y\to f(x_0))$$

となる. $(**)$で$y=f(x)$とすると

$$g(f(x))=g(f(x_0))+g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))$$
$$+R_g(f(x))(f(x)-f(x_0))$$

より$(*)$を代入すると

$$g\circ f(x)=g\circ f(x_0)+g'(f(x_0))f'(x_0)(x-x_0)$$
$$+(g'(f(x_0))R_f(x)+R_g(f(x))(f'(x_0)+R_f(x)))$$
$$\times(x-x_0)$$

となる. ここで

$$g'(f(x_0))R_f(x) + R_g(f(x))(f'(x_0) + R_f(x))$$
$$\longrightarrow 0 \qquad (x \to x_0)$$

となるから定理5.1より

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

となる。従って

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x) = \frac{dg}{dy}(f(x))\frac{df}{dx}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

となる。 □

例5.1

$x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

証明

$x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ より

$g(y) := e^y$, $f(x) := \alpha \log x$

とすれば $x^\alpha = g(f(x)) = g \circ f(x)$

であり,

$$(x^\alpha)' = g'(f(x))f'(x)$$
$$= e^{f(x)} \frac{\alpha}{x}$$
$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} \quad ▨$$

定理5.4 (逆関数の微分公式)

$f:(a,b)\to(c,d)$, 全単射, 微分可能

$x_0\in(a,b)$, $f'(x_0)\neq 0$, $y_0=f(x_0)$

$$\Longrightarrow \frac{d(f^{-1})}{dy}(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$ ☑

注意5.3

定理5.4は. $y=f(x)$ と書いたときに形式的に

$$\frac{dx}{dy}=1\Big/\frac{dy}{dx}$$

とかける. ☑

証明

$0<|h|<1$に対し. $h'\in\mathbb{R}$を

$$f(x_0+h')=y_0+h$$

により定めると

$$\frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h}=\frac{x_0+h'-x_0}{f(x_0+h')-f(x_0)}$$

$$=1\Big/\frac{f(x_0+h')-f(x_0)}{h'}$$

となる. ここで $h\to 0$ とすると

$$f(x_0+h')=y_0+h\to y_0=f(x_0)$$

より

$$x_0+h'\to x_0 \quad (h\to 0)$$

となるので $h'\to 0$ がわかる. 従って.

$$\frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h}=\frac{1}{\frac{f(x_0+h')-f(x_0)}{h'}}\to\frac{1}{f'(x_0)}\quad(h\to 0)$$

がわかる □

定理5.5 (パラメータ微分)

$\varphi, \psi \in C^1(a.b)$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$,
φは狭義単調増加, $x_0=\varphi(t_0)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$ ☒

注意5.4

定理5.5は, 形式的に

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

と書ける. ☒

証明

$x=\varphi(t)$でφが狭義単調増加なので,
$\varphi^{-1}(x)=t$と(x_0の近くで)かける. よって

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x))$$

となるので, 定理5.3, 5.4(合成関数, 逆関数の微分公式)を用いればよい. ☒

これらの具体的計算は, 高校の微分積分で既に学んでいるはず...

§5.2 平均値定理

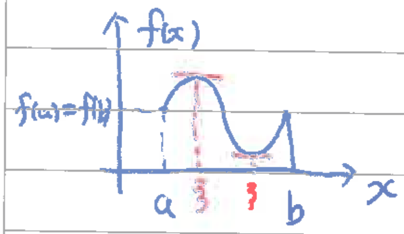
記号

$C([a.b]):=\{f:[a.b]\to\mathbb{R}, f$は$[a.b]$上連続$\}$
とおく.

定理5.6 (Rolleの定理)

$f\in C([a.b])\cap C^1(a.b)$, $f(a)=f(b)$
$\Rightarrow \exists\xi\in(a.b)$ s.t. $f'(\xi)=0$ ☒

〈Rolle の定理のイミ〉



$f(a)=f(b)$ ならば図のように傾きが0になる点があるということ。

証明

f が定数関数のときは ${}^\forall x \in (a,b)$ に対し $f'(x)=0$ となるから、たとえば $\xi = \frac{a+b}{2}$ とすればよい。以下、f が定数関数でないとする。

1. ${}^\exists c \in (a,b)$ s.t. $f(a) < f(c)$ となる場合を考える。このとき f が $[a,b]$ 上連続なので定理2.8より

$${}^\exists \xi \in [a,b] \text{ s.t } \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(\xi)$$

とできるが、このとき、$\xi \neq a$ かつ $\xi \neq b$ となる。

2. $f'(\xi) \leq 0$ を示す。$\xi < {}^\forall x < b$ に対し

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \quad \left(\because \begin{array}{l} x-\xi>0 \\ f(x)-f(\xi) \leq 0 \end{array} \right)$$

より $x \to \xi+0$ として、$f'(\xi) \leq 0$ となる。

3. $f'(\xi) \geq 0$ を示す。$a < {}^\forall x < \xi$ に対し

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \quad \left(\because \begin{array}{l} x-\xi<0 \\ f(x)-f(\xi) \leq 0 \end{array} \right)$$

より $x \to \xi-0$ として $f'(\xi) \geq 0$ となる。

2. 3. より $f'(\xi)=0$ がわかる。

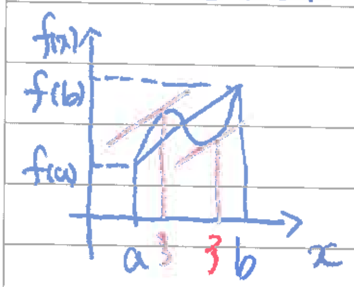
4. $\exists c \in (a,b)$ s.t. $f(a) > f(c)$
のときも同様にできる(演習) □

定理5.7 (微分平均値定理, Lagrangeの定理)
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$
$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ s.t

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

☑

〈平均値定理のイミ〉



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は左のななめ線の傾き。これと同じ傾きを接線に持つ点が (a,b) 内にあるということ

証明
$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $x \in [a,b]$ に対し

$$\varphi(x) := f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right)$$

と定めると、$\varphi \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ かつ
$\varphi(a) = \varphi(b)$, $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

となる. Rolleの定理(定理5.6)より.
$\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $\varphi'(\xi) = 0$
となるので $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となる □

〈微積分の基本定理〉

定理5.8（微積分の基本定理 その2）

$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$, $\frac{df}{dx} \in C([a,b])$.

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

☑

証明

$\Delta = \{x_0, \cdots, x_n\}$ を $[a,b]$ の分割とすると、

$1 \leq k \leq n$ に対し、微分平均値定理より

$x_{k-1} \leq {}^\exists \xi_k \leq x_k$ s.t.

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

とできるので、kについて和をとると

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

となる。$\inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f'(x) \leq f'(\xi_k) \leq \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f'(x)$ より

$$s[\Delta] \leq f(b) - f(a) \leq S[\Delta]$$

だから、分割 Δ について、それぞれ上限、下限をとると

$$\underline{\int_a^b} f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a) \leq \overline{\int_a^b} f'(x)\,dx$$

となる。f'は$[a,b]$上連続だから、Riemann積分可能であり（定理4.2）

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

がわかる □

定理 4.10. 定理 5.8
微積分の基本定理

定理 5.7 平均値定理
定理 4.2 可積分条件
定理 4.4 区間加法性
定理 4.5 積分の順序保存.

定理 5.6 Rolle
定理 2.9 閉区間の連続関数
定理 1.6 極限の線形性

定理 2.8 Weierstrass

定理 1.3 上限の存在

定理 1.9. Borzano-Weierstrass

実数とは何か?

(まだ. いろいろな定理の抜けがありうる...)

<u>微分積分学の基本定理</u>

$f \in C([a.b])$ とする

(1) $F:[a.b] \to \mathbb{R}$ を $x \in [a.b]$ に対し

$$F(x) := \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

と定めると.

$$\therefore \frac{dF}{dx}(x) = f(x) \qquad -(*)$$

が成り立つ.

(*)をみたす $F:[a.b] \to \mathbb{R}$ を f の原始関数という.

(2) F を f の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

〈平均値の定理の応用〉

系5.2

$f \in C^1(a, b)$.

fが(a, b)上単調増加

$\Longleftrightarrow$ $^\forall x \in (a, b)$に対し $\frac{df}{dx}(x) \geq 0$

同値

証明

$\Rightarrow$) $^\forall x \in (a, b)$, $^\forall h > 0$に対し

$f(x+h) - f(x) \geq 0$ より

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

だから

$$f'(x) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

$\Leftarrow$) $^\forall x, x' \in (a, b)$に対し $x < x'$

ならば平均値定理(定理5.7)

と仮定より $x < {}^\exists \xi < x'$ s.t.

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = f'(\xi) \geq 0$$

となる 従って $f(x) \leq f(x')$となる. □

系5.3

$f \in C^1(a, b)$

fが定数関数 すなわち $^\exists c \in \mathbb{R}$ s.t.

$^\forall x \in (a, b)$に対し $f(x) = c$

$\Longleftrightarrow$ $^\forall x \in (a, b)$ $\frac{df}{dx}(x) = 0$.

同値

証明

($\Rightarrow$) 演習

($\Leftarrow$) 系5.2より、fは単調増加かつ単調減少になるので、
$\forall x, x' \in (a,b)$ に対し $x < x'$ ならば
$f(x) \leq f(x')$, $f(x') \leq f(x)$
となる。従って $f(x) = f(x')$ となる

□

〈極大, 極小〉

定義5.2 (極大・極小)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$

fが $x=c$ で極大 (極小)

$\underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (a,b)$
$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) < f(c)$
$(f(x) > f(c))$

定理5.9

$f \in C^1(a,b)$, $c \in (a,b)$

fが $x=c$ で極大 (または極小)

$\Rightarrow f'(c) = 0$

証明

fが $x=c$ で極大のときに示す。定義でとれる $\delta > 0$ に対して
$0 < h < \delta$ ならば
$f(c+h) - f(c) < 0 \Rightarrow \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$.

$-\delta < h < 0$ ならば

$f(c+h) - f(c) < 0 \Rightarrow \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$

より $h \to 0$ として $f'(c) = 0$ が得られる. □

定理5.10（極大・極小の判定）

$f \in C^1(a,b)$, $c \in (a,b)$

〈仮定〉

$\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (a,b)$ に対し

$c-\delta < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$

$c < x < c+\delta \Rightarrow f'(x) < 0$

〈結論〉

f は $x = c$ で極大. ☑

証明

$\forall x \in (a,b)$ に対し $0 < |x-c| < \delta$ と仮定する.

1. $c-\delta < x < c$ ならば平均値の定理（定理5.7）より

$x < \exists \xi_1 < c$ s.t. $\dfrac{f(c)-f(x)}{c-x} = f'(\xi_1) > 0$

となるから. $f(x) < f(c)$ となる.

2. 逆に $c < x < c+\delta$ ならば平均値の定理（定理5.7）より

$c < \exists \xi_2 < x$ s.t. $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\xi_2) < 0$

となるから $f(x) < f(c)$ となる.

どちらの場合も $f(x) < f(c)$ となるので.

fは$x=c$で極大となる □

〈ここまでのまとめ〉

◎高校までの微分積分について（1回微分に関することがらについて）正当化をした。

◎微分と積分の関係、すなわち「グラフの接線の傾きを求めること」と「グラフの面積を求めること」の関係を明らかにするためには、「実数とは何か？」までたちかえって考える必要がある

◎2回以上の微分についても今までの結果がだいたい正当化できる。

§5.3 高階導関数とTaylorの定理

定義5.3

$f\in C^1(a,b)$ の導関数 $\frac{df}{dx}$ が $x_0\in(a,b)$ で微分可能なとき、

$$f''(x_0):=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{df}{dx}(x_0+h)-\frac{df}{dx}(x_0)}{h}$$

とかく。$f''(x_0)$ を f の x_0 における**第2次微分係数**という。

また $\frac{df}{dx}$ が (a,b) 上微分可能なとき、

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x):=f''(x)\quad(x\in(a,b))$$

とかく。$\frac{d^2f}{dx^2}:(a,b)\to\mathbb{R}$ を f の**2階導関数**という。 □

3次微分係数、3階導関数 etc. も同様にして定義する。以下、$n\in\mathbb{N}$ に対し

$$C^n(a,b):=\left\{f:(a,b)\to\mathbb{R},\ f\text{は}(a,b)\text{上で}n\text{回微分可能で}\ \frac{d^nf}{dx^n}\text{は}(a,b)\text{上連続}\right\}$$

とかくことにする

例5.2

$n\in\mathbb{N}$ に対し $\frac{d^n(\arcsin)}{dx^n}(0)$ を求める。

$x\in(-1,1)$ に対し

$$\frac{d(\arcsin)}{dx}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

51

$$\frac{d^2(\arcsin)}{dx^2}(x) = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$
$$= \frac{x}{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{x}{1-x^2}\frac{d(\arcsin)}{dx}(x)$$

より $f = \arcsin$ とすると

$$(1-x^2)\frac{d^2f}{dx^2}(x) = x\frac{df}{dx}(x)$$

となる. 両辺 n 回微分すると

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) - 2nx\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) - n(n-1)\frac{d^nf}{dx^n}(x)$$
$$= x\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + n\frac{d^nf}{dx^n}(x)$$

となるから. $x=0$ を代入すると

$$\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(0) - n(n-1)\frac{d^nf}{dx^n}(0) = n\frac{d^nf}{dx^n}(0),$$

すなわち

$$\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(0) = n^2\frac{d^nf}{dx^n}(0)$$

となる.

$f(0)=0$, $\frac{df}{dx}(0)=1$ より漸化式をとくことで $m\in\mathbb{N}$ に対し

$$\begin{cases} \dfrac{d^{2m}f}{dx^{2m}}(0) = 0 \\ \dfrac{d^{2m+1}f}{dx^{2m+1}}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2m-1)^2 \end{cases}$$

が得られる. □

<u>定理5.11</u> (Taylorの定理)

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(a.b)$, $\frac{d^k f}{dx^k} \in C[a.b]$ $(k=1, \cdots, n)$.

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

とかいたときに. $a < {}^{\exists}\theta < b$ s.t.

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(b-a)^n$$ □

<u>注意5.5</u>

定理5.11で $n=1$ とすると. $a < {}^{\exists}\theta < b$ s.t

$$f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)$$

となるが. これは微分平均値定理(定理5.7)である. □

<u>証明</u>

$n=2$で示してみる. $\varphi : [a.b] \to \mathbb{R}$ を $x \in [a.b]$ に対し

$$\varphi(x) := f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \left(f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a)\right)\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}$$

とおくと

$$\varphi(a)=\varphi(b)=f(b)$$

となる. Rolleの定理から

$$a<^{\exists}\theta<b \quad \text{s.t.} \quad \varphi'(\theta)=0$$

となる. 一方

$$\varphi'(x)=f'(x)+\frac{f''(x)}{1!}(b-x)-\frac{f'(x)}{1!}-2\left(f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)\right)\frac{b-x}{(b-a)^2}$$

となるから.

$$0=\varphi'(\theta)=f'(\theta)+\frac{f''(\theta)}{1!}(b-\theta)-\frac{f'(\theta)}{1!}-2\left(f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)\right)\times\frac{b-\theta}{(b-a)^2}$$

となる. 従って

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(\theta)}{2!}(b-a)^2$$

となる □

定理5.12 (Taylor-Maclaurin展開)

$n\in\mathbb{N}$, $f\in C^n(-1,1)$, $x\in(-1,1)$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_n}{x^n}\to 0 \quad (x\to 0)$$

☒

証明

$\forall x \in (-1,1)$ に対し

$$R_n = f(x) - \left(f(0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right) - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

にTaylorの定理を使うと、$0 < |\theta_x| < |x|$ となる $\theta_x \in \mathbb{R}$ がとれて

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta_x)}{n!}x^n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

とできる。このとき、$x \to 0$ とすると $\theta_x \to 0$ となることに注意すると

$$\frac{R_n}{x^n} = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\theta_x) - f^{(n)}(0)\right) \to 0 \quad (x \to 0)$$

がわかる。 □

例5.3

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

証明

Taylor-Maclaurin展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x)$$

を考えると $\frac{R_3(x)}{x^3} \to 0 \quad (x \to 0)$. よって

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 - R_3(x)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{R_3(x)}{x^3}$$

$$\to \frac{1}{6} \quad (x \to 0)$$ □

§5.4 de l'Hospital の定理

例5.4

$f, g \in C^1(-1,1)$, $f(0)=g(0)=0$, $g'(0) \neq 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$ ☒

証明

Taylor - Maclaurin 展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_f(x)$$
$$g(x) = g(0) + g'(0)x + R_g(x)$$

を考えて $\frac{R_f(x)}{x}, \frac{R_g(x)}{x} \to 0 \quad (x\to 0)$.

従って.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)+f'(0)x+R_f(x)}{g(0)+g'(0)x+R_g(x)}$$
$$= \frac{f'(0) + R_f(x)/x}{g'(0) + R_g(x)/x}$$
$$\to \frac{f'(0)}{g'(0)} \quad (x\to 0)$$ □

例5.4より, $f(0)=g(0)=0$. つまり

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形ならば

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となっているようにみえる. このことが正しいことを主張するのが de l'Hospital の定理である.

定理5.13 (de l'Hospital の定理)

$a \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$

(1) $f(x), g(x) \to 0 \quad (x \to a)$

↖ 不定形の条件

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

(2) $f(x), g(x) \to \infty \quad (x \to a)$

↖ 不定形の条件.

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \qquad \square$$

標語的にいうと

$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形ならば

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となる.

例5.5

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ を de l'Hospital の定理を用いて示す.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \quad \left(\because \tfrac{0}{0} \text{ の不定形}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} \quad \left(\because \tfrac{0}{0} \text{ の不定形}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \quad \left(\because \tfrac{0}{0} \text{ の不定形}\right) \qquad \square$$

注意5.6

例15.5で

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{0}$$

としてはいけない. de l'Hospitalの定理は極限が不定形のときにしか使ってはいけない. □

定理5.13(de l'Hospitalの定理)の直観的な理由

Taylor-Maclaurin展開を用いて,

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$g(x) = g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

と形式的にかけば, $f(a)=g(a)=0$ (または ∞) となるから, $f(a)=g(a)=0$ のときは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots}{g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots}$$

これらは0になるはず

$(x-a)^2$よりべきは大きい

$$= \lim_{x\to a}\frac{f'(a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)+\cdots}{g'(a)+\frac{1}{2!}g''(a)(x-a)+\cdots}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となる. これは厳密な証明ではないし, $f(a)$ や $g(a)$, $f'(a)$, $g'(a)$ が存在するかどうかがそもそもわからないので, Taylor-Maclaurin展開も正しくない. 実際には,

平均値の定理を使って、これらの議論を正当化する必要がある。詳細は、吹田・新保(p.50〜52)を参照せよ。

§5.5 凸関数

定義5.4 (凸関数)

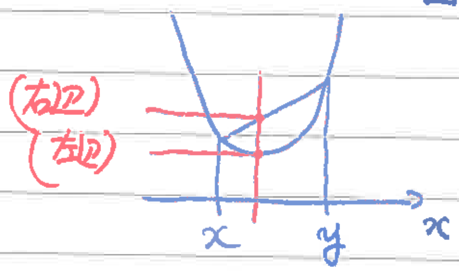
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が凸関数

$\Leftrightarrow$ $\forall x, y\in[a,b]$, $0<\forall\lambda<1$ に対して

定義

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

□



定理5.14

$f\in C([a,b])\cap C^1(a,b)$

f が $[a,b]$ 上凸関数

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{df}{dx}$ が (a,b) 上単調増加

同値

□

系5.4

$f\in C^2(a,b)$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}\geq 0$

$\Rightarrow$ f は $[a,b]$ 上の凸関数 □

(∵) $\dfrac{d^2f}{dx^2}\geq 0$ より $\dfrac{df}{dx}$ は (a,b) 上単調増加となるので定理5.14を用いればよい。

□

定理5.14の証明

⇐ のみ示す. $x, x' \in (a,b)$ が $x < x'$ ならば $0 < {}^\forall\lambda < 1$ に対し

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') - (\lambda + (1-\lambda)) f(\lambda x + (1-\lambda)x')$$

$$= \lambda \left(f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda)x') \right) + (1-\lambda)\left(f(x') - f(\lambda x + (1-\lambda)x') \right)$$

$$= \lambda f'(\theta_1)\left(x - (\lambda x + (1-\lambda)x') \right) + (1-\lambda) f'(\theta_2) \left(x' - (\lambda x + (1-\lambda)x') \right)$$

$$\left(x < {}^\exists\theta_1 < \lambda x + (1-\lambda)x' < {}^\exists\theta_2 < x' \right)$$

(∵ 平均値の定理)

$$= \lambda(1-\lambda) f'(\theta_1)(x - x') + \lambda(1-\lambda) f'(\theta_2)(x' - x)$$

$$= \underbrace{\lambda(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{(x'-x)}_{\geq 0} \underbrace{(f'(\theta_2) - f'(\theta_1))}_{\geq 0}$$

≥ 0 (∵ f' は単調増加)

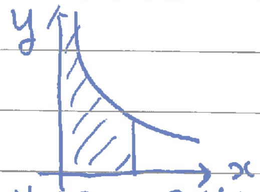
となる. 従って $\lambda + (1-\lambda) = 1$ より

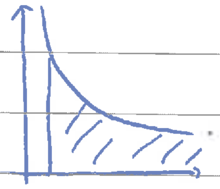
$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') \geq f(\lambda x + (1-\lambda)x')$$

がわかった. $x > x'$ のときも同じように計算すればよい

□

第6章　広義積分





非有界な関数の　　　無限区間の
グラフの面積.　　　グラフの面積

どうやって面積を定義すればよいか?

§6.1 広義積分の例

例6.1

$f:(0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$f(x):=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad(x\in(0,1])$$

で定めたとき, $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 f(x)\,dx$ を

どう定めるかを考えてみる. $\forall\varepsilon>0$ に対して

$\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ は定まるから

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$$

と定めるのが一つの方法であろう.

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx=\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2-2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

より

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2-2\varepsilon^{\frac{1}{2}})=2$$

とすればよさそうである. $\square$

このアイデアをもとにして, 非有界な関数の
積分を定義しよう.

定義6.1（広義積分）

$f:(a,b]\to\mathbb{R}$ は $(a,b]$ 上連続とする。

このとき

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

と定義する。$\int_a^b f(x)\,dx$ を**広義積分**という。

極限が存在するとき、$\int_a^b f(x)dx$ は**収束する**という。

極限が存在しないとき、$\int_a^b f(x)dx$ は**発散する**という

$\boxtimes$

例6.2

$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$ を求める。$\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ は $x=0$ で定義できないから

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}}dx$$

と2つにわけて、それぞれについて広義積分を求めないといけない。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2,\quad \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}}dx = 2 \quad (\text{各自})$$

だから $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = 4$ となる $\boxtimes$

例6.3

$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ を求める。$\frac{1}{x^2}$ は $x=0$ で定義できないから

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}dx$$

となる。

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -1+\frac{1}{\varepsilon}$$ (念のため)

より

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = \infty$$

となる. □

〈無限区間の積分〉

例 6.4 $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{x^2} \quad (x \in [1,\infty))$$

で定義する. このとき $\int_1^\infty f(x)\,dx$ をどのように定義すればよいかを考える. $\forall M > 1$ に対し $\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx$ は定まるから,

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^\infty f(x)\,dx$$

と定めるのが一つの方法だろう.

$$\int_1^M f(x)\,dx = \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{M}+1$$

より

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(1-\frac{1}{M}\right) = 1$$

とするのがよさそうである. □

このアイデアをもとに無限区間の積分を定義しよう.

定義6.2（広義積分）

$f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ は $[a,\infty)$ 上連続とする。

このとき、

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

で定義する。$\int_a^\infty f(x)dx$ を広義積分という。

極限が存在するとき、$\int_a^\infty f(x)dx$ は収束するという。

極限が存在しないとき、$\int_a^\infty f(x)dx$ は発散するという。

□

$\alpha>0$ に対して $\frac{1}{x^\alpha}$ の広義積分は重要なので

定理としてまとめておく。

定理6.1

$\alpha>0$ に対して次が成り立つ。

$$(1)\quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} < \infty & (0<\alpha<1) \\ \infty & (\alpha \geq 1) \end{cases}$$

$$(2)\quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} < \infty & (\alpha>1) \\ \infty & (0<\alpha\leq 1) \end{cases}$$

□

例6.5

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束する。

(∵) 1. $x\geq 0$ に対し $e^{-x^2}\geq 0$ より

$\int_0^M e^{-x^2}dx$ は $M>0$ について

単調増加である。従って、$\int_0^M e^{-x^2}dx$

が $M>0$ について有界であることをいえば

よい。

2. $z \geq 1$ に対し $ze^{-z} \leq 1$

だから（各自たしかめよ）．とくに

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad (x \geq 1)$$

である．従って，$M > 1$ に対し

$$\int_1^M e^{-x^2}dx \leq \int_1^M \frac{1}{x^2}dx$$

$$\leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \quad (\because \frac{1}{x^2} \geq 0)$$

$$= 1 \quad (\because 定理6.1)$$

だから，$\int_1^M e^{-x^2}dx$ は $M > 1$ に対して有界となる．$\int_0^M e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^M e^{-x^2}dx$ より，$\int_0^M e^{-x^2}dx$ は $M > 0$ について有界となるので，$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束することがわかる　□

注意6.1

実は

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となることが知られている．この広義積分（Gauss積分という）は偏差値など確率・統計，偏微分方程式（熱などの温度分布や化学物質の濃度分布など）などの様々な分野に関係のある積分である．　□

§6.2 絶対収束と条件収束

以下，話をかんたんにするため，$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．このとき，

$$\int_0^\infty |f(x)|dx \quad と \quad \int_0^\infty f(x)dx$$

が収束するかどうかを調べたい．

例 6.6

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in[0,\infty)$ に対し

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x>0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

とおくと f は $[0,\infty)$ 上連続である．

このとき，

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \text{ は収束}, \quad \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \text{ は発散}$$

例

(∵) 1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ が収束することを示す．

$M, M'>0$ に対し

$$\left|\int_0^M \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^{M'} \frac{\sin x}{x}dx\right|$$

$$= \left|\int_{M'}^M \frac{\sin x}{x}dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{x}(-\cos x)\right]_{M'}^M - \int_{M'}^M \frac{\cos x}{x^2}dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{M}+\frac{1}{M'}+\int_{M'}^M \frac{1}{x^2}dx \quad (\because 三角不等式)$$

$$= \frac{2}{M'} \to 0 \quad (M, M'\to\infty)$$

だから、Cauchyの収束判定条件より、

$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}dx$ は存在する。すなわち、

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する。

2. $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ が発散することを示す。

$n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

$$\geq\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{k\pi}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

となる。$l\in\mathbb{N}$ に対し、$n=2^l+1$ とすると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^l}+\cdots+\frac{1}{2^l}}_{2^l\text{コ}}$$

$$=l+1$$

となるので $l\to\infty$ とすると $n\to\infty$ となり

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\geq\frac{2}{\pi}(l+1)\to\infty\quad(l\to\infty)$$

だから $\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ は発散する。 ☑

定義6.3（絶対収束．条件収束）

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$，連続

(1) $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ が収束．

(2) $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が条件収束

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束するが

絶対収束しない ▨

定理 6.2

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$．連続．

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束

$\Longrightarrow$ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束 ▨

証明

$M, M'>0$ に対し　$M, M'\to\infty$ とすると．

$\left|\int_0^M f(x)\,dx-\int_0^{M'} f(x)\,dx\right|$

$=\left|\int_{M'}^M f(x)\,dx\right|$

$\leq\left|\int_{M'}^M |f(x)|\,dx\right|$ （∵ 三角不等式）

$\to 0$　（∵ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束）

より．Cauchy の判定条件から．

$\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)\,dx$ は存在する □

◎定理6.2より絶対収束することがわかれば．広義積分の収束がわかる。絶対収束するためのかんたんな十分条件を考えよう．

定理6.3

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 連続.

〈仮定〉

$\exists\lambda>1,\ \exists K>0$ s.t. $\forall x\in[0,\infty)$ に対して

$$x^\lambda|f(x)|\le K$$

〈結論〉

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束 $\square$

証明

$M\to\infty$ としたときに $\int_0^M|f(x)|dx$ が収束することを示せばよいが、Mについて単調増加なので有界であることを示せばよい。

(絶対収束でよく使う)

仮定より

$$|f(x)|\le\frac{K}{x^\lambda}\quad(\forall x\in[0,\infty))$$

だから.

$$\int_0^M|f(x)|dx\le\int_0^M\frac{K}{x^\lambda}dx$$

$$\le K\int_0^\infty\frac{1}{x^\lambda}dx=\frac{K}{\lambda-1}$$

$(\because$ 定理6.1$)$

だから. $\int_0^M|f(x)|dx$ は Mに関して有界となる

$\square$

系6.1

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, 連続. $\lambda>1$

$\lim_{x\to\infty}x^\lambda f(x)$ が存在

$\Rightarrow$ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束 $\square$

(証) $\lim_{x\to\infty} x^{\lambda} f(x)$ が存在するので，

$x^{\lambda} f(x)$ は $[0,\infty)$ 上有界となる．従って

定理 6.3 の仮定をみたす． □

例 6.7

$s>0$ に対して $\int_0^{s} e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束

(絶対収束) する． (証)

(証) 1. $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ を考える．

$0<s<1$ のとき．

$$e^{-x} x^{s-1} \to \infty \quad (x \to 0+)$$

である． $0<x\leq 1$ に対し

$$x^{1-s}(e^{-x} x^{s-1}) = e^{-x} \leq 1$$

より

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx \leq \int_0^1 x^{s-1} dx$$

$$= \frac{1}{1-s} < \infty$$

だから． $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する．

$s \geq 1$ のとき． $e^{-x} x^{s-1}$ は $x=0$ で発散

しないので． $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する

(広義積分でない)．

2. $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ について考える．

$$x^2(e^{-x} x^{s-1}) = e^{-x} x^{s+1} \to 0$$

$$(x \to \infty)$$

だから系 6.1 より $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$

は収束する □

定義6.4 (Γ-関数)

$s>0$ に対し

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

と定義する。$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を Γ-関数という。 $\boxed{\text{終}}$

命題6.1

Γ-関数について、次が成り立つ。

(1) $\Gamma(1) = 1$

(2) $s>0$ に対し $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $\boxed{\text{終}}$

命題6.1より $s>1$ に対し $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$ だから、

$\Gamma(1) = 0!$, $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1!$

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$

$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \times 2! = 3!$

$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4 \times 3! = 4!$

となるので

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$

となる。つまり、Γ-関数は階乗を $(0, \infty)$ に拡張したものである。