微分積分学 B 演習問題の未発表問題に対するヒント

問題 1.9.
$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + \cdots + {}_nC_n x^n$$

であった. $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ だから

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = {}_{\frac{1}{2}}C_0 + {}_{\frac{1}{2}}C_1 x + \cdots + {}_{\frac{1}{2}}C_n x^n + \cdots$$

と考えてみるとどうなるか？

問題 2.6.
問題を次のように修正してください.

(1) $-1 < x < 1$ に対して, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$ を求めよ.

(2) $\dfrac{d}{dx} \arctan x$ に注意して $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \, dx$ を求めよ.

(3) 形式的な計算 (積分と極限の交換や, $x = \pm 1$ でも実は等式が成立すること) を認めることにして.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

を導け.

問題 3.6.
講義ノートの定理 4.3

問題 3.7.
特にヒントなし.

問題 3.8.
特にヒントなし.

問題 4.6.
$x_0 \in (a, b)$ のまわりで, $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$ となることを示せ (「まわりで」がどういう意味かを考えよ.)

問題 4.10.
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $\displaystyle\inf_{m \in \mathbb{N}} a_m \leq a_n$ となることを使う.

問題 5.2.
教科書を見よ.

問題 5.4.
特にヒントなし.

問題 5.6.
n が大きいときのグラフを書いてみよ.

問題 5.7.

区間加法性を使う.

問題 5.8.

問題3.8 の結果を用いてよい.

問題 6.5.

定義域を注意してみる.

問題 6.7.

定義に戻って, 差分を計算せよ.

問題 8.5.

微分が 0 になることを示せば, 定数関数となることが示せる.

問題 8.6.

教科書を見よ.

問題 8.8.

a, b にある関数を代入して, Young の不等式を使ったあとに, 積分する

問題 9.3.

$\dfrac{d^k f}{dx^k}(x) = f^{(k)}(x)$ と書く. このとき,

$$\begin{aligned}\frac{d^n(fg)}{dx^n}(x) &= {}_nC_0 f^{(n)}(x)g^{(0)}(x) + {}_nC_1 f^{(n-1)}(x)g^{(1)}(x) + {}_nC_2 f^{(n-2)}(x)g^{(2)}(x)\\ &\quad + \cdots {}_nC_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) + \cdots {}_nC_n f^{(0)}(x)g^{(n)}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\end{aligned}$$

と推測できる. 帰納法の仮定を使えば

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}(fg)}{dx^{n+1}}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\right)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right)\\ &= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \left(\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)\right)\\ &\quad + \left(\sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right) + f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)\end{aligned}$$

となるが, 和の片方を $l = k+1$ とおきかえるとどうなるかを考えよ.

問題 9.5.

ヒントなし

問題 9.6.
ヒントなし

問題 9.7.
(2) は
$$\left|e^x - \left(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right)\right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$
を示せばよい．Taylor の定理を使うと左辺はどう書けるか考えよ．

問題 10.2.
(2) は (1) の式をヒントの式に従って代入してみる．

問題 10.3.
ヒントなし．1 回目の発表者に限る．

問題 10.4.
ヒントなし．

問題 10.8.
f の Taylor-Maclaurin 展開より
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R(x)$$
として，$R(x)$ を定めたときに，$\dfrac{R(x)}{x^2} \to 0$ $(x \to 0)$ であった．これを代入してみるとどうなるか？

問題 10.9.
ヒントなし．

問題 11.5.
log の性質を使わずに，積分の性質のみで等号を証明せよ．(1) では $\displaystyle\int_a^{ab} \frac{1}{\xi}\, d\xi$ をうまく変数変換してみよ．

問題 12.3.
f のグラフを適当に書いてみる．$f(k) = f(k)(k-(k-1))$ となることを用いるとどうなるか？この書き方が何を意味しているのかを考えよ．

問題 12.4.
正項級数の収束判定法がどういうものかを考えよ．

問題 12.5.
$\displaystyle\int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$ とわけて考える．

問題 12.6.
(1) は部分積分をするだけ．(2) は，まず $B(p,1)$ や $B(1,q)$ を求めてみよ．

問題 12.7.
定理 6.3 や系 6.1 を用いる．(2) は積分範囲を $(0,1]$ と $[1,\infty)$ にわける必要がある．

問題 12.8.

ヒントなし.

問題 12.9.

(3) は単に問題文の等式を認めると, 何が求まるかを確かめるだけ.

定理.

$n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ に対して

$$ {}_nC_{k-1} + {}_nC_k = {}_{n+1}C_k $$

証明.

1. X を変数とすると

$$ (1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k X^k $$

と書けた．従って

$$ (1+X)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k X^k \tag{$*$} $$

である．

2. $(1+X)^{n+1} = (1+X)(1+X)^n$ に注意すると

$$ (1+X)^{n+1} = (1+X)(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k X^k + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k X^{k+1} $$

となる．右辺第二項について $k+1 = l$ とおきかえると

$$ \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k X^{k+1} = \sum_{l=1}^{n+1} {}_nC_{l-1} X^l $$

となるから，l を k にもどしてみると

$$ (1+X)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k X^k + \sum_{k=1}^{n+1} {}_nC_{k-1} X^k = {}_nC_0 + \sum_{k=1}^{n} ({}_nC_k + {}_nC_{k-1}) X^k + {}_nC_n X^{n+1} $$

となる．$(*)$ と係数を比較すれば ${}_nC_k + {}_nC_{k-1} = {}_{n+1}C_k$ がわかる． $\square$