微分積分学 B 演習問題 (微分積分)　　(2014 年 7 月 24 日)

高校の教科書の例題程度の問題である. この程度の問題ができないようでは, 微分積分学 B の単位を取ることは難しい. 夏休みのうちに確認しておくこと.

問題 1.

次の関数を変数 x について微分せよ.

(1) $y = (x^3 - 2x)(3x^4 + 1)$

(2) $y = \dfrac{1}{2x+3}$

(3) $y = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$

(4) $y = \sqrt[4]{x^3}$

(5) $y = \sqrt[3]{x^2+4}$

(6) $y = \sin(2x-3)$

(7) $y = \cos^2 x$

(8) $y = \dfrac{1}{\tan x}$

(9) $y = x\sin x + \cos x$

(10) $y = \log(2x)$

(11) $y = \log_2(3x+2)$

(12) $y = x\log(3x)$

(13) $y = e^{2x}$

(14) $y = a^{-2x}$ (a は定数)

(15) $y = xa^x$ (a は定数)

問題 2.

関数 $y = e^x \sin x$ は次の等式 (微分方程式) をみたすことを示せ.

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

問題 3.

$y > 0$ とする. 楕円 $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ で定められる x の関数 y について, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

問題 4.

曲線 $y = \sqrt{x}$ の点 B$(1,1)$ における接線と法線の方程式を求めよ.

問題 5.

楕円 $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ の点 B$(2,1)$ における接線と法線の方程式を求めよ.

問題 6.

次の関数に対して, 極大, 極小, 変曲点, 凹凸を調べて増減表を書け. さらにグラフの概形を書いてみよ.

(1) $x \neq 1$ となる実数 x に対して, 関数 $y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

(2) 実数 x に対して, 関数 $y = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$.

(3) $-1 \leq x$ に対して, 関数 $y = |x|\sqrt{x+1}$.

(4) $-2 \leq x \leq 2$ に対して, 関数 $y = x + \sqrt{4-x^2}$.

(5) $0 < x < 2\pi$ に対して, 関数 $y = x + \sin x$.

(6) 実数 x に対して, 関数 $y = e^{-2x^2}$.

(7) $x \neq 1$ となる実数 x に対して, 関数 $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

問題 7.

$x > 0$ のとき 不等式 $e^x > 1 + x$ が成り立つことを示せ.

問題 8.

点 P の座標 (x, y) が, 時刻 t の関数として,

$$x = r\cos(\omega t), \quad y = r\sin(\omega t)$$

で表わされるとき, 点 P の速さと加速度の大きさを求めよ. ただし, $r, \omega > 0$ は定数とする.

問題 9.

次の不定積分を求めよ. ただし, 積分定数は記述しなくてよい.

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^2 x \sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(6) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

(7) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(8) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x+1}\,dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(11) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

問題 10.

次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\cos x|\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{3-x}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ($a > 0$ は定数)

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

問題 11.

次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}\right)$$

問題 12.

$0 \le x \le 1$ に対して, $1 \le 1 + x^2 \le 1 + x$ を用いて次の不等式を示せ.

$$\log 2 \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \le 1$$

問題 13.

自然数 n に対して, 次の不等式を示せ.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$$

問題 14.

区間 $0 \leq x \leq \pi$ において, 曲線 $y = \sin x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

問題 15.

区間 $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{5}{4}\pi$ において, 2 つの曲線 $y = \sin x$, $y = \cos x$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

問題 16.

曲線 $y = \log x$ と x 軸, y 軸, および直線 $y = 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

問題 17.

底面の半径が r, 高さが h である円錐の体積を求めよ.

問題 18.

$\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ における曲線 $y = \cos x$ と x 軸および直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を, x 軸のまわりに一回転させてできる立体の体積を求めよ.

問題 19.

積分を用いて, 半径 r の球の体積が $\dfrac{3}{4}\pi r^3$ となることを示せ.

問題 20.

次のサイクロイドの長さを求めよ.

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t)$$

問題 21.

$0 \leq x \leq 1$ における曲線 $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の長さを求めよ.

問題 22.

数直線上を動く点 P の時刻 t における速度が $\sin(\pi t)$ であるとする. $t = 0$ から $t = 3$ までに, P の位置はどれだけ変化するか？また, 動いた道のりを求めよ.

問題 23.

点 P の座標 (x, y) が, 時刻 t の関数として,

$$x = e^{-t}\cos(\pi t), \quad y = e^{-t}\sin(\pi t)$$

で表わされるとき, $t = 0$ から $t = 2$ までの間に点 P が動く道のりを求めよ.

微分積分学 B 演習問題　(2014 年 9 月 25 日)

問題 1.1.

次の関数を微分せよ.

(1) x^x
(2) $(x^2+1)^{\frac{p}{2}}$ (p は定数)
(3) $\dfrac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ ($a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ は定数)
(4) $\sqrt{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

問題 1.2.

逆関数の微分公式を利用して, 次の関数の微分を求めよ.

(1) $\arcsin x$
(2) $\arccos x$
(3) $\arctan x$
(4) $\log x$

問題 1.3.

$\sin x$ の形式的な Taylor-Maclaurin 展開

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

に対して, a_0 から a_5 を求めよ.

問題 1.4.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\log(1+x)-x}$ を求めよ.

問題 1.5.

$p>1$ に対して, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in(0,\infty)$ に対して $f(x): -x^p$ で定める.

(1) f が凸関数であることを示せ.
(2) $a,b>0$ に対して, $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p+b^p)$ となることを示せ.

問題 1.6.

無限回微分可能な関数 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ に対して中心差分公式

$$\frac{f(h)-f(-h)}{2h}\to f'(0)\quad (h\to 0)$$

を示せ.

問題 1.7.

次の関数を微分せよ.

(1) $\sinh x$
(2) $\cosh x$
(3) $\tanh x$
(4) $\dfrac{1}{\tanh x}$

問題 1.8.

数学的帰納法を用いて, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$$

を示せ.

問題 1.9.

$\sqrt{1+x}$ の形式的な Taylor-Maclaurin 展開

$$\sqrt{1+x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

に対して, a_0 から a_5 を求めよ. さらに $n, k \in \mathbb{N}$ に対して定義されていた二項係数 ${}_nC_k$ を $n > 0$ に対して

$${}_nC_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

と拡張することによって何が成り立ちそうかを考えてみよ (ヒント: $(1+x)^n$ を二項係数を用いてどう書けていたかを思い出してみよ).

微分積分学 B 演習問題　(2014 年 10 月 2 日)

問題 2.1.

$n, m \in \mathbb{N}$ に対して, 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx$

問題 2.2.

常微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 x(t), & t > 0 \\ x(0) = a > 0 \end{cases}$$

をとけ. 解は爆発するか？

問題 2.3.

$1 < p < \infty$ に対して, 常微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = x^p(t), & t > 0 \\ x(0) = a > 0 \end{cases}$$

をとけ. 解はいつ爆発するか？

問題 2.4.

$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ を区分求積法を用いて求めよ.

問題 2.5.

$y > 0$ に対して, 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^y \frac{1}{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^y \log x\,dx$

問題 2.6.

次の問いに答えよ.

(1) $-1 < x < 1$ に対して, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\arctan x$ に注意して $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k\,dx$ を求めよ.

(3) 形式的な計算 (積分と極限の交換や, $x = \pm 1$ でも実は等式が成立すること) を認めることにして,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots$$

を導け.

問題 2.7.

$\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ に対して $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ. 次に $\displaystyle\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するための $\alpha > 0$ の条件を求めよ.

問題 2.8.

$\alpha > 0$, $M > 0$ に対して $\displaystyle\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ. 次に $\displaystyle\lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するための $\alpha > 0$ の条件を求めよ.

微分積分学B 演習問題　(2014 年 10 月 9 日)

問題 3.1.
区分求積法を用いて $\int_0^1 x^3\,dx$ を求めよ.

問題 3.2.
区分求積法を用いて $\int_0^2 x^2\,dx$ を求めよ. また, 有限和がグラフのどの部分に対応しているのかを明示すること. ただし, 分割数を n とすること ($2n$ としないこと).

問題 3.3.
区分求積法を用いて $\int_1^2 x^2\,dx$ を求めよ. また, 有限和がグラフのどの部分に対応しているのかを明示すること.

問題 3.4.
連続な関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ は $x\in[0,1]$ に対して $f(x)\geq 0$ であるとする. このとき, x 軸, y 軸, $x=1$, グラフ $y=(x)$ で囲まれた領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $\pi\int_0^1 (f(x))^2\,dx$ で表されることを, 区分求積法を用いて説明せよ.

問題 3.5.
連続な関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ は $x\in[0,1]$ に対して $f(x)\geq 0$ であるとする. このとき, x 軸, y 軸, $x=1$, グラフ $y=(x)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$ で表されることを, 区分求積法を用いて説明せよ.

問題 3.6.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が有界な単調増加関数であれば, Riemann 積分可能であることを証明せよ.

問題 3.7.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上一様連続であるとする. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上一様連続であることの定義を osc を用いて記述せよ.

問題 3.8.
$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $x\in[0,1]$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

で定義する (f を Dirichlet の関数という).

(1) f の $[0,1]$ 上の Riemann 下積分を求めよ (ヒント: $\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ を $[0,1]$ の分割としたときに $\inf_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x)$ がどうなるか考えよ).

(2) f の $[0,1]$ 上の Riemann 上積分を求め, f が $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能でないことを示せ.

問題 3.9.

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $x \in [0,1]$ に対して

$$g(x) := \begin{cases} 0 & x \text{ が有理数} \\ 1 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

で定義する.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を求めよ.

注意.

$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ とならない. 実際, g は Riemann 積分可能でない (問題 3.8). また, Riemann 積分を拡張した Lebesgue 積分を考えると, g は Lebesgue 積分可能となるが, $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 1$ となることが知られている.

微分積分学 B 演習問題　(2014 年 10 月 16 日)

問題 4.1.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < c < b$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx + 2\varepsilon \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

を示せ.

問題 4.2.

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ は連続で, $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$ となるが, $f \not\equiv 0$ となる例をあげよ (ヒント: 定理 4.6 の仮定とどう違うのか注意せよ).

問題 4.3 (積分の三角不等式)**.**

$a < b$ とし, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続であるとする[1]. このとき

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{4.1}$$

を示せ (ヒント: $-|f| \leq f \leq |f|$ に定理 4.5 を使う). なお, (4.1) を**積分の三角不等式**という.

注意.

問題 4.3 で $a < b$ と断っているのには意味がある. $a < b$ の大小関係が逆になっている, すなわち $b < a$ のときでも (4.1) を考えることはできるが, このときに (4.1) の右辺は 0 以下になってしまうので, 不等式は一般には成立しない. $b < a$ のことも考えると

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|$$

とするのが正しい.

問題 4.4 (積分の Schwarz の不等式)**.**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続であるとする[2]このとき

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx \right) \left(\int_a^b (g(x))^2\,dx \right) \tag{4.2}$$

を示せ (ヒント: $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_a^b (f(x) + tg(x))^2\,dx \geq 0$$

に注意して, t に関する判別式を考えよ). なお, (4.2) を**積分の Schwarz の不等式**という.

---

[1]実は, f の仮定は Riemann 積分可能でもよい. ただし, そのときは $|f|$ が Riemann 積分可能となることを示さないといけない.

[2]実は, f の仮定は Riemann 積分可能でもよい. ただし, そのときは fg が Riemann 積分可能となることを示さないといけない.

問題 4.5.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ は Riemann 積分可能であるとする．このとき，$f+g$ が $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能であることを認めて，

$$\int_0^1 f(x)+g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$$

を示せ (ヒント: 左辺について区分求積法を考える).

問題 4.6.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続で，「すべての $x\in[a,b]$ に対して，$f(x)\geq 0$」かつ「ある $x_0\in(a,b)$ が存在して $f(x_0)>0$」とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx>0 \tag{4.3}$$

を示せ．さらに，f が連続でないとき (4.3) が成立しない反例をあげよ．

問題 4.7.

次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

問題 4.8.

次の各問いに答えよ．

(1) 次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx\leq\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx\leq\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx.$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ を計算せよ．さらに電卓を用いることで，円周率がおよそ 3.14 であることを確かめよ．

問題 4.9.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続で，「すべての $x\in[a,b]$ に対して，$f(x)\geq 0$」かつ「$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=0$」を仮定する．このとき，任意の $x\in[a,b]$ に対して，$f(x)=0$ となることを示せ．

問題 4.10.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ に対して

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)\geq\inf_{n\in\mathbb{N}}a_n+\inf_{n\in\mathbb{N}}b_n$$

を示せ．また，不等式が等式では成り立たない $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ の例をあげよ．

微分積分学 B 演習問題　(2014 年 10 月 23 日)

問題 5.1 (積分の第二平均値定理)**.**
　有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能で, $g \geq 0$ (つまり, すべての $x \in [a,b]$ に対して $g(x) \geq 0$) とする. このとき, $\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \lambda \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ が存在して

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lambda \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ (ヒント: $g(x) \inf_{y \in [a,b]} f(y) \leq f(x)g(x) \leq g(x) \sup_{y \in [a,b]} f(y)$ に注意して, 定理 4.8 のように示す).

問題 5.2 (Riemann 和)**.**
　有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ に対して

$$R[\Delta : \{\xi_k\}_{k=1}^n] := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を Δ, $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ に関する f の **Riemann 和**という (吹田・新保, 第 4 章 §1 を参照).

(1) グラフを用いて, Riemann 和がどのようなものかを説明せよ.
(2) f が Riemann 積分可能であるとき, ${\xi_k}_{k=1}^n$ の取り方に関係なく

$$R[\Delta : \{\xi_k\}_{k=1}^n] \to \int_a^b f(x)\,dx \quad (|\Delta| \to 0)$$

となることを説明せよ (ヒント: $s_\Delta(f) \leq R[\Delta : \{\xi_k\}_{k=1}^n] \leq S_\Delta(f)$ となることを確かめたあとに, Darboux の定理を用いる).

問題 5.3 (会津大 '07, 北九州市大 '06, 同志社大・工 '04)**.**
　次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$
(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\frac{\pi k}{n}$
(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+2k}{n^2+nk+k^2}$
(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$

問題 5.4 (埼玉大 '07)**.**
　半径 1 の円に内接する正 n 角形の異なる 2 つの頂点を結ぶ線分 (辺と対角線) の総数を M_n, それらの長さの総和を L_n とするとき, $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{M_n}$ を求めよ.

問題 5.5.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $x \in [0,1]$ に対し

$$f_n(x) := \begin{cases} 4n^2 x & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n} \\ 4n - 4n^2 x & \dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

と定める.

(1) f_n のグラフを書け (ヒント: それぞれの場合わけは一次関数だから...).

(2) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ (まじめに計算してもいいし, グラフを用いてもよい).

問題 5.6.

問題 5.5 の記号をそのまま用いる.

(1) $x \in (0,1)$ に対して, $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ となることを説明せよ.

(2) 積分と極限の交換

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

としてはいけないことを説明せよ.

問題 5.7.

$a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \dfrac{1}{2}$, $a_4 = \dfrac{1}{3}$, $a_5 = \dfrac{2}{3}$, $a_6 = \dfrac{1}{4}$, $a_7 = \dfrac{2}{4}$, $a_8 = \dfrac{3}{4}$, $a_9 = \dfrac{1}{5}$, $a_{10} = \dfrac{2}{5}, \ldots$ として, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $x \in [0,1]$ に対して

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & x \in \{a_1, a_2 \ldots, a_n\} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおく.

(1) f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 について, それぞれグラフを書け.

(2) $n = 1,2,3,4,5$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ.

問題 5.8.

問題 5.7 の記号をそのまま用いる. また, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を問題 3.8 で定めた Dirichlet の関数とする. すなわち

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x\ \text{が有理数} \\ 0 & x\ \text{が無理数} \end{cases}$$

である.

(1) すべての $x \in [0,1]$ に対して, $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ となることを説明せよ.

(2) 積分と極限の交換

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

としてはいけないことを説明せよ.

微分積分学B 演習問題　(2014年10月30日)

問題 6.1.

定義に基づいて, 微分を求めよ.

(1) x^n
(2) $\sin x$
(3) e^x
(4) $\log x$ $(x > 0)$

問題 6.2.

$f, g \in C^1(a,b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ に対して, 次を示せ.

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

問題 6.3.

$f, g \in C^1(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ に対して, 積の微分公式

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

を差分を用いずに示せ. つまり講義ノートの定理 5.1 を用いて示せ.

問題 6.4.

$f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = g(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能であるとする. このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対して合成関数の微分公式

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x) = \frac{dg}{dy}(f(x))\frac{df}{dx}(x)$$

を (高校の教科書のように) 差分を用いて説明せよ. このときに, 何に注意しないといけないかを指摘せよ.

問題 6.5.

講義の例 5.1 は定理 5.3 を直接適用できない意図的な間違いがある. その部分を指摘し, 定理 5.3 を例 5.1 にも適用可能になるようにするにはどうすればよいかを説明せよ.

問題 6.6.

次の関数 $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ について, 定義に基づいて $x = 0$ での微分可能性を調べよ.

(1) $f(x) = |x|$
(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

問題 6.7.

$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ は連続とする. このとき, $xf(x)$ は $x = 0$ で微分可能となることを定義に基づいて示せ.

問題 6.8.

$f, g, h \in C^1(a,b)$ に対して, 次を示せ.

$$\frac{d(fgh)}{dx} = \frac{df}{dx}gh + f\frac{dg}{dx} + fg\frac{dh}{dx}.$$

微分積分学 B 演習問題　(2014 年 11 月 6 日)

問題 7.1.

$r > 0$ に対して

$$x = r\cos\frac{\theta}{r} \quad y = r\sin\frac{\theta}{r}$$

とおく.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\left(\dfrac{dx}{d\theta}(\theta)\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}(\theta)\right)^2$ を求めよ.

問題 7.2 (曲率)**.**

問題 7.1 の記号をそのまま用いる.

(1) ベクトル $\left(\dfrac{d^2x}{d\theta^2}(\theta), \dfrac{d^2y}{d\theta^2}(\theta)\right)$ とベクトル $\left(\dfrac{dx}{d\theta}(\theta), \dfrac{dy}{d\theta}(\theta)\right)$ が θ に関係なく直交することを示せ.

(2) $\left(-\dfrac{dy}{d\theta}(\theta), \dfrac{dx}{d\theta}(\theta)\right)$ は $\left(\dfrac{dx}{d\theta}(\theta), \dfrac{dy}{d\theta}(\theta)\right)$ と直交するので, $\kappa = \kappa(\theta)$ を用いて

$$\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}(\theta), \frac{d^2y}{d\theta^2}(\theta)\right) = \kappa(\theta)\left(-\frac{dy}{d\theta}(\theta), \frac{dx}{d\theta}(\theta)\right)$$

と書ける. $\kappa(\theta)$ を求めよ.

注意.

$\kappa(\theta)$ は曲線の曲がり具合をあらわす量である. この量を**曲率**という. また, $R = \dfrac{1}{\kappa(\theta)}$ を**曲率半径**という. 曲率半径は高速道路や鉄道の (急な) カーブに表示されていることがある.

問題 7.3.

次の関数の微分を逆関数の微分公式を用いて計算せよ.

(1) $\sqrt{x}$ $(x > 0)$

(2) e^x ($y > 0$ に対して $\dfrac{d\log}{dy}(y) = \dfrac{1}{y}$ は用いてよい)

問題 7.4.

$f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $a < b$ とする. 次を証明せよ.

(1) (置換積分法) $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(\xi)\,d\xi$

(2) (部分積分法) $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + [f(x)g(x)]_a^b$

問題 7.5 (Cauchy の平均値定理)**.**

$f, g \in C^1(a,b) \cap C([a,b])$ はすべての $x \in (a,b)$ に対して $g'(x) \neq 0$ とする．このとき，$a < \theta < b$ が存在して

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

とできることを示せ (ヒント: $\phi(x) = (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)) - (f(b)-f(a))(g(x)-g(a))$ とおく)

問題 7.6.

$f \in C^1(\mathbb{R})$ は導関数が有界，すなわち，ある $K > 0$ が存在して，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left| \frac{df}{dx}(x) \right| \leq K$$

をみたすとする．このとき，f は Lipschitz 連続であること，すなわち，ある定数 $L > 0$ が存在して，すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

とできることを示せ.

問題 7.7.

$f \in C^1(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $0 < t < 1$ に対して，合成関数の微分公式を用いて $\dfrac{d}{dt} f(ta + (1-t)b)$ を計算せよ.

(2) 次の等式

$$f(a) - f(b) = \left(\int_0^1 \frac{df}{dx}(ta + (1-t)b)\, dt \right)(a - b)$$

を示せ.

問題 7.8.

$\phi \in C^1(-1,1) \cap C([-1,1])$ は $\phi(-1) = \phi(1) = 0$ とする．$|x|$ は $x = 0$ の点で微分できないが，それでも

$$H(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

と定めると

$$-\int_{-1}^1 |x| \phi'(x)\, dx = \int_{-1}^1 H(x)\phi(x)\, dx$$

となることを示せ.

微分積分学 B 演習問題　(2014 年 11 月 13 日)

問題 8.1.

$f \in C^1(a,b)$ とする.

(1) 「f が (a,b) 上単調減少」ならば「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) \leq 0$」を示せ.

(2) 「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) \leq 0$」が成り立つならば「f が (a,b) 上単調減少」が成り立つことを示せ.

問題 8.2.

$f \in C^1(a,b)$ とする. f が定数関数ならば, すべての $x \in (a,b)$ に対して, $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$ となることを示せ.

問題 8.3.

$-1 < x < 1$ とする.

(1) $\arcsin x + \arccos x$ の微分を計算せよ.

(2) $\arcsin x + \arccos x$ を求めよ.

問題 8.4.

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

を示せ.

問題 8.5.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は, ある $K > 0$, $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{1+\alpha}$$

をみたすとする. このとき, f は定数関数となることを示せ (ヒント: 微分が 0 になることを示せばよい).

問題 8.6.

$f \in C(-1,1)$ は $x = 0$ 以外で微分可能であるとする. このとき有限な極限 $\lim_{x \to 0} f'(x) = l$ が存在するならば, f は $x = 0$ でも微分可能となり, $f'(0) = l$ となることを証明せよ.

問題 8.7.

$p, q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすとする.

(1) $x \geq 0$ に対して, $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q} - x \geq 0$ となることを示せ.

(2) 上を利用して, $a, b > 0$ ならば

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{8.4}$$

を示せ. (8.4) の不等式を **Young** の不等式という. $p = q = 2$ のときは, 相加・相乗の不等式である.

問題 8.8 (Hölder の不等式)**.**

$p, q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすとする．$f, g \in C([a,b])$ は $|f(x)| \not\equiv 0$, $|g(x)| \not\equiv 0$, をみたすとする．このとき

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つことを示せ．なお, この不等式を **Hölder の不等式**という (ヒント: $\dfrac{|f(x)|}{(\int_a^b |f(y)|^p\,dy)^{\frac{1}{p}}}$, $\dfrac{|g(x)|}{(\int_a^b |g(y)|^q\,dy)^{\frac{1}{q}}}$ に Young の不等式を用いて, $a \leq x \leq b$ で積分してみよ).

微分積分学 B 演習問題　(2014 年 11 月 26 日)

問題 9.1.

$n=3$ のときに Taylor の定理を証明せよ.

以下

$$C^\infty(a,b) := \{f : (a,b) \to \mathbb{R}, f \text{ は } (a,b) \text{ 上で何回でも微分可能 }\}$$

とおく.

問題 9.2.

$f, g \in C^\infty(a,b)$ とする. 次の導関数を求めよ.

(1) $\dfrac{d^2(fg)}{dx^2}(x) \quad x \in (a,b)$

(2) $\dfrac{d^3(fg)}{dx^3}(x) \quad x \in (a,b)$

(3) $\dfrac{d^4(fg)}{dx^4}(x) \quad x \in (a,b)$

問題 9.3 (Leibniz rule)**.**

$f, g \in C^\infty(a,b)$, $x \in (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$ とする. $\dfrac{d^n(fg)}{dx^n}(x)$ を推測し, 数学的帰納法を用いて証明を与えよ.

問題 9.4.

$-1 < x < 1$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ を求めよ.

(2) $\dfrac{1}{1+x}$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ. すなわち, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{1+x} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + R_n(x), \quad \frac{R_n(x)}{x^n} \to 0 \quad (x \to 0)$$

が成り立つときの a_n を求めよ.

(3) 形式的に積分を計算することで, $\log(1+x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ.

問題 9.5.

$-1 < x < 1$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(\arctan(x))$ を求めよ.

(2) $\dfrac{d}{dx}(\arctan(x))$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ (ヒント: $\dfrac{1}{1+x^2}$ は初項 1, 公比 $-x^2$ の等比級数の和).

(3) 形式的に積分を計算することで, $\arctan(x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ. そして, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\dfrac{d^n(\arctan)}{dx^n}(0)$ を求めよ.

問題 9.6.

$a>0$ に対して $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ を示せ (ヒント: 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, $n\geq[2a]+1$ ならば

$$0\leq\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{[2a]}\cdot\frac{a}{[2a]+1}\cdots\frac{a}{n}\leq\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{[2a]}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-[2a]}$$

となる (理由を書くこと). $n\to\infty$ とするとどうなるか？).

問題 9.7.

(簡単のため)$x>0$ とする[3]. 次の問いに答えよ.

(1) $n\in\mathbb{N}$ に対して, n と x に依存する定数 $0<\theta_n<x$ が存在して

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

と書けることを示せ.

(2) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ となることを示せ. すなわち

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n\to e^x\quad(n\to\infty)$$

となることを示せ.

問題 9.8.

$x\in\mathbb{R}$ に対して, $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ となることを示せ.

問題 9.9.

$x\in\mathbb{R}$ に対して, $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ となることを示せ.

注意.

問題 9.7, 9.8, 9.9 は証明は別にして, 結果を覚えておくこと (巾級数の性質を用いると, もう少し簡単に証明ができる).

問題 9.10.

次の極限を求めよ. ただし, ロピタルの定理を使ってはいけない.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\quad(a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}$ (ヒント: Taylor の定理を用いて, $x>0$ に対して

$$e^x\geq 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4$$

を示せ)

[3]以下の問題は $x<0$ でも成立する.

微分積分学B 演習問題　(2014 年 12 月 3 日)

問題 10.1.

de l'Hospital の定理を用いて, 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\quad(a, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$

定理 (de l'Hospital の定理)**.**

$f, g\in C(\mathbb{R})$ は $x\to\infty$ のときに $f(x), g(x)\to 0$ (または ∞) とする. このとき, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

問題 10.2.

上記 de l'Hospital の定理を示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $x>0$ に対して, $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right), \frac{d}{dx}\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})}$ に注意して, $f(x), g(x)\to 0$ $(x\to\infty)$ のときに, 上記の de l'Hospital の定理を示せ. なお, 定理 5.13 は用いてよい.

問題 10.3.

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^4}$

(2) $\alpha>0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}$

問題 10.4.

$\gamma\geq 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\log(1+x)}{x^\gamma}$ を考える.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\log(1+x)}{x^\gamma}=0$ となる $\gamma\geq 0$ の範囲を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\log(1+x)}{x^\gamma}$ が発散する $\gamma\geq 0$ の範囲を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\log(1+x)}{x^\gamma}$ が 0 でない値に収束する γ の値を求めよ.

定義 (位数と Landau 記号)**.**

$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ と $\gamma\geq 0$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x\gamma}$ が 0 でない値に収束するとき, f は $x\to 0$ のとき γ **位の無限小**という. このとき,

$$f(x)=O(x^\gamma)\quad(x\to 0)$$

と書く[4].

[4] Landau の large O という. 小文字の o にも別の意味があるので, 大文字か小文字かはわかるように大きさを調節して書くこと.

注意.

f が $x \to 0$ のとき γ 位の無限小であるということは, 感覚的には, $x=0$ の付近では

$$f(x) \cong ax^\gamma + (x^\gamma \text{より高次の項})$$

と書けることを意味している.

問題 10.5.

次の関数は $x \to 0$ としたときに何位の無限小となるかを求めよ.

(1) $1 - \cos x$

(2) $\sin 3x - 3\sin x$

問題 10.6.

凸関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と, $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$, $0 < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 1$ に対して, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ならば

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3))$$

となることを示せ (ヒント: まず, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_2)\left(\dfrac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{1-\lambda_1}\right)$ と変形してから, 凸関数の定義を用いる. つぎに, $1 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$ に注意して, 定義をもう一度使う).

問題 10.7 (相加相乗平均)**.**

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = -\log \quad (x \in (0,\infty))$ で定義する.

(1) f が $(0,\infty)$ 上の凸関数であることを示せ.

(2) $a_1, a_2, a_3 > 0$ に対して, 相加相乗平均の不等式 $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ を示せ.

問題 10.8.

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

を示せ (ヒント: Taylor-Maclaurin 展開を使う).

問題 10.9 (吸田・新保 p.69)**.**

次の極限を求めよ. de l'Hospital の定理を用いる方法と, Taylor-Maclaurin 展開を使う方法の両方を試してみよ (Taylor-Maclaurin 展開が難しい問題もある).

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x} - e}{\log(\sin x)}$

(5) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$ (ヒント: $x^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x}\log x)$)

(8) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a, b > 0)$

(9) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

(10) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \log x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

微分積分学B 演習問題　(2014年12月10日)

問題 11.1.

次の問いに答えよ.

(1) $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ は $[a,b)$ 上連続とする. このとき, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の定義を与えよ.

(2) 定義にもとづいて $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx$ を求めよ.

問題 11.2.

$\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めたい.

(1) $\alpha \neq 1$ のときに $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

(2) $\alpha = 1$ のときに $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

問題 11.3.

次の問いに答えよ.

(1) $f : (-\infty,a] \to \mathbb{R}$ は $(-\infty,a]$ 上連続とする. このとき, 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ の定義を与えよ.

(2) 定義にもとづいて $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ を求めよ.

問題 11.4.

$\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めたい.

(1) $\alpha \neq 1$ のときに $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

(2) $\alpha = 1$ のときに $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

問題 11.5.

$x > 0$ に対して,

$$\log(x) := \int_1^x \frac{1}{\xi}\,d\xi$$

と定義する[5].

(1) $a, b > 0$ に対して, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ となることを示せ.

(2) $x \leq 0$ に対して,

$$\log(x) := \int_1^x \frac{1}{\xi}\,d\xi$$

と定義することはできない. この理由を説明せよ.

[5]この講義では, 初等関数 (指数関数や三角関数, 対数関数) の厳密な定義を与えていない. 初等関数を数学的 (客観的) に定義するのは, 実はそんなに簡単ではない.

問題 11.6.

$\lambda > 0$ に対して

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\lambda}$$

を考える. $t = \log x$ と変数変換することにより, 次を示せ.

(1) $\lambda \leq 1$ のとき, 広義積分は発散する.

(2) $\lambda > 1$ のとき, 広義積分は収束する.

問題 11.7.

$\alpha, \beta > 0$, $M > 0$ に対して,

$$I_M := \int_0^M e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$$

を考える.

(1) 部分積分を 2 回用いることにより, I_M を M, α, β を用いて表せ.

(2) $M \to \infty$ とすることにより, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$ を求めよ.

問題 11.8.

$\alpha, \beta > 0$ に対して, 広義積分

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx$$

を求めよ.

問題 11.9.

次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx$

微分積分学B 演習問題 (2014年12月17日)

問題 12.1.

$f:(0,1]\to\mathbb{R}$ は $(0,1]$ 上連続とする.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ が絶対収束することの定義を与えよ.

(2) $0<\lambda<1$ と $K>0$ が存在して, すべての $x\in(0,1]$ に対して

$$x^\lambda|f(x)|\le K$$

を仮定する. このとき, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は絶対収束することを証明せよ.

問題 12.2.

Γ-関数について, 次を示せ.

(1) $\Gamma(1)=1$.

(2) $s>0$ に対して, $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ (ヒント: 部分積分法を用いる).

定理 (正項級数の収束判定法)**.**

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は単調減少かつ「すべての $x\ge 0$ に対して, $f(x)>0$」であるとする. このとき, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が収束するならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n)$ も収束する[6].

問題 12.3.

正項級数の収束判定法を証明したい. 次の問いに答えよ.

(1) $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$f(k)\le\int_{k-1}^k f(x)\,dx$$

であることを示せ.

(2) $M\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=1}^M f(k)\le\int_0^M f(x)\,dx$$

となることを示せ.

(3) $M\to\infty$ とすることで定理を証明せよ.

問題 12.4 (Riemann の zeta 関数)**.**

$s>1$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$ が収束することを示せ (ヒント: $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{x^s} & x\ge 1\end{cases}$ として, 正項級数の収束判定法を用いる).

---

[6] 実は逆も成立する

問題 12.5 (Beta 関数)**.**

$p, q > 0$ とするとき,

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束することを示せ. この関数 B を **Beta 関数**という.

問題 12.6.

B を Beta 関数とする. 次を示せ.

(1) $p, q > 0$ に対して $B(p, q+1) = \dfrac{q}{p} B(p+1, q)$

(2) $p, q \in \mathbb{N}$ に対して $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

問題 12.7.

次の広義積分が収束することを示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$

問題 12.8.

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ はすべての $x \geq 0$ に対して $f(x) \geq 0$ とし, 広義積分

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

は収束するとする.

(1) f が単調減少のとき, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を示せ (ヒント: 背理法を用いる. 単調減少なことから, lim は inf におきかえられることを使う).

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ とならない例を作れ (ヒント: 不連続な関数で作る方が簡単).