微分積分学 B 中間試験問題

2014 年 11 月 20 日 第 1 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $(1+a)^x$ を微分せよ. ただし, $a>0$ は定数である.

(2) $e^{-\frac{1}{x}}$ を微分せよ.

(3) $\arctan x$ を微分せよ.

(4) $\sqrt{3+x^2}$ を微分せよ.

(5) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接線の方程式を求めよ. なお, 答えは一次関数 $y=ax+b$ の形で書くこと.

(6) $y=x+2\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ の最大値を求めよ.

(7) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\sin(3x)\,dx$ を計算せよ.

(8) $\dfrac{1}{(1+x^2)}$ の原始関数を一つ求めよ.

(9) $\displaystyle\int_0^1 (1+a)^x\,dx$ を計算せよ. ただし, $a>0$ は定数とする.

(10) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ を求めよ.

(11) $0<a\le 2\pi$ とする. $0\le t\le a$ に対して, 次のサイクロイドの長さを a を用いて表せ.

$$x=2(t-\sin t), \quad y=2(1-\cos t)$$

(12) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(13) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ に対して, 区分求積法とは何かを述べよ. なお**仮定**をきちんと書くこと.

(14) $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ が Riemann 積分可能となるための十分条件を一つ述べよ. なお, **Riemann 上積分や Riemann 下積分を用いてはいけない.**

(15) $[0,1]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の線形性とは何か？主張を述べよ.

(16) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は Riemann 積分可能であるとする．このとき, 積分の平均値定理を述べよ.

(17) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ が $x=0$ で微分可能であることの定義を述べよ.

(18) $F:(0,2)\to\mathbb{R}$ に対して, $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ が F の原始関数であることの定義を述べよ.

(19) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能であるとする．このとき, Rolle の定理を述べよ.

(20) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ が $x=0$ で極大であることの定義を述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の答え

(1) $(1+a)^x\log(1+a)$

(2) $\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

(3) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(4) $\dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}$

(5) $y=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{2}$

(6) $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

(7) 0

(8) $\arctan x$

(9) $\dfrac{a}{\log(1+a)}$

(10) $\dfrac{\pi}{4}$

(11) $8-8\cos\dfrac{a}{2}$

(12) 2π

(13) f が $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能ならば $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

(14) 「f は $[1,2]$ 上連続」または「f は $[1,2]$ 上単調増加 (単調減少)」 のどちらか

(15) 連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ と $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$\int_0^1 (f(x)+g(x))\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx,\quad \int_0^1(\alpha f(x))\,dx=\alpha\int_0^1 f(x)\,dx$$

(16) $\displaystyle\inf_{x\in[a,b]} f(x)\le\lambda\le\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ が存在して $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lambda(b-a)$

(17) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ が存在する.

(18) f は $(0,2)$ 上微分可能で $\dfrac{df}{dx}=F$ をみたす.

(19) $f(a)=f(b)$ ならば $c\in(a,b)$ が存在して $f'(c)=0$

(20) ある $\delta>0$ が存在して, すべての $x\in(-1,1)$ に対して

$$0<|x|<\delta\Rightarrow f(x)<f(0)$$

問題 2.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は $[0,1]$ 上連続とする. このとき, f の $[0,1]$ 上の Riemann 積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の定義を述べよ. ただし,「分割」,「Riemann 下積分」,「Riemann 上積分」の定義も書くこと.

問題 3.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は $[0,1]$ 上連続とする.

(1) f の不定積分の定義を述べよ.

(2) f の不定積分は連続であることを証明せよ.

問題 4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能であるとする.

(1) f が $\mathbb{R}$ 上微分可能であることの, 割り算 (分数) を用いない同値条件を述べよ.

(2) $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{d(f+g)}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(a) + \frac{dg}{dx}(a)$$

となることを, **上の同値条件を用いて**証明せよ.

問題 5.

$f \in C^1(\mathbb{R})$, $a < b$ とする.

(1) $0 < t < 1$ に対して, 合成関数の微分公式を用いて

$$\frac{d}{dt} f(ta + (1-t)b)$$

を $\dfrac{df}{dx}$ を用いて表せ.

(2) 次の等式

$$f(b) - f(a) = \left(\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb + (1-t)a)\,dt \right)(b-a)$$

を示せ.

(3) ある $K > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left| \frac{df}{dx}(x) \right| \leq K$$

をみたすとする. このとき,

$$|f(b) - f(a)| \leq K|b-a|$$

が成り立つことを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

2 $\Delta := \{x_0, \cdots, x_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ を

$[0,1]$ 上の分割という．このとき，

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx := \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) : \Delta = \{x_0, \cdots, x_n\} \text{ は } [0,1] \text{ 上の分割} \right\}$$

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx := \inf\left\{ \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) : \Delta = \{x_0, \cdots, x_n\} \text{ は } [0,1] \text{ 上の分割} \right\}$$

をそれぞれ Riemann 下積分，Riemann 上積分という．

$\underline{\int_0^1} f(x)dx = \overline{\int_0^1} f(x)dx$ のとき，f は Riemann 積分可能であるといい，$\int_0^1 f(x)\,dx = \underline{\int_0^1} f(x)dx \left(= \overline{\int_0^1} f(x)dx\right)$ とかく．

3 (1) $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ が f の不定積分であるとは $x \in [0,1]$ に対し

$$F(x) := \int_0^x f(\xi)\,d\xi$$

であることをいう．

(2) ${}^\forall x, y \in [0,1]$ に対し

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_0^x f(\xi)d\xi - \int_0^y f(\xi)\,d\xi \right|$$

$$= \left| \int_y^x f(\xi)\,d\xi \right| \quad (\because \text{区間加法性})$$

$$\leq \left| \int_y^x |f(\xi)|\,d\xi \right| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\leq \sup_{z \in [0,1]} |f(z)| \left| \int_y^x d\xi \right|$$

$$= \sup_{z \in [0,1]} |f(z)|\, |x - y| \to 0 \quad (y \to x)$$

より f の不定積分 F は $[0,1]$ 上連続となる．

4 (1) ${}^\forall x_0 \in \mathbb{R}$ に対し ${}^\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ について

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + R(x)(x - x_0)$$

とかいたときに $R(x) \to 0 \ (x \to x_0)$ となること．

(2) f, g が $a \in \mathbb{R}$ で微分可能なので $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ に対し

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R_f(x)(x - a)$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + R_g(x)(x - a)$$

とかくと $R_f(x) \to 0$, $R_g(x) \to 0 \ (x \to a)$ となる．従って，

$$(f+g)(x) = (f+g)(a) + (f'(a) + g'(a))(x - a) + (R_f(x) + R_g(x))(x - a)$$

となり $(R_f(x) + R_g(x)) \to 0 \ (x \to a)$ となるので

$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ となる．

5 (1)
$$\frac{d}{dt} f(ta + (1-t)b) = \frac{df}{dx}(ta + (1-t)b) \frac{d(ta + (1-t)b)}{dt}$$

$$= \frac{df}{dx}(ta + (1-t)b)(a - b).$$

(2) (1) で a と b を入れかえて，両辺 $0 \leq t \leq 1$ で積分すると

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(f(tb + (1-t)a)\right)dt = \left(\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb + (1-t)a)\,dt \right)(b - a)$$

となる．左辺について，微積分の基本定理を用いると

$$(\text{左辺}) = \left[f(tb + (1-t)a) \right]_{t=0}^{t=1} = f(b) - f(a)$$

となる

(3) (2) より

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb + (1-t)a)\,dt \right| |b - a|$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left| \frac{df}{dx}(tb + (1-t)a) \right| dt \right) |b - a| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\leq \int_0^1 K\,dt\ |b - a| \quad (\because \text{仮定})$$

$$= K|b - a|$$

となる．