微分積分学 B 試験問題

2015 年 1 月 22 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) x^{-2x} を x について微分せよ.
(2) $\arctan x$ を x について微分せよ.
(3) 曲線 $y = \sqrt{x}$ の点 $(1, 1)$ における法線の方程式を求めよ. なお, 答えは, $y = ax + b$ の形で書くこと.
(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ を求めよ.
(5) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}}\,dx$ を求めよ.
(6) $t > 0$ は定数とする. $e^{-tx}\sin x$ の変数 x に対する原始関数を一つ求めよ.
(7) f, g は $\mathbb{R}$ 上無限回微分可能な関数とする. $x \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\frac{d^4(fg)}{dx^4}(x)$ を f と g の微分を用いて表せ.
(8) e^x の Taylor-Maclaurin 展開を x^5 の項まで求めよ. 答えは

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

の形で書くこと ((9), (10) も同様に書くこと).
(9) $\cos x$ の Taylor-Maclaurin 展開を x^6 の項まで求めよ.
(10) $\log(1+x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を x^6 の項まで求めよ.
(11) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$ を求めよ.
(12) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$ を求めよ.
(13) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x}$ を求めよ.
(14) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を連続な関数とする. $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ の定義を述べよ.
(15) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を連続な関数とする. $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束することの定義を述べよ.

(16) $\lambda > 1$ に対して $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^\lambda}\,dx$ を求めよ.

(17) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ を求めよ.

(18) $x > 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\,dt$ を x の式で表せ.

(19) $t > 0$ に対して, $f(t) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$ とおく. $f(t)$ を t の式で表せ.

(20) $t > 0$ に対して, $f(t) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$ とおく. $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の答え

(1) $-2(\log x + 1)x^{-2x}$

(2) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(3) $y = -2x + 3$

(4) $\dfrac{\pi}{4}$

(5) $\dfrac{4}{3}$

(6) $-\dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}(\cos x + t\sin x)$

(7) $\dfrac{d^4f}{dx^4}(x)g(x) + 4\dfrac{d^3f}{dx^3}(x)\dfrac{dg}{dx}(x) + 6\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)\dfrac{d^2g}{dx^2}(x) + 4\dfrac{df}{dx}(x)\dfrac{d^3g}{dx^3}(x) + f(x)\dfrac{d^4g}{dx^4}(x)$

(8) $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dfrac{1}{5!}x^5 + \cdots$

(9) $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + \cdots$

(10) $\log(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{6}x^6 + \cdots$

(11) $\dfrac{1}{3}$

(12) $\dfrac{1}{24}$

(13) 0

(14) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx := \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)\,dx$

(15) $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ が収束する.

(16) $\dfrac{2^{1-\lambda}}{\lambda - 1}$

(17) -1

(18) $\dfrac{1}{x}$

(19) $\dfrac{1}{1+t^2}$

(20) $\dfrac{\pi}{2}$

問題 2.

0 でない定数 $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ を求めよ. ただし, **de l'Hospital の定理を用いず**に求めること (答えのみでは得点を与えない).

問題 3.

$p \geq 1$ に対して, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := x^p$ と定める.

(1) f が凸関数であることの定義を述べよ.
(2) f が凸関数であることを示せ.
(3) $a, b > 0$ に対して, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ を示せ.

問題 4.

$\lambda > 0$ とする.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}\,dx$ の定義を述べよ.
(2) 定義に基づいて $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}\,dx$ が収束する $\lambda > 0$ の条件を求めよ (定義にそぐわない計算をしている場合には, 得点を与えない).

問題 5.

$\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ が収束することを示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\xi > 1$ に対して, $e^{-\xi} \leq \dfrac{1}{\xi}$ を示せ.
(2) (1) を用いて, $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ が収束することを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

2. $\sin(ax)$, $\sin(bx)$をTaylor-Maclaurin展開すると

$$\sin(ax) = ax + R_1(x)$$
$$\sin(bx) = bx + R_2(x)$$

となる。ただし、$R_1(x)$, $R_2(x)$は

$$\frac{R_1(x)}{x}, \quad \frac{R_2(x)}{x} \to 0 \qquad (x \to 0)$$

をみたす。このとき、

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{ax + R_1(x)}{bx + R_2(x)}$$

$$= \frac{a + \frac{R_1(x)}{x}}{b + \frac{R_2(x)}{x}} \to \frac{a}{b} \qquad (x \to 0)$$

が得られる。

(別解) $\frac{\sin y}{y} \to 1 \quad (y \to 0)$ より

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{ax}{ax} \cdot \frac{bx}{bx} \cdot \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{\sin(ax)}{ax}\right)\left(\frac{bx}{\sin(bx)}\right)$$

$$\to \frac{a}{b} \qquad (x \to 0)$$

となる。

$\boxed{3}$ (1) ${}^{\forall}x, y \in (0, \infty)$, $0 < {}^{\forall}\lambda < 1$ に対し

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

となる. ($0 \leq {}^{\forall}\lambda \leq 1$ でもよい)

(2) $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0 \quad ({}^{\forall}x \in (0, \infty))$

より f は 凸関数 となる.

(3) (1) の λ として $\lambda = \frac{1}{2}$ と とれば $x = a$, $y = b$ として

$$f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b)),$$

すなわち

$$\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p)$$

となる. 2^p を両辺にかければ

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

が得られる.

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\lambda} dx$

(2) $\lambda \neq 1$ のとき $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\lambda} dx = \frac{1}{1-\lambda}\left[x^{1-\lambda}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \frac{1}{1-\lambda}\left(1 - \varepsilon^{1-\lambda}\right)$$

となるから

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\lambda}dx = \frac{1}{1-\lambda}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(1-\varepsilon^{1-\lambda}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda} & 1-\lambda>0 \\ \infty & 1-\lambda<0 \end{cases}$$

となる。また $\lambda=1$ のときは

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\log x\right]_\varepsilon^1 = \infty$$

となるので $0<\lambda<1$ のとき、$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx$ は

収束する。

注意 「$\lambda>0$ の条件を求めよ」より、収束しない

ことも示さないといけない。

$\boxed{5}$ (1) $z\geqq 1$ に対し $f(z):=ze^{-z}$ とおくと

(正確には「$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ を $z\in[1,\infty)$ に対し
$f(z):=ze^{-z}$ とおくと」)

$$f'(z)=(1-z)e^{-z}$$

だから $z>1$ のとき $f'(z)<0$ となる。

よって $f(z)\leqq f(1)=e^{-1}\leqq 1$ だから

$e^{-z}\leqq \frac{1}{z}$ となる。

(2) $M>1$ に対し $\int_1^M e^{-x^2}dx$ が有界であることを示せばよい（$\because e^{-x^2}\geq 0$ より）。

(1) より

$$\int_1^M e^{-x^2}dx \leq \int_1^M \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \frac{1}{1-2}\left[x^{-1}\right]_1^M$$

$$= 1-\frac{1}{M}$$

$$\leq 1.$$

だから $\int_1^M e^{-x^2}dx$ は $M>1$ に対して有界となる。よって $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束する。

注意

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

$$= 1$$

ができていれば本質的には十分である。