p.9 曲線の長さ の補足

$$x\left(\frac{k+1}{n}\right)-x\left(\frac{k}{n}\right)=x'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+R_1$$

とおくと $nR_1\to 0 \quad (n\to\infty)$ を示す。

$f(\xi):=x\left(\xi+\frac{k}{n}\right)$, $f(\xi)=f(0)+f'(0)\xi+R(\xi)$

とおくと. $f(\xi)-\left(f(0)+f'(0)\xi\right)=R(\xi)$

だから Taylor-Macburin展開より $\frac{R(\xi)}{\xi}\to 0 \quad (\xi\to 0)$。

$n\in\mathbb{N}$に対し $\xi:=\frac{1}{n}$とおくと $n\to\infty$のとき $\xi\to 0$

であり

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+R\left(\frac{1}{n}\right)$$

より

$$x\left(\frac{k+1}{n}\right)=x\left(\frac{k}{n}\right)+x'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+R\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる。 $\frac{R(\xi)}{\xi}\to 0 \quad (\xi\to 0)$ だから

$nR\left(\frac{1}{n}\right)\to 0 \quad (n\to\infty)$ がわかる。